EVALUATION DS 5 (1) de MATHEMATIQUES (2 heures) TERM SPE2026

La calculatrice est AUTORISEE

Nom et prénom: _____

Exercice1(10pts)

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit

- On appelle chaque personne une première fois:
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est gale à 0,7;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,6.
- Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel:
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0.6 ;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,4.
- Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les évènements suivants :

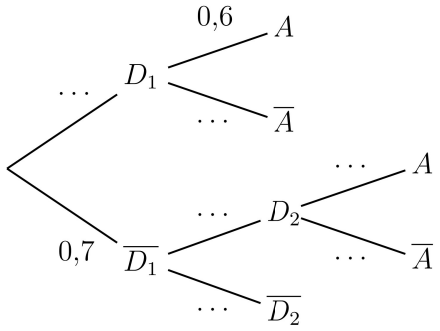
D_1 : "la personne décroche au premier appel";

D_2 : "la personne décroche au deuxième appel" ;

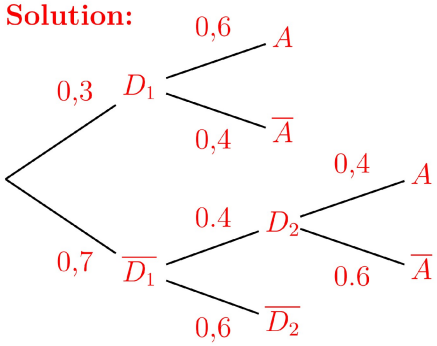
A : "la personne achète le produit ".

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante

(a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous. (2 pts)



Solution:



(b) En utilisant l'arbre pondéré, montrer que la probabilité de l'évènement A est 0,292 (1 pts)

Solution:
$P(A) = P(D_1 \cap A) + P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap A)$
$P(A) = 0.3 \times 0.6 + 0.7 \times 0.4 \times 0.4$
$P(A) = 0{,}292$

(c) On sait que la personne a acheté le produit. (1 pts)
Quelle est la probabilité qu'elle ait décroché au premier appel ?
(On arrondira à 10^{-4} près.

Solution:
On cherche $P_A(D_1)$:
$$P_A(D_1) = \frac{P(A \cap D_1)}{P(A)} = \frac{0.3 \times 0.6}{0{,}292} \approx 0.6164$$

(d) On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,292.
On considère un échantillon aléatoire de 13 personnes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.
Dans chaque échantillon considéré, on suppose que les décisions dachat des personnes sont indépendantes.

i. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres. (1 pts)

Solution:
L'échantillonnage correspond à un schéma de Bernouilli ou le succès est obtenu si la personne choisie achètent le produit. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 13$ et $p = 0{,}292$.

ii. Déterminer la probabilité qu'exactement 2 personnes de l'échantillon achètent le produit. Arrondir le résultat à 10^{-7} près. (2 pts)

Solution:
$P(X=2) = \binom{13}{2} \times (0{,}292)^2 \times (1-0{,}292)^{13-2} \approx 0{,}149\,013\,7$
en utilisant la calculatrice.

iii. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. (1 pts)
Interpréter le résultat.

Solution:
D'après le cours, $E(X) = np = 13 \times 0.292 = 3.796$.
Celà signifie qu'en répétant un grand nombre de fois l'échantillonnage, la moyenne du nombre de personnes achetant le produit se rapproche de 3.796 (si on répète n fois l'échantillonnage, la moyenne est $\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$).
Ainsi pour chaque échantillon de $n = 13$ personnes, on peut espérer 3.796 d'entre elles qui achètent le produit.

iv. Soit n un entier naturel non nul. (2 pts)
On considère désormais un échantillon de n personnes.
Déterminer avec la calculatrice la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à $0,99$.

Solution:
On cherche à déterminer n tel que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.
$P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geqslant 0,99$
$\Leftrightarrow -P(X=0) \geqslant -0,01$
$\Leftrightarrow P(X=0) \leqslant 0,01$.
Comme $P(X=0) = \binom{n}{0} \times 0,292^0 \times (1-0,292)^n = 0.708^n$ on rentre sur la calculatrice la suite $u_n = 0.708^n$ et on affiche une table de valeurs (en réglant l'intervalle correctement) pour trouver la première valeur de n pour laquelle $P(X=0)$ est inférieure ou égale à 0,01: on trouve $n = 14$

Exercice2(10pts)

Cet exercice a pour objectif la construction d'un tableau de variation complet d'une fonction donnée sous forme d'expression littérale.

On considère la fonction $f : x \mapsto -8 - \dfrac{7}{x^2 - 9}$.

(a) Donner le domaine de définition de la fonction f. (1 pts)

Solution:
f est calculable si et seulement si $x^2-9\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$ *et* $x\neq -3$.
$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$

(b) Dresser le tableau de signe de la fonction $g: x\mapsto x^2-9$ puis en déduire $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\x>-3}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\x<-3}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x<3}} f(x)$ (5 pts)

Solution:
$g: x\mapsto x^2-9$ est une fonction polynôme de degré 2 et de racines -3 et 3 et dont le coefficient du terme x^2 (a=1) est strictement positif (parabole orientée vers le haut), d'où le tableau de signe:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
Signe de x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\x>-3}} (x^2-9)=0^-$, $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\x<-3}} (x^2-9)=0^+$, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x<3}} (x^2-9)=0^-$, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}} (x^2-9)=0^+$ soit:

- $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\x>-3}} f(x)=\text{"}-8+\dfrac{-7}{0^-}=-8+(+\infty)\text{"}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\x<-3}} f(x)=\text{"}-8+\dfrac{-7}{0^+}=-8+(-\infty)\text{"}=-\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x<3}} f(x)=\text{"}-8+\dfrac{-7}{0^-}=-8+(+\infty)\text{"}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}} f(x)=\text{"}-8+\dfrac{-7}{0^+}=-8+(-\infty)\text{"}=-\infty$

(c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (1 pts)

Solution:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-8-\dfrac{7}{x^2-9}\right)=\text{"}-8+\dfrac{-7}{+\infty}\text{"}=\text{"}-8+0\text{"}=-8.$
De même $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-8-\dfrac{7}{x^2-9}\right)=-8$

(d) Calculer f' et en déduire le tableau de variation complet de la fonction f. (2 pts)

Solution:
On a $\left[\dfrac{1}{u}\right]'=\dfrac{-u'}{u^2}$ et $f(x)=-8+-7\times\dfrac{1}{u}$ où $u: x\mapsto x^2-9$.

D'où $f'(x) = \left(-8 - \dfrac{7}{x^2-9}\right)' = -7 \times \dfrac{-2x}{(x^2-9)^2} = \dfrac{14x}{(x^2-9)^2}$.
Donc $f'(x)$ est du signe de $14x$ pour tout $x \in D_f$.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
Signe de f'(x)		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
Variations de f	-8	↘	‖	↘	$-65/9$	↗	‖	↗	-8
		$-\infty$	‖				‖	$-\infty$	

(e) Préciser les deux asymptotes verticales et l'asymptote horizontale en donnant leur équations. (1 pts)

Solution:
Les droites d'équation $x = -3$ et $x = 3$ sont des asymptotes verticales à la courbe représentative de f.
La droite d'équation $y = -8$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f (en $+\infty$ et $-\infty$)

Exercice3(10pts)

Un atelier d'astronomie

Un club propose deux ateliers d'astrophotographie, l'un pour les débutants et l'autre pour les participants déjà initiés. Les participants peuvent aussi suivre une séance de traitement de leurs images après l'atelier.

On choisit au hasard un participant parmi les inscrits. On note D l'évènement « le participant est inscrit à l'atelier débutant » et S l'évènement « il suit la séance de traitement des images ». Les débutants représentent 42 % des inscrits. Parmi eux, 27 % suivent la séance de traitement des images. Parmi les initiés, cette proportion est de 83 %.

(a) Représenter la situation par un arbre pondéré. En déduire $P(D \cap S)$ et $P(\overline{D} \cap S)$. (2 pts)

Solution: Les branches vers D et $\overline{D}$ portent les probabilités 0,42 et $1 - 0{,}42$. Depuis D, les branches vers S et $\overline{S}$ portent 0,27 et $1 - 0{,}27$. Depuis $\overline{D}$, elles portent 0,83 et $1 - 0{,}83$. En multipliant les probabilités le long des chemins, on obtient

$P(D \cap S) = 0{,}42 \times 0{,}27 = 0{,}113\,4$, $P(\overline{D} \cap S) = (1 - 0{,}42) \times 0{,}83 = 0{,}481\,4$.

(b) Calculer la probabilité que le participant suive la séance de traitement. (2 pts)

Solution: Les évènements D et $\overline{D}$ forment une partition. Par la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(D \cap S) + P(\overline{D} \cap S) = 0{,}113\,4 + 0{,}481\,4 = 0{,}594\,8.$$

(c) Un participant suit la séance de traitement. Calculer la probabilité qu'il soit inscrit à l'atelier débutant. Arrondir au millième. (2 pts)

Solution:

$$P_S(D) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}113\,4}{0{,}594\,8} \approx 0{,}191.$$

(d) L'atelier débutant dure 55 minutes, celui des initiés dure 75 minutes et la séance de traitement ajoute 20 minutes. On note T la durée totale, en minutes, suivie par le participant choisi. Donner la loi de probabilité de T. (2 pts)

Solution: La durée de 55 minutes correspond à $D \cap \overline{S}$. La durée de 75 minutes correspond aux deux chemins disjoints $D \cap S$ et $\overline{D} \cap \overline{S}$. La durée de 95 minutes correspond à $\overline{D} \cap S$. On obtient donc

t	55	75	95
$P(T = t)$	0,306 6	0,212	0,481 4

(e) Calculer $E(T)$ et $\sigma(T)$ (écart type), au dixième. Interpréter $E(T)$. (2 pts)

Solution:

$$E(T) = 55 \times 0{,}306\,6 + 75 \times 0{,}212 + 95 \times 0{,}481\,4 \simeq 78{,}5 \text{ minutes.}$$

La durée moyenne que le club peut prévoir par participant est d'environ 78,5 minutes.
De même, en utilisant $V(T) = \sum_{i=1}^{n} \big(t_i - E(T)\big)^2 p_i$ et $\sigma(T) = \sqrt{V(T)}$,

$$\sigma(T) \simeq 17{,}4 \text{ minutes.}$$

Exercice4(10pts)

Limites de fonctions, non préparé — savoir-faire à réviser

Lecture graphique

- Conjecturer les limites d'une fonction en $-\infty$ et en $+\infty$ en suivant les branches de sa courbe.
- Conjecturer séparément la limite à gauche et la limite à droite d'une abscisse donnée.
- Reconnaître une asymptote verticale ou horizontale et donner son équation à partir d'un graphique ou d'une limite.

Calculs et théorèmes

- Calculer à l'infini la limite d'un polynôme ou d'un quotient de polynômes. Repérer une éventuelle forme indéterminée, mettre en facteur la plus grande puissance de x dans chaque polynôme et appliquer les théorèmes d'opérations sur les limites.
- Déduire une limite infinie en comparant la fonction à une autre fonction dont on connaît la limite.
- Utiliser le théorème des gendarmes lorsque les deux bornes d'un encadrement ont la même limite. Retrouver au besoin la limite de la fonction à partir de celle d'un multiple ou d'un quotient par une constante non nulle.

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	10	10	10	10	40
Score:					