EVALUATION DS 4 (21) de MATHEMATIQUES (2 heures) TERM SPE2026

La calculatrice est AUTORISEE

Nom et prénom: _____

Exercice1(20pts)

Un centre de tri de matériaux recyclables

Un centre de tri dispose initialement de 50 tonnes de matériaux en attente. Chaque semaine, il trie et évacue 20 % du stock présent au début de la semaine. Les nouveaux matériaux arrivent en fin de semaine : 30 tonnes la première semaine, puis 10 tonnes supplémentaires chaque semaine par rapport à la précédente. L'aire de stockage peut accueillir 350 tonnes de matériaux.

Après combien de semaines faudra-t-il disposer d'une aire de stockage supplémentaire ? On note u_n la masse de matériaux en attente, exprimée en tonnes, après n semaines complètes, immédiatement après les nouveaux arrivages. Ainsi, $u_0 = 50$. Pour les prévisions, on suppose que ces règles se poursuivent. Le stock théorique n'est pas plafonné à la capacité disponible.

Partie A - Construire le modèle

(a) Calculer u_1 et u_2. (3 pts)

Solution: Après le tri et l'évacuation, il reste 80 % du stock, soit un coefficient multiplicateur de 0,8. Le premier arrivage vaut 30 et le deuxième 40.

$$u_1 = 0{,}8 \times 50 + 30 = 70, \qquad u_2 = 0{,}8 \times 70 + 40 = 96.$$

Ces valeurs sont exprimées en tonnes.

(b) On note a_n la quantité reçue entre les instants n et $n+1$, avec $a_0 = 30$. Préciser la nature de (a_n) et exprimer a_n en fonction de n. (**2** pts)

Solution: Les arrivages augmentent de 10 chaque semaine : (a_n) est arithmétique de premier terme $a_0 = 30$ et de raison 10. Ainsi $\boxed{a_n = 10n + 30}$.

(c) Justifier que, pour tout entier naturel n, (**2** pts)

$$\boxed{u_{n+1} = 0{,}8u_n + 10n + 30}.$$

Solution: Le stock restant après le tri et l'évacuation est $0{,}8u_n$. On y ajoute le nouvel arrivage $a_n = 10n + 30$, d'où la relation annoncée.

Partie B - Étudier l'évolution

(d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, (3 pts)

$$u_n \geqslant 50 + 20n.$$

Solution: Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition $u_n \geqslant 50 + 20n$.
Initialisation. Pour $n = 0$, $u_0 = 50 = 50 + 20 \times 0$: $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Comme $0{,}8 > 0$, la relation de récurrence donne

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0{,}8u_n + 10n + 30 \\ &\geqslant 0{,}8(50 + 20n) + 10n + 30 \\ &= 50 + 20(n+1) + 6n \\ &\geqslant 50 + 20(n+1), \end{aligned}$$

car $n \geqslant 0$ et $6 > 0$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, $u_n \geqslant 50 + 20n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) En déduire la limite de (u_n). Que peut-on prévoir pour toute capacité de stockage fixée, si les règles du modèle se poursuivent ? (2 pts)

Solution: Comme $20 > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} (50 + 20n) = +\infty.$$

Par comparaison,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}.$$

Le stock théorique finit donc par dépasser toute capacité fixée. Il faudra adapter l'organisation avant le dépassement de la capacité de l'aire de stockage.

(f) On définit, pour tout entier naturel n, (2 pts)

$$v_n = u_n - 50n + 100.$$

Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

Solution: Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 50(n+1) + 100 \\ &= 0{,}8u_n + 10n + 30 - 50n - 50 + 100 \\ &= 0{,}8(u_n - 50n + 100) = 0{,}8v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 + 100 = 50 + 100 = 150$.

(g) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. (2 pts)

Solution: La formule explicite d'une suite géométrique donne

$$v_n = 150 \times 0{,}8^n.$$

Puisque $u_n = v_n + 50n - 100$, on obtient

$$\boxed{u_n = 50n - 100 + 150 \times 0{,}8^n}.$$

(h) À l'aide de cette expression, établir que (2 pts)

$$u_{n+1} - u_n = 50 - 30 \times 0{,}8^n,$$

puis montrer que (u_n) est strictement croissante.

Solution: On soustrait les deux expressions explicites :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 50 + 150\left(0{,}8^{n+1} - 0{,}8^n\right) \\ &= 50 + 150 \times 0{,}8^n(0{,}8 - 1) \\ &= 50 - 30 \times 0{,}8^n. \end{aligned}$$

Comme $0 < 0{,}8 < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 0{,}8^n \leqslant 1$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \geqslant 50 - 30 = 20 > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Partie C - Prendre une décision

(i) Compléter les deux lignes pointillées de la fonction Python pour qu'elle renvoie le plus petit entier N tel que $u_N > 350$. (2 pts)

```
def seuil():
    n = 0
    u = 50
    while ...:
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

Solution: Les deux lignes sont :

```
while u <= 350:
    u = 0.8 * u + 10 * n + 30
```

La boucle continue tant que la capacité n'est pas strictement dépassée. La mise à jour de `u` utilise l'ancien rang `n` : on incrémente `n` *après* ce calcul. La divergence vers $+\infty$ assure que la boucle se termine.

(j) Déterminer N à l'aide de la calculatrice ou du programme. Justifier avec deux termes consécutifs, puis répondre à la question posée au début de l'exercice. (2 pts)

Solution: À 0,01 près,

$$u_8 \approx 325{,}17 < 350, \qquad u_9 \approx 370{,}13 > 350.$$

La croissance de (u_n) prouve que le premier rang de dépassement est $\boxed{N = 9}$. La capacité de l'aire de stockage est dépassée après 9 semaines, lors de l'arrivage correspondant. La capacité supplémentaire doit donc être disponible **avant cet arrivage**.

(k) Un responsable affirme : " Retirer régulièrement une proportion du stock suffit à empêcher toute saturation, même si les arrivages continuent d'augmenter. " Cette affirmation est-elle compatible avec le modèle étudié ? Justifier. (1 pts)

Solution: Non. La partie B établit que $u_n \to +\infty$: toute capacité fixée est finalement dépassée. Le retrait de 20 % du stock ne suffit donc pas à compenser durablement les arrivages croissants dans ce modèle.

Exercice2(20pts)

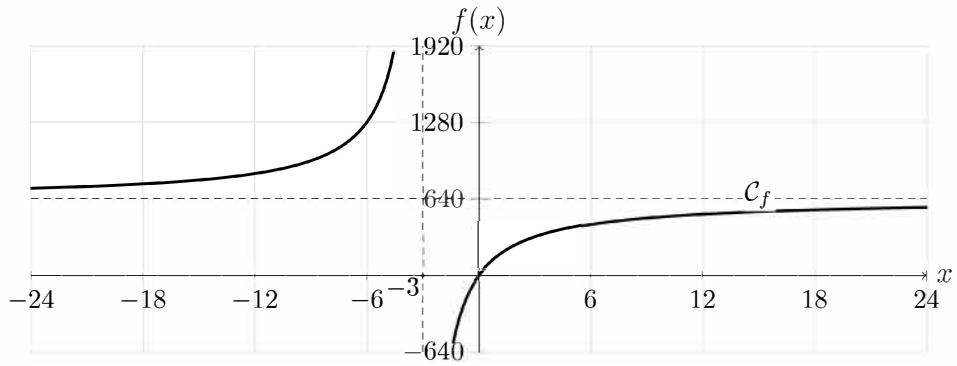
Limites et comparaison de deux modèles.

Les réponses doivent être justifiées, sauf les conjectures de la partie A. Les résultats des questions précédentes peuvent être utilisés même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie A - Observer et conjecturer

Une fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Une partie de sa courbe est représentée ci-dessous. Les pointillés sont des guides de lecture.

Nom et prénom: _____



(a) Conjecturer les quatre limites suivantes : (4 pts)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x), \qquad \lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x).$$

Solution: Dans l'ordre demandé : 640, 640, $+\infty$, $-\infty$.

(b) Un élève affirme : « Lorsque x est assez grand, $f(x)$ finit par être exactement égal à 640. »Cette affirmation exprime-t-elle correctement une limite ? Expliquer. (1 pts)

Solution: Non. Avoir pour limite 640 signifie que $f(x)$ devient aussi proche que l'on veut de 640 lorsque x est assez grand. Cela ne signifie pas que $f(x)$ finit par être égal à 640.

Partie B - Justifier et préciser

On donne maintenant l'expression de f :

$$f(x) = \frac{640x}{x+3} \qquad \text{pour } x \neq -3.$$

(c) Montrer que $f(x) = 640 - \dfrac{1920}{x+3}$ pour tout $x \neq -3$. (1 pts)

Solution: En réduisant au même dénominateur,

$$640 - \frac{1920}{x+3} = \frac{640(x+3) - 1920}{x+3} = \frac{640x}{x+3} = f(x).$$

(d) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. (2 pts)

Solution: Lorsque $x \to +\infty$, $x+3 \to +\infty$, donc $\dfrac{1920}{x+3} \to 0$ par quotient. Par différence, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 640$.

Lorsque $x \to -\infty$, $x+3 \to -\infty$, donc le même quotient tend vers 0. Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 640$.

(e) Justifier les limites de f à gauche et à droite de -3. (2 pts)

Solution: Le numérateur $640x$ tend vers -1920, un nombre strictement négatif.

- Si $x < -3$, alors $x+3 < 0$ et le dénominateur tend vers 0 par valeurs négatives. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x) = +\infty$.
- Si $x > -3$, alors $x+3 > 0$ et le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x) = -\infty$.

On utilise ici les règles de limite d'un quotient, en précisant le signe du dénominateur.

(f) Donner la signification de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 640$ en utilisant un intervalle ouvert contenant 640. (1 pts)

Solution: Tout intervalle ouvert contenant 640 contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand. Le seuil à partir duquel cela est vrai peut dépendre de l'intervalle choisi.

(g) Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $0 \leqslant f(x) < 640$. (1 pts)

Solution: Pour $x \geqslant 0$, le numérateur $640x$ est positif ou nul et le dénominateur $x+3$ est strictement positif : $f(x) \geqslant 0$. De plus, $\dfrac{1920}{x+3} > 0$, donc l'écriture obtenue à la question c de la partie B donne $f(x) < 640$.

(h) Résoudre, pour $x \geqslant 0$, la double inégalité $560 < f(x) < 720$. En déduire le plus petit entier N_f tel que cette double inégalité soit vraie pour tout réel $x \geqslant N_f$. (2 pts)

Solution: D'après la question g de la partie B, $f(x) < 640 < 720$ pour

tout $x \geqslant 0$. Il reste donc à résoudre $f(x) > 560$.

$$\begin{aligned} 640 - \frac{1920}{x+3} > 560 &\iff \frac{1920}{x+3} < 80 \\ &\iff 1920 < 80(x+3) \\ &\iff x > 21. \end{aligned}$$

La multiplication par $x+3$ conserve le sens de l'inégalité car ce nombre est positif. L'ensemble des solutions est $]21; +\infty[$. L'inégalité étant stricte, le plus petit entier demandé est

$$\boxed{N_f = 22}.$$

À $x = 21$, on a exactement $f(x) = 560$: ce réel n'est pas solution. L'intervalle $]560; 720[$ est centré sur 640, avec un écart de 80 de chaque côté.

Partie C - Un service de prêt de vélos

Une association lance un service de prêt de vélos. Elle souhaite prévoir le nombre d'adhérents inscrits au fil du temps. Le réel $t \geqslant 0$ désigne le temps écoulé depuis le lancement, exprimé en mois. Deux modèles proposent d'estimer le nombre d'adhérents à l'instant t :

$$\boxed{f(t) = \frac{640t}{t+3}} \quad \text{et} \quad \boxed{g(t) = \frac{640(\mathrm{e}^t - 1)}{\mathrm{e}^t + 4}}.$$

Les valeurs de $f(t)$ et de $g(t)$ sont des estimations réelles, que l'on ne convertit pas en nombres entiers pour les calculs de seuil.

(i) Calculer $f(0)$ et $g(0)$, puis interpréter ces valeurs dans le contexte. (1 pts)

Solution: $f(0) = 0$ et, puisque $\mathrm{e}^0 = 1$, $g(0) = \dfrac{640(1-1)}{1+4} = 0$. Selon les deux modèles, le nombre d'adhérents est nul au moment du lancement.

(j) Déterminer un réel A tel que, pour tout $t \geqslant 0$, (2 pts)

$$g(t) = 640 - \frac{A}{\mathrm{e}^t + 4}.$$

En déduire la limite de g en $+\infty$ et interpréter ce résultat.

Solution: On écrit

$$640(\mathrm{e}^t - 1) = 640(\mathrm{e}^t + 4) - 3200.$$

Ainsi $A = 3200$ et $g(t) = 640 - \dfrac{3200}{\mathrm{e}^t + 4}$. Comme $\mathrm{e}^t \to +\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$; le quotient tend donc vers 0. Par différence,

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} g(t) = 640}.$$

Selon ce modèle, le nombre d'adhérents se rapproche de 640 à long terme. De plus $g(t) < 640$ pour tout $t \geqslant 0$, puisque le quotient soustrait est strictement positif.

(k) On souhaite dépasser le seuil de 560 adhérents.

i. Montrer que, pour $t \geqslant 0$, (1 pts)

$$g(t) > 560 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^t > 36.$$

Solution: Le dénominateur $\mathrm{e}^t + 4$ est strictement positif. D'après la question j de la partie C,

$$\begin{aligned} g(t) > 560 &\Longleftrightarrow \frac{3200}{\mathrm{e}^t + 4} < 80 \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^t + 4 > \frac{3200}{80} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^t > 36. \end{aligned}$$

ii. On admet que g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Compléter les deux lignes pointillées du programme ci-dessous pour qu'il renvoie le plus petit entier N_g tel que $g(N_g) > 560$. Donner sa valeur en justifiant à l'aide de deux évaluations consécutives de g à la calculatrice. (2 pts)

```
from math import exp
def g(t):
    return 640 * (exp(t) - 1) / (exp(t) + 4)
def seuil():
    t = 0
    while ...:
        t = ...
    return t
```

Solution: Les lignes à compléter sont :

```
while g(t) <= 560:
    t = t + 1
```

La boucle continue tant que le seuil n'est pas strictement dépassé.

Nom et prénom: _____

À la calculatrice, à 0,1 près :

$$g(3) \approx 507{,}1 < 560, \qquad g(4) \approx 585{,}4 > 560.$$

La croissance admise de g permet de conclure que $\boxed{N_g = 4}$. Le programme renvoie le premier instant *entier* de dépassement, et non l'instant réel exact auquel le seuil est atteint.

(l) Comparer les premiers instants entiers auxquels les deux modèles dépassent le seuil de 560. Peut-on départager ces modèles en s'appuyant uniquement sur leur limite en $+\infty$? Justifier. (2 pts)

Solution: Le premier modèle dépasse le seuil pour tout $t > 21$, donc son premier instant entier de dépassement est $N_f = 22$ mois. Pour le second modèle, $N_g = 4$ mois. Le second prévoit donc un dépassement plus précoce.

Les deux modèles ont pourtant la même limite 640 en $+\infty$. Cette limite ne décrit pas le délai de rapprochement de cette valeur. Elle ne suffit donc pas à départager les modèles ; des observations à des instants intermédiaires permettraient de comparer leurs prévisions à la réalité.

Question:	1	2	Total
Points:	20	20	40
Score:			