

**EVALUATION DS 3 (1) de MATHEMATIQUES (2
heures) TERM SPE2025**

La calculatrice est AUTORISEE

Nom et prénom: _____

Exercice1(7pts)

(Non préparé) Exercice sur la récurrence: revoir les exemples vus en classe.

Exercice2(5pts)

(Non préparé) Calcul de limites et levée d'indétermination: revoir les exercices vus en classe.

Exercice3(4pts)

Question de cours: suites arithmétiques.

- (a) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_4 = \frac{3}{2}$ et de raison $r = -8$. (1 pts)
Donner l'expression explicite de u_n .

Solution: $u_n = \frac{3}{2} - 8(n - 4)$

- (b) (1 pts)
Soit (u_n) la suite dont l'expression explicite est $u_n = \frac{-17}{4} - 2(n - 3)$. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme u_0 et la raison r .

Solution:

Pour identifier une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , on doit reconnaître la forme $u_n = u_0 + n \times r$

On a en développant et en simplifiant:

$$u_n = \frac{-17}{4} - 2n - 2 \times (-3)$$

$$u_n = \frac{7}{4} - 2n.$$

$$\text{Soit } u_n = \frac{7}{4} + n \times (-2)$$

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = \frac{7}{4}$ et de raison $r = -2$.

Remarque: on ne doit pas se contenter de calculer u_0 ou u_1 pour vérifier la formule $u_n = u_0 + r \times n$.

- (c) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = \frac{3}{2}$ et de raison $r = -4$. (1 pts)
Calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{22}$.

Solution:

Rappel de cours (première):

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

Nom et prénom: _____

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + \dots + u_{22} \\ S &= (u_0 + 0 \times r) + (u_0 + 1 \times r) + \dots + (u_0 + 22 \times r) \\ (\text{On a } (22 + 1) \text{ termes entre parenthèses}) \\ S &= u_0 \times (22 + 1) + (0 + 1 + \dots + 22) \times r \\ S &= \frac{3}{2} \times (22 + 1) + \frac{22 \times (22 + 1)}{2} \times (-4) = \frac{-1955}{2} \end{aligned}$$

(d) (1 pts)

Soit (u_n) la suite dont l'expression explicite pour $n \geq 22$ est $u_n = \frac{-521}{4} + 6n$. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_{22} = \frac{7}{4}$ et de raison $r = 6$.

Solution:

Pour identifier une suite arithmétique de premier terme u_{22} et de raison r , on doit reconnaître la forme $u_n = u_{22} + r \times (n - 22)$

On a en développant et en simplifiant: $\frac{7}{4} + 6(n - 22) = \frac{-521}{4} + 6n = u_n$.
 (u_n) est donc bien une suite arithmétique de premier terme $u_{22} = \frac{7}{4}$ et de raison $r = 6$.

Exercice4(6pts)

(Récurrence)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

(a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 5$. (2 pts)

Solution: Soit $\mathbb{P}_n$ la proposition " $0 \leq u_n \leq 5$ ".

Initialisation:

$u_0 = 5$ donc $0 \leq u_0 \leq 5$.

D'où $\mathbb{P}_0$ vraie.

Hérédité:

Supposons $\mathbb{P}_n$ est vraie pour un entier n donné.

$$0 \leq u_n \leq 5 \Rightarrow 0 + 2 \leq u_n + 2 \leq 5 + 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{7}.$$

Comme $0 < \sqrt{2}$ et $\sqrt{7} < 5$, on a $0 \leq u_{n+1} \leq 5$, c'est à dire $\mathbb{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion:

D'après le principe de récurrence, $\mathbb{P}_n$ est vraie pour tout n entier naturel.

(b) Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante. (2 pts)

Solution: Soit $\mathbb{P}_n$ la proposition " $u_{n+1} \leq u_n$ ".

Initialisation:

$u_0 = 5$ et $u_1 = \sqrt{8} \leq 5$ donc $u_1 \leq u_0$. En conséquence P_0 est vraie.

Hérédité:

Supposons $\mathbb{P}_n$ vraie pour un entier n donné.

On a donc $u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow u_{n+1} + 2 \leq u_n + 2$.

D'après la question précédente u_{n+1} et u_n sont positifs donc $u_{n+1} + 2$ et $u_n + 2$ le sont également.

De plus la fonction racine est strictement croissante d'où

$$u_{n+1} + 2 \leq u_n + 2 \Rightarrow \sqrt{u_{n+1} + 2} \leq \sqrt{u_n + 2}.$$

Par définition de u_n , $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + 2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

d'où $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

$\mathbb{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion:

D'après le principe de récurrence, $\mathbb{P}_n$ est vraie pour tout n entier naturel.

(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

(2 pts)

Solution:

La suite (u_n) est minorée par 0 d'après (a) et elle est décroissante.
D'après le cours (u_n) est convergente.

Exercice 5 (8pts)

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Solution:

Pour tout entier $n > 0$, posons $\mathcal{P}(n)$ la proposition $\mathcal{P}(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation

$\mathcal{P}(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ est vraie.

Hérédité

Supposons que $\mathcal{P}(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour une valeur donnée de n .

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n}{2} \times (n+1) + 1 \times (n+1)$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \left(\frac{n}{2} + 1\right)(n+1) \quad \text{en factorisant par } (n+1)$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n+2}{2}(n+1)$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Nom et prénom: _____

Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ vraie.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n > 1$.

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	7	5	4	6	8	30
Score:						