

**EVALUATION DS 1 (1) de MATHEMATIQUES (2
heures) TERM SPE2026**

La calculatrice est AUTORISEE

Nom et prénom: _____

Exercice1(6pts)

Une entreprise d'impression de photos propose un abonnement annuel à ses clients qui coûte 48 euros.

Avec cet abonnement, le client paye 9 centimes par photo qu'il veut imprimer.

On note u_n le prix que paye le client pour l'abonnement et l'impression de n photos.

- (a) Donner la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n (formule explicite). (2 pts)

Solution:

(u_n) est une suite arithmétique de raison 0.09 et de premier terme $u_0 = 48$.

On a $u_n = 48 + 0.09n$.

- (b) Combien le client paye-t-il pour imprimer 10 photos ? (2 pts)

Solution:

$u_{10} = 48 + 0.09 \times 10 = 48.9$ euros.

- (c) S'il a payé 55.92 euros, combien de photos a-t-il imprimées ? Expliquer votre démarche. (2 pts)

Solution:

$u_n = 55.92$

$\Leftrightarrow 48 + 0.09n = 55.92$

$\Leftrightarrow 0.09n = 55.92 - 48$

$\Leftrightarrow 0.09n = 7.92$

$\Leftrightarrow n = \frac{7.92}{0.09}$

$\Leftrightarrow n = 88$

Exercice2(8pts)

On note P le polynôme défini par $P(x) = -3x^2 + 24x - 21$.

- (a) Calculer le discriminant de P . (2 pts)

Solution:

D'après le cours, le discriminant du polynôme ax^2+bx+c est $\Delta = b^2-4ac$.
Ici $\Delta = b^2 - 4ac = 24^2 - 4 \times (-3) \times (-21) = 324$

- (b) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction P . Préciser si cela correspond à un maximum ou un minimum. (2 pts)

Solution:

D'après le cours, les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont $S(\frac{-b}{2a}; f(\frac{-b}{2a}))$.

$$\text{Ici } \frac{-b}{2a} = \frac{-24}{2 \times (-3)} = 4,$$

$$\text{et } f(4) = -3 \times 4^2 + 24 \times 4 - 21 = 27.$$

Les coordonnées du sommet sont donc $S(4; 27)$ et comme $a = -3 < 0$ il s'agit d'un maximum.

- (c) Déterminer si P admet une ou plusieurs racines. Si c'est le cas, calculer leur(s) valeur(s). (2 pts)

Solution:

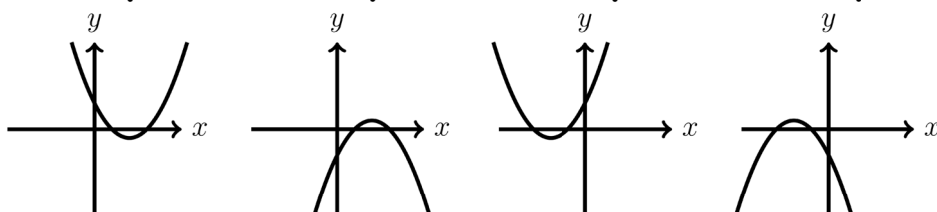
Comme $\Delta = 324 > 0$, le polynôme admet deux racines distincts:

$$x_0 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-24 - \sqrt{324}}{2 \times (-3)} = 1$$

$$\text{et } x_0 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-24 + \sqrt{324}}{2 \times (-3)} = 7$$

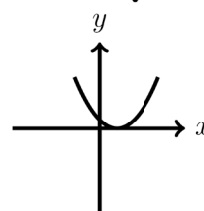
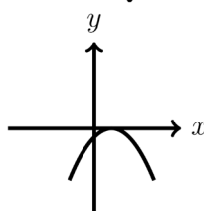
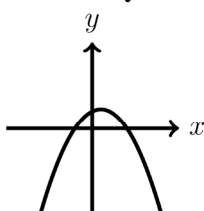
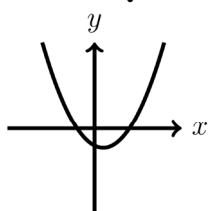
- (d) On a dessiné ci dessous à **main levée** douze représentations graphiques de fonctions dont la forme est une parabole. L'une d'entre-elles correspond à P . Dire laquelle en justifiant votre réponse. (2 pts)

GRAPHIQUE 1: GRAPHIQUE 2: GRAPHIQUE 3: GRAPHIQUE 4:

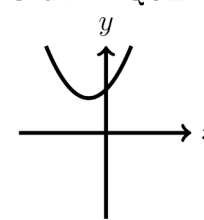
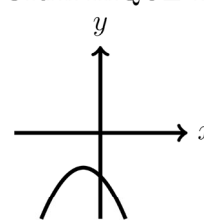
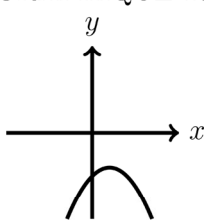
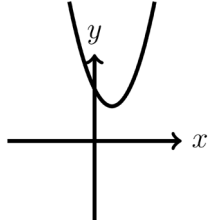


Nom et prénom: _____

GRAPHIQUE 5: GRAPHIQUE 6: GRAPHIQUE 7: GRAPHIQUE 8:



GRAPHIQUE 9: GRAPHIQUE 10: GRAPHIQUE 11: GRAPHIQUE 12:



Solution:

D'après la question (b), les racines du polynôme P sont 1 et 7.

Les racines sont donc toutes les deux positives donc le graphique est le 1 ou le 2.

Comme $a = -3 < 0$, la parabole est orientée vers le bas donc le graphique correspondant est le **GRAPHIQUE 2**.

Exercice3(4pts)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{-4}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2 \end{cases}$

Montrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Solution:

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{P}_n$ la proposition " $u_{n+1} < u_n$ "

Initialisation:

$\mathbb{P}_0$: " $u_1 < u_0$ ".

On a $u_0 = \frac{-4}{3}$ et $u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{-4}{3}\right) - 2 = \frac{-8}{3}$

Comme $u_1 < u_0$ on a $\mathbb{P}_0$ vraie.

Hérédité:

On suppose $\mathbb{P}_n$ vraie pour une valeur $n \in \mathbb{N}$ donnée.

On alors $u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_{n+1} < \frac{1}{2}u_n$ (en multipliant les deux membres de l'inégalité par $\frac{1}{2} > 0$)

Puis $\frac{1}{2}u_{n+1} - 2 < \frac{1}{2}u_n - 2$ (en ajoutant -2 aux deux membres de l'inégalité)

Soit $u_{n+2} < u_{n+1}$.

Donc $\mathbb{P}_{n+1}$ vraie.

Conclusion:

D'après le principe de la récurrence, $\mathbb{P}_n$ est vraie pour tout n entier naturel

non nul, donc (u_n) est strictement décroissante.

Exercice4(4pts)

Divergence d'une suite.

On considère la suite définie par $u_n = n^2 - 14n + 1985$.

- (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u(n) = +\infty$ (2 pts)

Solution:

$$u_n = n^2 \times 1 + n^2 \times \frac{-14}{n} + n^2 \times \frac{1985}{n^2} = n^2 \left(1 + \frac{-14}{n} + \frac{1985}{n^2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-14}{n} + \frac{1985}{n^2} \right) = "1 + 0 + 0" = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty.$$

D'après les théorèmes d'opérations sur les limites:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = " + \infty " \times 1 = +\infty.$$

- (b) Déterminer par le calcul le rang à partir duquel $u_n > 2000$ (2 pts)

Solution:

Méthode 1, la plus facile

On utilise une table de valeurs sur la calculatrice et on trouve que $u_n > 2000$ à partir de $n_0 = 16$.

Méthode2: la plus intelligente...

$$u_n > 2000 \Leftrightarrow u_n = n^2 - 14n + 1985 > 2000 \Leftrightarrow n^2 - 14n - 15 > 0.$$

Le problème revient donc à étudier le signe du polynôme du second degré $P(x) = x^2 - 14x - 15$.

Son discriminant est $\Delta = (-14)^2 + 4 \times 1 \times 15 = 256$, et ses racines sont

$$x_0 = \frac{-(-14) - \sqrt{256}}{2 \times 1} = -1 \text{ et } x_1 = \frac{-(-14) + \sqrt{256}}{2 \times 1} = 15.$$

n étant un entier naturel, donc positif, on en déduit qu'à partir de $n_0 = 16$ les termes de la suite (u_n) sont strictement supérieurs à 2000.

Nom et prénom: _____

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	6	8	4	4	22
Score:					

Fin du devoir.