EVALUATION DS 4 (2) de MATHEMATIQUES (2 heures) TERM SPE2026

La calculatrice est AUTORISEE

Nom et prénom: _____

Exercice1(20pts)

Savoir-faire à maîtriser pour l'exercice sur les suites

L'exercice sera découvert le jour du devoir. Cette liste indique les savoir-faire à travailler à partir du cours et des exercices déjà traités.

1. **Traduire une situation par des suites.**
2. **Calculer les premiers termes d'une suite.**
3. **Reconnaître et utiliser une suite arithmétique.**
4. **Démontrer une inégalité par récurrence.**
5. **Déterminer une limite par le théorème de comparaison.**
6. **Étudier une suite auxiliaire géométrique.**
7. **Étudier les variations d'une suite.** Calculer et simplifier $u_{n+1} - u_n$ à partir d'une expression explicite. Manipuler et factoriser des puissances.
8. **Compléter un programme Python de recherche de seuil.**
9. **Déterminer et interpréter un premier rang de dépassement.** Utiliser la calculatrice.
10. **Examiner une affirmation dans le contexte du problème.** Confronter l'affirmation à un résultat démontré sur la suite. Justifier la réponse en reliant les propriétés mathématiques aux règles du modèle et à la situation étudiée.

Exercice2(20pts)

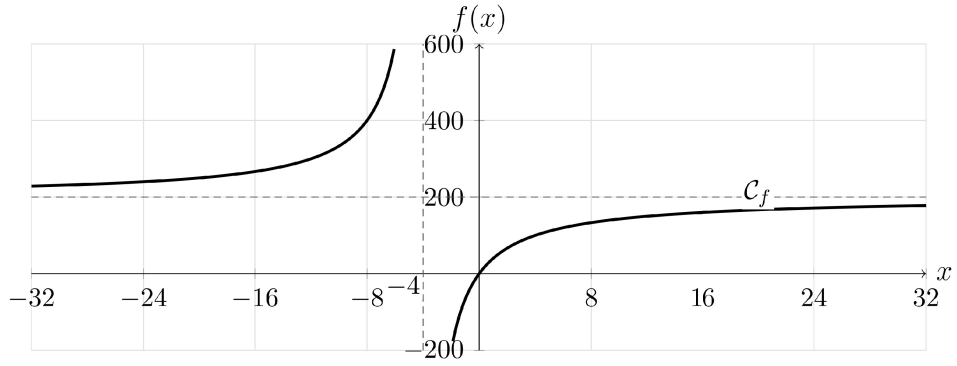
Limites et comparaison de deux modèles.

Les réponses doivent être justifiées, sauf les conjectures de la partie A. Les résultats des questions précédentes peuvent être utilisés même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie A - Observer et conjecturer

Une fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. Une partie de sa courbe est représentée ci-dessous. Les pointillés sont des guides de lecture.

Nom et prénom: _____



(a) Conjecturer les quatre limites suivantes : (2 pts)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{\substack{x\to-4\\x<-4}} f(x), \qquad \lim_{\substack{x\to-4\\x>-4}} f(x).$$

(b) Un élève affirme : " Lorsque x est assez grand, $f(x)$ finit par être exactement égal à 200. " Cette affirmation exprime-t-elle correctement une limite ? Expliquer. (1 pts)

Partie B - Justifier et préciser

On donne maintenant l'expression de f :

$$f(x) = \frac{200x}{x+4} \qquad \text{pour } x \neq -4.$$

(c) Montrer que $f(x) = 200 - \dfrac{800}{x+4}$ pour tout $x \neq -4$. (1 pts)

(d) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. (2 pts)

(e) Justifier les limites de f à gauche et à droite de -4. (2 pts)

(f) Donner la signification de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 200$ en utilisant un intervalle ouvert contenant 200. (1 pts)

(g) Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $0 \leqslant f(x) < 200$. (1 pts)

(h) Résoudre, pour $x \geqslant 0$, la double inégalité $160 < f(x) < 240$. En déduire le plus petit entier N_f tel que cette double inégalité soit vraie pour tout réel $x \geqslant N_f$. (2 pts)

Partie C - Un service de prêt de vélos

Une association lance un service de prêt de vélos. Elle souhaite prévoir le nombre d'adhérents inscrits au fil du temps. Le réel $t \geqslant 0$ désigne le temps écoulé depuis le lancement, exprimé en mois. Deux modèles proposent d'estimer le nombre d'adhérents à l'instant t :

$$\boxed{f(t) = \frac{200t}{t+4}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{g(t) = \frac{200(\mathrm{e}^t - 1)}{\mathrm{e}^t + 7}}.$$

Les valeurs de $f(t)$ et de $g(t)$ sont des estimations réelles, que l'on ne convertit pas en nombres entiers pour les calculs de seuil.

(i) Calculer $f(0)$ et $g(0)$, puis interpréter ces valeurs dans le contexte. (1 pts)

(j) Déterminer un réel A tel que, pour tout $t \geqslant 0$, (2 pts)

$$g(t) = 200 - \frac{A}{\mathrm{e}^t + 7}.$$

En déduire la limite de g en $+\infty$ et interpréter ce résultat.

(k) On souhaite dépasser le seuil de 160 adhérents.

i. Montrer que, pour $t \geqslant 0$, (1 pts)

$$g(t) > 160 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^t > 33.$$

ii. On admet que g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Compléter les deux lignes pointillées du programme ci-dessous pour qu'il renvoie le plus petit entier N_g tel que $g(N_g) > 160$. Donner sa valeur en justifiant à l'aide de deux évaluations consécutives de g à la calculatrice. (2 pts)

```
from math import exp
def g(t):
    return 200 * (exp(t) - 1) / (exp(t) + 7)
def seuil():
    t = 0
    while ...:
        t = ...
    return t
```

(l) Comparer les premiers instants entiers auxquels les deux modèles dépassent le seuil de 160. Peut-on départager ces modèles en s'appuyant uniquement sur leur limite en $+\infty$? Justifier. (2 pts)

Question:	1	2	Total
Points:	20	20	40
Score:			