EVALUATION DS 4 (1) de MATHEMATIQUES (2 heures) TERM SPE2026

La calculatrice est AUTORISEE

Nom et prénom: _____

Exercice1(20pts)

Savoir-faire à maîtriser pour l'exercice sur les suites

L'exercice sera découvert le jour du devoir. Cette liste indique les savoir-faire à travailler à partir du cours et des exercices déjà traités.

1. **Traduire une situation par des suites.**
2. **Calculer les premiers termes d'une suite.**
3. **Reconnaître et utiliser une suite arithmétique.**
4. **Démontrer une inégalité par récurrence.**
5. **Déterminer une limite par le théorème de comparaison.**
6. **Étudier une suite auxiliaire géométrique.**
7. **Étudier les variations d'une suite.** Calculer et simplifier $u_{n+1} - u_n$ à partir d'une expression explicite. Manipuler et factoriser des puissances.
8. **Compléter un programme Python de recherche de seuil.**
9. **Déterminer et interpréter un premier rang de dépassement.** Utiliser la calculatrice.
10. **Examiner une affirmation dans le contexte du problème.** Confronter l'affirmation à un résultat démontré sur la suite. Justifier la réponse en reliant les propriétés mathématiques aux règles du modèle et à la situation étudiée.

Exercice2(20pts)

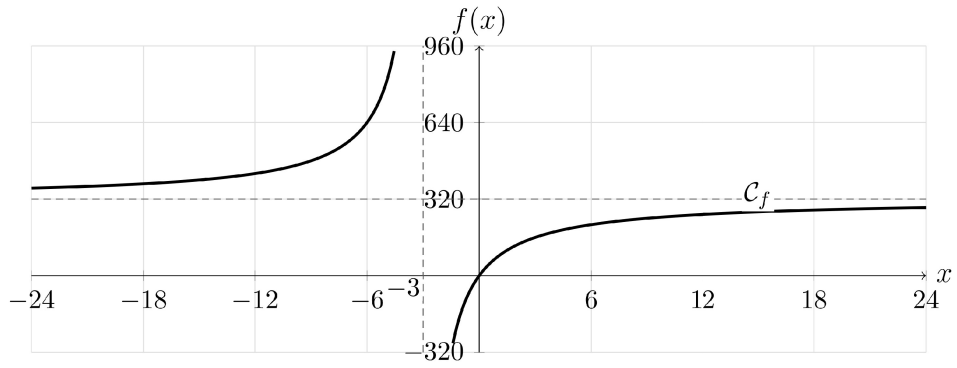
Limites et comparaison de deux modèles.

Les réponses doivent être justifiées, sauf les conjectures de la partie A. Les résultats des questions précédentes peuvent être utilisés même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie A - Observer et conjecturer

Une fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Une partie de sa courbe est représentée ci-dessous. Les pointillés sont des guides de lecture.

Nom et prénom: _____



(a) Conjecturer les quatre limites suivantes : (2 pts)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x), \qquad \lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x).$$

Solution: Dans l'ordre demandé : 320, 320, $+\infty$, $-\infty$.

(b) Un élève affirme : " Lorsque x est assez grand, $f(x)$ finit par être exactement égal à 320. " Cette affirmation exprime-t-elle correctement une limite ? Expliquer. (1 pts)

Solution: Non. Avoir pour limite 320 signifie que $f(x)$ devient aussi proche que l'on veut de 320 lorsque x est assez grand. Cela ne signifie pas que $f(x)$ finit par être égal à 320.

Partie B - Justifier et préciser

On donne maintenant l'expression de f :

$$f(x) = \frac{320x}{x+3} \qquad \text{pour } x \neq -3.$$

(c) Montrer que $f(x) = 320 - \dfrac{960}{x+3}$ pour tout $x \neq -3$. (1 pts)

Solution: En réduisant au même dénominateur,

$$320 - \frac{960}{x+3} = \frac{320(x+3) - 960}{x+3} = \frac{320x}{x+3} = f(x).$$

(d) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. (2 pts)

Solution: Lorsque $x \to +\infty$, $x+3 \to +\infty$, donc $\dfrac{960}{x+3} \to 0$ par quotient. Par différence, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 320$.

Lorsque $x \to -\infty$, $x+3 \to -\infty$, donc le même quotient tend vers 0. Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 320$.

(e) Justifier les limites de f à gauche et à droite de -3. (2 pts)

Solution: Le numérateur $320x$ tend vers -960, un nombre strictement négatif.

- Si $x < -3$, alors $x+3 < 0$ et le dénominateur tend vers 0 par valeurs négatives. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x) = +\infty$.
- Si $x > -3$, alors $x+3 > 0$ et le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x) = -\infty$.

On utilise ici les règles de limite d'un quotient, en précisant le signe du dénominateur.

(f) Donner la signification de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 320$ en utilisant un intervalle ouvert contenant 320. (1 pts)

Solution: Tout intervalle ouvert contenant 320 contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand. Le seuil à partir duquel cela est vrai peut dépendre de l'intervalle choisi.

(g) Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $0 \leqslant f(x) < 320$. (1 pts)

Solution: Pour $x \geqslant 0$, le numérateur $320x$ est positif ou nul et le dénominateur $x+3$ est strictement positif : $f(x) \geqslant 0$. De plus, $\dfrac{960}{x+3} > 0$, donc l'écriture obtenue à la question c de la partie B donne $f(x) < 320$.

(h) Résoudre, pour $x \geqslant 0$, la double inégalité $280 < f(x) < 360$. En déduire le plus petit entier N_f tel que cette double inégalité soit vraie pour tout réel $x \geqslant N_f$. (2 pts)

Solution: D'après la question g de la partie B, $f(x) < 320 < 360$ pour

tout $x \geqslant 0$. Il reste donc à résoudre $f(x) > 280$.

$$\begin{aligned} 320 - \frac{960}{x+3} > 280 &\iff \frac{960}{x+3} < 40 \\ &\iff 960 < 40(x+3) \\ &\iff x > 21. \end{aligned}$$

La multiplication par $x+3$ conserve le sens de l'inégalité car ce nombre est positif. L'ensemble des solutions est $]21; +\infty[$. L'inégalité étant stricte, le plus petit entier demandé est

$$\boxed{N_f = 22}.$$

À $x = 21$, on a exactement $f(x) = 280$: ce réel n'est pas solution. L'intervalle $]280; 360[$ est centré sur 320, avec un écart de 40 de chaque côté.

Partie C - Un service de prêt de vélos

Une association lance un service de prêt de vélos. Elle souhaite prévoir le nombre d'adhérents inscrits au fil du temps. Le réel $t \geqslant 0$ désigne le temps écoulé depuis le lancement, exprimé en mois. Deux modèles proposent d'estimer le nombre d'adhérents à l'instant t :

$$\boxed{f(t) = \frac{320t}{t+3}} \quad \text{et} \quad \boxed{g(t) = \frac{320(\mathrm{e}^t - 1)}{\mathrm{e}^t + 8}}.$$

Les valeurs de $f(t)$ et de $g(t)$ sont des estimations réelles, que l'on ne convertit pas en nombres entiers pour les calculs de seuil.

(i) Calculer $f(0)$ et $g(0)$, puis interpréter ces valeurs dans le contexte. (1 pts)

Solution: $f(0) = 0$ et, puisque $\mathrm{e}^0 = 1$, $g(0) = \dfrac{320(1-1)}{1+8} = 0$. Selon les deux modèles, le nombre d'adhérents est nul au moment du lancement.

(j) Déterminer un réel A tel que, pour tout $t \geqslant 0$, (2 pts)

$$g(t) = 320 - \frac{A}{\mathrm{e}^t + 8}.$$

En déduire la limite de g en $+\infty$ et interpréter ce résultat.

Solution: On écrit

$$320(\mathrm{e}^t - 1) = 320(\mathrm{e}^t + 8) - 2880.$$

Ainsi $A = 2880$ et $g(t) = 320 - \dfrac{2880}{\mathrm{e}^t + 8}$. Comme $\mathrm{e}^t \to +\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$; le quotient tend donc vers 0. Par différence,

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} g(t) = 320}.$$

Selon ce modèle, le nombre d'adhérents se rapproche de 320 à long terme. De plus $g(t) < 320$ pour tout $t \geqslant 0$, puisque le quotient soustrait est strictement positif.

(k) On souhaite dépasser le seuil de 280 adhérents.

i. Montrer que, pour $t \geqslant 0$, (1 pts)

$$g(t) > 280 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^t > 64.$$

Solution: Le dénominateur $\mathrm{e}^t + 8$ est strictement positif. D'après la question j de la partie C,

$$\begin{aligned} g(t) > 280 &\Longleftrightarrow \frac{2880}{\mathrm{e}^t + 8} < 40 \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^t + 8 > \frac{2880}{40} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^t > 64. \end{aligned}$$

ii. On admet que g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Compléter les deux lignes pointillées du programme ci-dessous pour qu'il renvoie le plus petit entier N_g tel que $g(N_g) > 280$. Donner sa valeur en justifiant à l'aide de deux évaluations consécutives de g à la calculatrice. (2 pts)

```
from math import exp
def g(t):
    return 320 * (exp(t) - 1) / (exp(t) + 8)
def seuil():
    t = 0
    while ...:
        t = ...
    return t
```

Solution: Les lignes à compléter sont :

```
while g(t) <= 280:
    t = t + 1
```

La boucle continue tant que le seuil n'est pas strictement dépassé.

Nom et prénom: _____

À la calculatrice, à 0,1 près :

$$g(4) \approx 274 < 280, \qquad g(5) \approx 301{,}6 > 280.$$

La croissance admise de g permet de conclure que $\boxed{N_g = 5}$. Le programme renvoie le premier instant *entier* de dépassement, et non l'instant réel exact auquel le seuil est atteint.

(l) Comparer les premiers instants entiers auxquels les deux modèles dépassent le seuil de 280. Peut-on départager ces modèles en s'appuyant uniquement sur leur limite en $+\infty$? Justifier. (2 pts)

Solution: Le premier modèle dépasse le seuil pour tout $t > 21$, donc son premier instant entier de dépassement est $N_f = 22$ mois. Pour le second modèle, $N_g = 5$ mois. Le second prévoit donc un dépassement plus précoce.

Les deux modèles ont pourtant la même limite 320 en $+\infty$. Cette limite ne décrit pas le délai de rapprochement de cette valeur. Elle ne suffit donc pas à départager les modèles ; des observations à des instants intermédiaires permettraient de comparer leurs prévisions à la réalité.

Question:	1	2	Total
Points:	20	20	40
Score:			