

**EVALUATION DS 2 (1) de MATHEMATIQUES -(1 heure
15 minutes) TERM SPE2026**

La calculatrice est AUTORISEE

Nom et prénom: _____

Exercice1(6pts)

Enoncer et démontrer l'inégalité de Bernoulli.

Exercice2(16pts)

On s'intéresse à l'évolution du nombre d'abonnés d'un nouveau réseau social dont l'abonnement est payant annuellement.

À la fin 2021, le réseau compte exactement 730 personnes abonnées.

L'administrateur de la plateforme prévoit chaque année que 20% des anciens abonnés ne se réabonnent pas, et que 1000 nouvelles personnes s'abonnent.

On note u_n le nombre d'abonnés sur la plateforme en 2021 + n .

- (a) Combien y aura-t-il d'abonnés en 2022 ? (2 pts)

Solution:

Suivant ce modèle,

en 2022 on aura $730 \times (1 - \frac{20}{100}) + 1000 = 1584$ abonnés.

- (b) Donner la valeur de u_0 et u_1 . (2 pts)

Solution:

u_0 est le nombre d'abonnés en 2021: $u_0 = 730$

u_1 est le nombre d'abonnés en 2022: $u_1 = 1584$.

- (c) Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0.8u_n + 1000$. (2 pts)

Solution:

u_n est le nombre d'abonnés en 2021 + n .

u_{n+1} est le nombre d'abonnés en 2021 + $(n + 1)$.

Baisser de 20% revient à multiplier par $1 - \frac{20}{100} = 0.8$.

Donc le nombre d'abonnés baisse à $0.8u_n$.

De plus Il y a 1000 nouveaux abonnés ce qui revient à y ajouter 1000.

Finalement $u_{n+1} = 0.8u_n + 1000$.

- (d) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 5000$. (2 pts)
Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Solution:

Pour montrer qu'une suite (v_n) est une suite géométrique il suffit de montrer que quelque soit n , il existe un nombre q (la raison) telle que

$$v_{n+1} = q \times v_n.$$

Ici on a $v_n = u_n - 5000$.

D'où:

$v_{n+1} = u_{n+1} - 5000$ en utilisant la définition de $v_n = u_n - 5000$ et en remplaçant n par $n + 1$

$v_{n+1} = 0.8u_n + 1000 - 5000$ en utilisant la définition de $u_{n+1} = 0.8u_n + 1000$

$$v_{n+1} = 0.8u_n - 4000$$

$$v_{n+1} = 0.8 \left(u_n - \frac{4000}{0.8} \right) \text{ en factorisant par } 0.8$$

$$v_{n+1} = 0.8 (u_n - 5000)$$

$$v_{n+1} = 0.8v_n$$

Donc v_n est bien une suite géométrique de raison 0.8.

- (e) Déterminer la valeur de v_0 . (2 pts)

Solution:

On utilise la définition de (v_n) : $v_n = u_n - 5000$.

Le premier terme de la suite v_n est donc $v_0 = u_0 - 5000 = -4270$

- (f) En déduire l'expression de v_n en fonction de n . (2 pts)

Solution:

D'après le cours si v_n est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0 , alors on a l'expression explicite:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

$$\text{D'où } v_n = -4270 \times 0.8^n.$$

- (g) En déduire l'expression de u_n en fonction de n . (2 pts)

Solution:

On a alors:

$$v_n = u_n - 5000$$

$$\Leftrightarrow u_n = v_n + 5000$$

$$\Leftrightarrow u_n = -4270 \times 0.8^n + 5000$$

- (h) Combien d'abonnés l'administrateur prévoit-il en 2049 avec ce modèle? (2 pts)

Solution:

Entre 2021 et 2049, il s'agit de calculer u_{28} :

Nom et prénom: _____

$$u_{28} = -4270 \times 0.8^{28} + 5000$$
$$u_{28} \approx 4992$$

Exercice3(8pts)

Le 1^{er} janvier 2021, On souhaite déposer 3 200 euros sur un compte en banque.
On nous offre le choix entre deux propositions que l'on souhaite comparer.

(a) Première proposition

On propose un compte épargne avec des intérêts à taux fixe. Chaque année, le 31 décembre, la banque lui verserait 174 euros sur son compte épargne.
On note u_n la somme sur le compte le 1^{er} janvier 2021 + n .

- i. Déterminer la valeur de u_0 et u_1 . (1 pts)

Solution:

$$u_0 = 3200$$

$$u_1 = u_0 + 174 = 3200 + 174 = 3374$$

- ii. Déterminer la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n en justifiant. (1 pts)

Solution:

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3200$ et de raison $r = 174$.

D'après le cours $u_n = u_0 + n \times r$,

soit $u_n = 3200 + n \times 174$.

- iii. Combien aurait-on sur son compte en banque en 2028 ? (1 pts)

Solution:

L'année 2028 = 2021 + 7 on aura sur le compte:

$$u_7 = 3200 + 7 \times 174 = 4\,418 \text{ euros.}$$

(b) Deuxième proposition

On lui propose un compte épargne avec des intérêts à taux composés.
Chaque année, le 31 décembre, la banque lui verserait sur son compte épargne 4% de la somme disponible sur le compte.
On note v_n la somme sur le compte le 1^{er} janvier 2021 + n .

- i. Déterminer la valeur de v_0 et v_1 . (1 pts)

Solution:

$$v_0 = 3200.$$

$$v_1 = 3200 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 3328$$

Nom et prénom: _____

- ii. Déterminer la nature de la suite (v_n) puis exprimer v_n en fonction de n en justifiant. (1 pts)

Solution:

(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 3200$ et de raison $q = 1 + \frac{4}{100} = 1.04$
D'après le cours la formule explicite est $v_n = v_0 \times q^n$,
d'où $v_n = 3200 \times 1.04^n$

- iii. Combien aurait-il sur son compte en banque en 2028 (arrondi en euros)? (1 pts)

Solution:

En 2028 = 2021 + 7 on a:
 $v_7 = 3200 \times 1.04^7 \approx 4211$

- (c) À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'années il est plus intéressant de choisir l'offre avec des intérêts à taux composés ? (2 pts)

Solution:

Avec une table de valeurs des deux suites (u_n) et (v_n) on lit:

$$u_1 \approx 3374 \text{ et } v_1 \approx 3328$$

$$u_2 \approx 3548 \text{ et } v_2 \approx 3461$$

$$u_3 \approx 3722 \text{ et } v_3 \approx 3600$$

$$u_4 \approx 3896 \text{ et } v_4 \approx 3744$$

$$u_5 \approx 4070 \text{ et } v_5 \approx 3893$$

$$u_6 \approx 4244 \text{ et } v_6 \approx 4049$$

$$u_7 \approx 4418 \text{ et } v_7 \approx 4211$$

$$u_8 \approx 4592 \text{ et } v_8 \approx 4379$$

$$u_9 \approx 4766 \text{ et } v_9 \approx 4555$$

$$u_{10} \approx 4940 \text{ et } v_{10} \approx 4737$$

$$u_{11} \approx 5114 \text{ et } v_{11} \approx 4926$$

$$u_{12} \approx 5288 \text{ et } v_{12} \approx 5123$$

$$u_{13} \approx 5462 \text{ et } v_{13} \approx 5328$$

$$u_{14} \approx 5636 \text{ et } v_{14} \approx 5541$$

$$u_{15} \approx 5810 \text{ et } v_{15} \approx 5763$$

v dépasse u: $u_{16} \approx 5984$ et $v_{16} \approx 5994$

Il est donc plus intéressant de choisir l'offre avec des intérêts à taux composés

à partir de $2021 + 16$ soit 2037.

Nom et prénom: _____

Question:	1	2	3	Total
Points:	6	16	8	30
Score:				

Fin du devoir.