CHAPITRE 3
LIMITES DE FONCTIONS

Suites

$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$n \longmapsto u_n = n^2 + 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim \dfrac{n \times 1}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1$

(F. I.)

$\dfrac{+\infty}{+\infty}$

Fonctions

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^2 + 1$

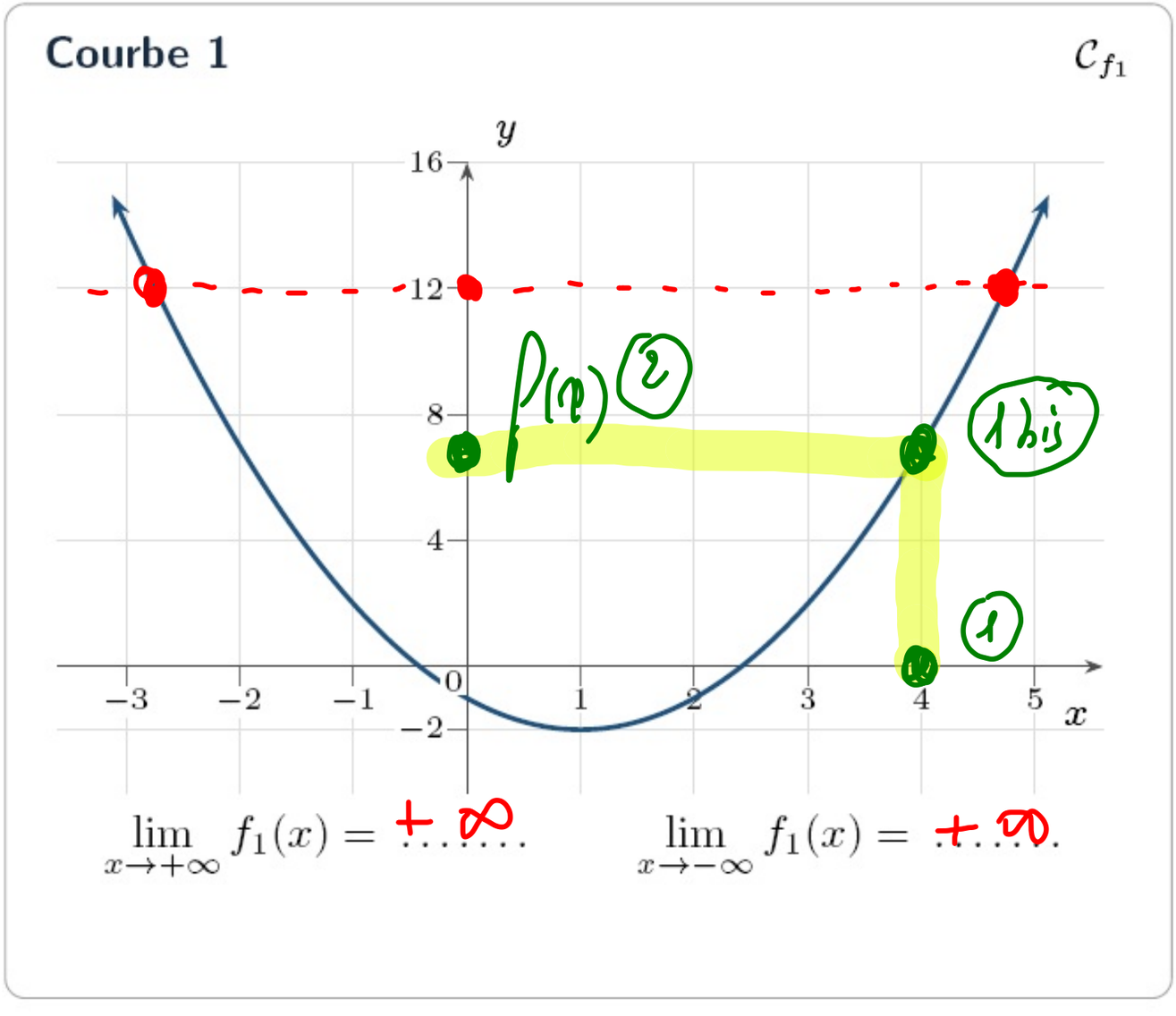
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{x+1} = ?$

Approche intuitive par représentation graphique

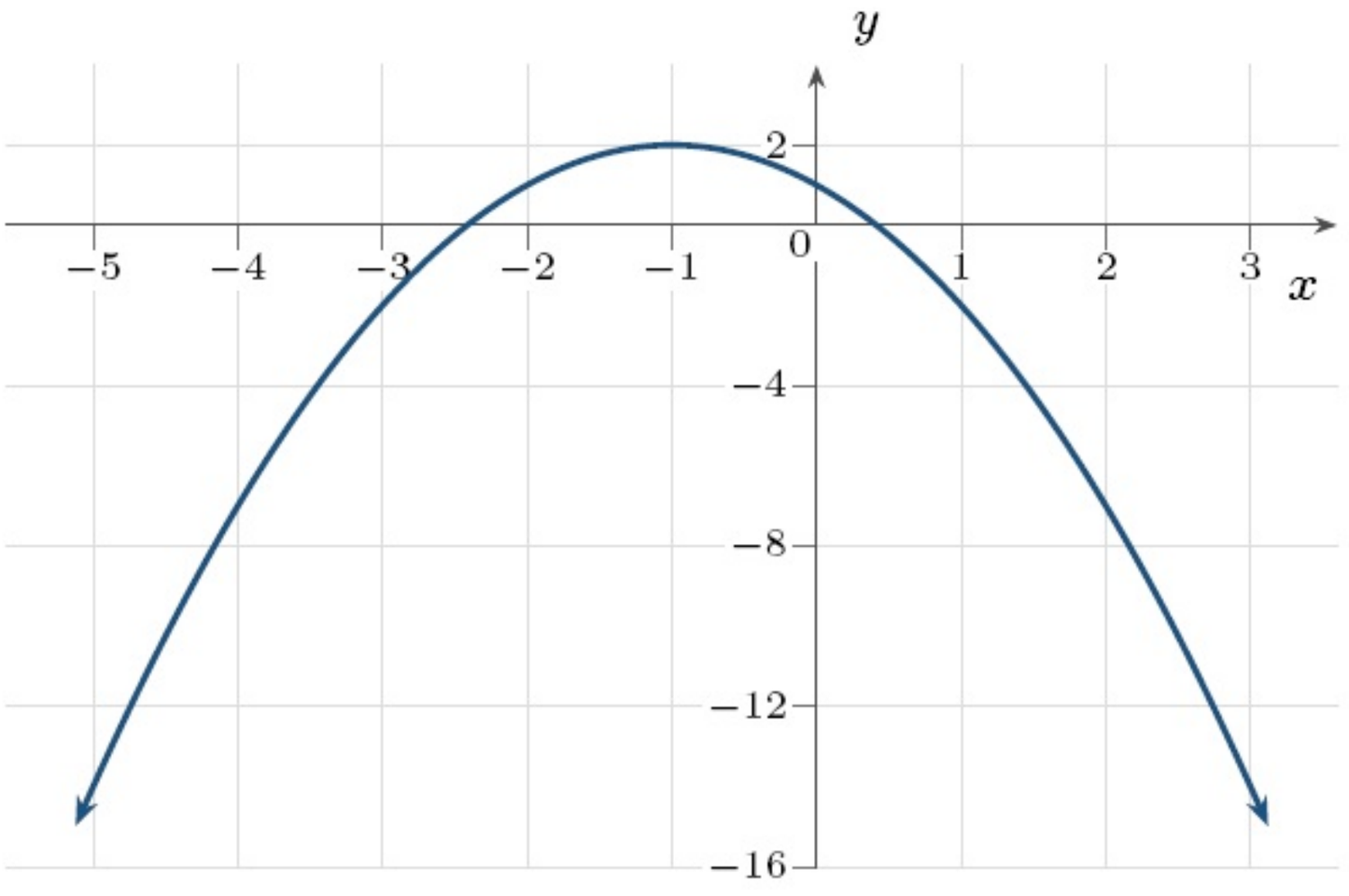


① On repère l'évolution de x demandé
" $x \to \ldots$ "
$x < \ldots$

② On observe l'évolution de l'ordonnée $f(x)$ du point correspondant de la courbe $(x ; f(x))$

Courbe 2

$\mathcal{C}_{f_2}$

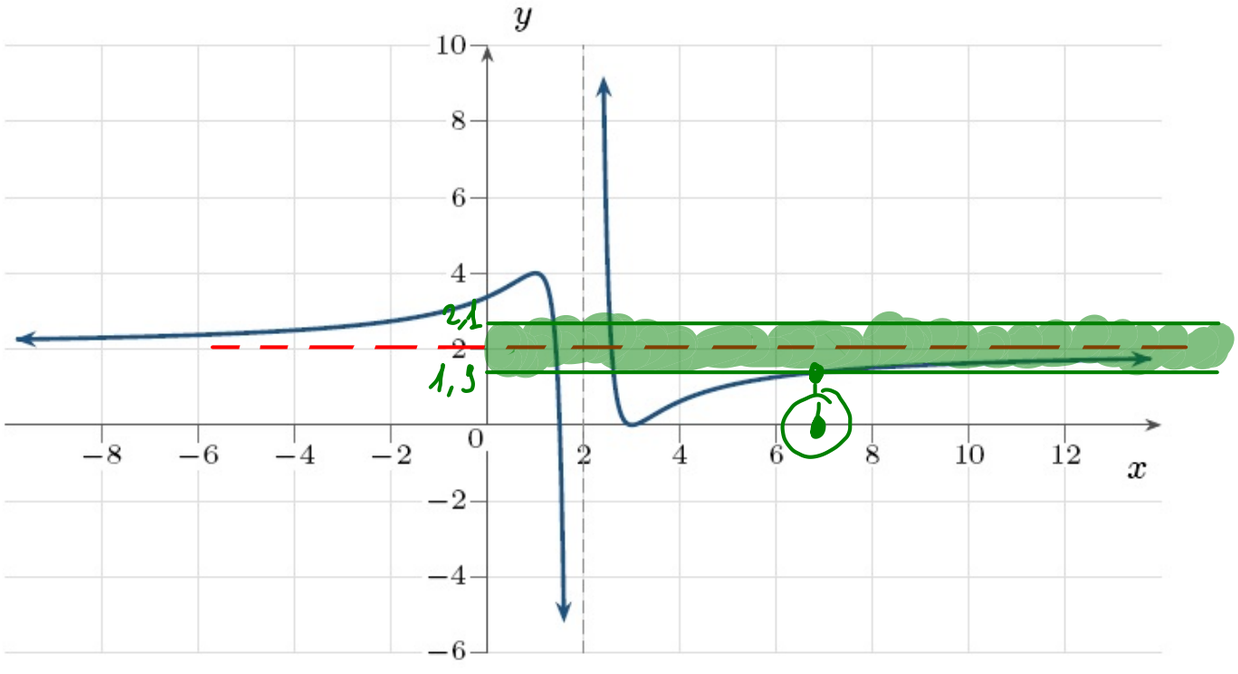


$\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = \ldots -\infty \ldots$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = \ldots -\infty \ldots$

Courbe 3

$\mathcal{C}_{f_3}$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = \ldots 2 \ldots$

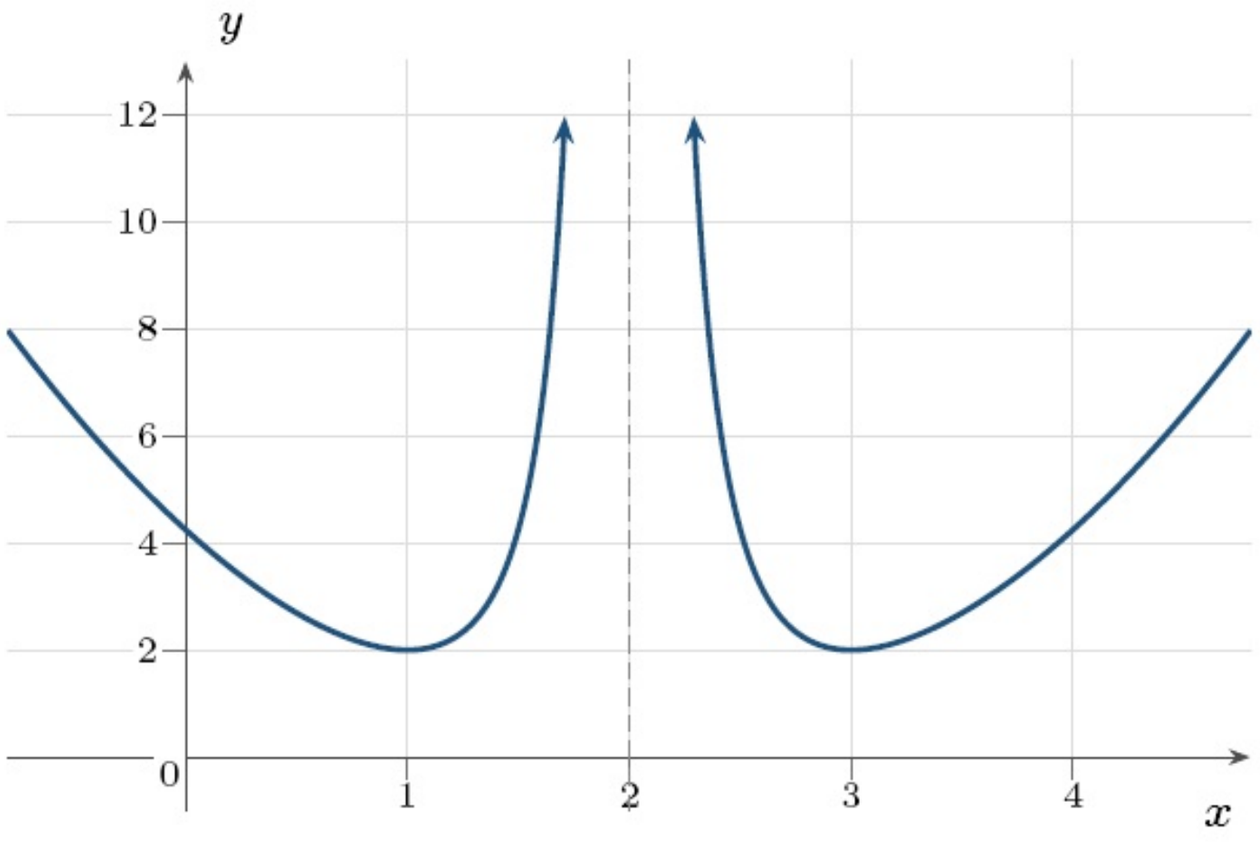
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = \ldots 2 \ldots$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f_3(x) = \ldots -\infty \ldots$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f_3(x) = \ldots +\infty \ldots$

Courbe 4

$\mathcal{C}_{f_4}$



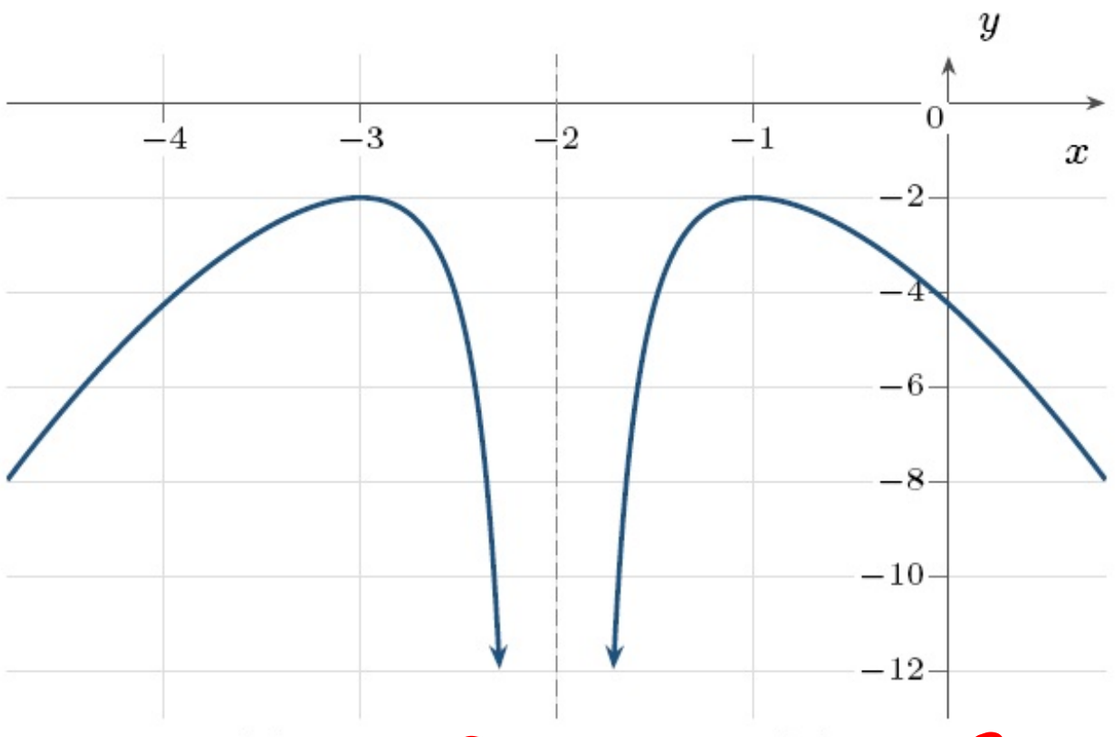
$\lim\limits_{x \to 2} f_4(x) = \ldots +\infty \ldots$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f_4(x) = \ldots +\infty \ldots$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f_4(x) = +\infty$

Courbe 5

$\mathcal{C}_{f_5}$



$\lim\limits_{x \to -2} f_5(x) = \ldots -\infty \ldots$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f_5(x) = \ldots -\infty \ldots$

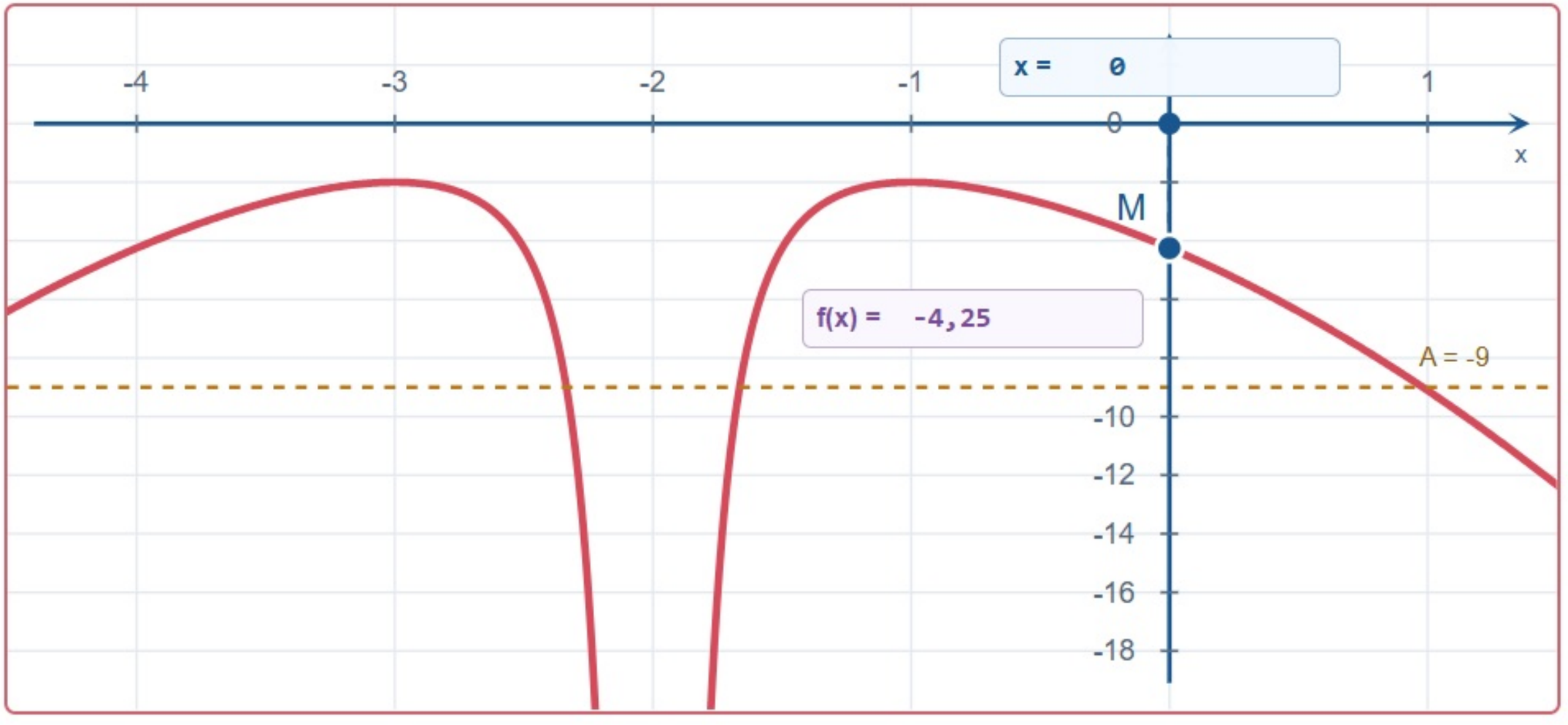
$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f_5(x) = -\infty$

Remarque (Notation)

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f_5(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} f_5(x)$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f_5(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f_5(x)$

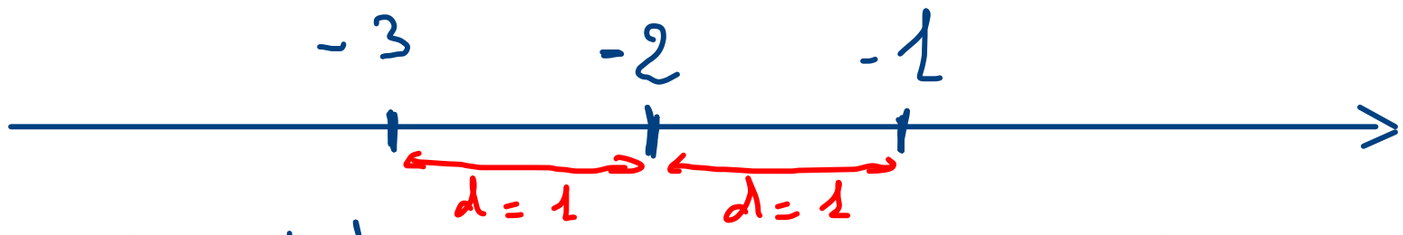
Ne pas utiliser en DS



Trouve une distance $d > 0$ telle que, **pour tout x vérifiant $0 < |x + 2| \leq d$**, on ait $f(x) \leq -9$.

Trouve une distance $d > 0$ telle que, **pour tout x vérifiant $0 < |x + 2| \leq d$**, on ait $f(x) \leq -9$.

$|x - a|$



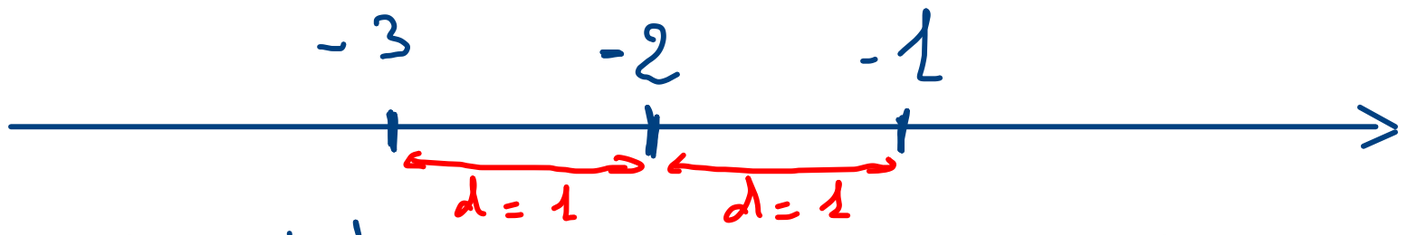
$|x+2|$ c'est à dire $|x - (-2)|$

est la distance entre x et -2

Par exemple $|x-(-2)| \leq 1 \iff -3 \leq x \leq -1$

Trouve une distance $d > 0$ telle que, **pour tout x vérifiant $0 < |x + 2| \leq d$**, on ait $f(x) \leq -9$.

$|x - a|$



$|x+2|$ c'est à dire $|x - (-2)|$

est la distance entre x et -2

Par exemple $|x-(-2)| \leq 1 \iff -3 \leq x \leq -1$

1 Limite d'une fonction en l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[b ; +\infty]$ (b pouvant ne pas être compris et pouvant être $-\infty$).

Définition Limite infinie

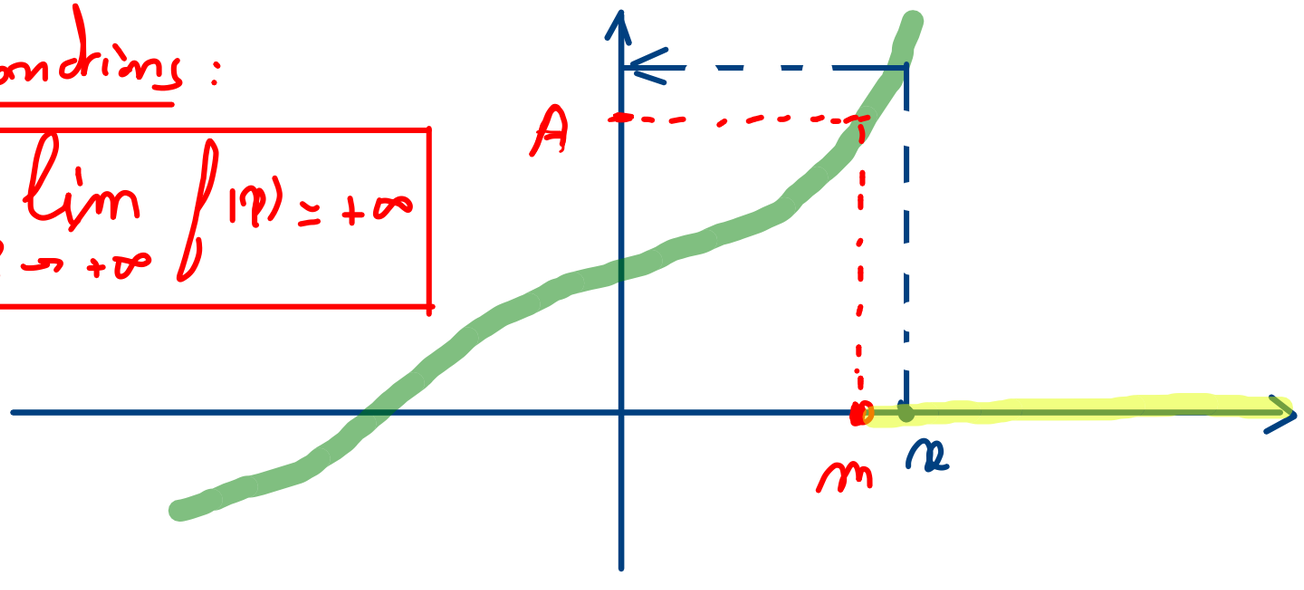
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand.

C'est-à-dire que pour tout réel A il existe un réel m tel que si $x > m$ alors $f(x) > A$.

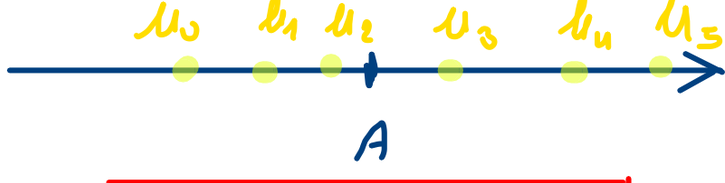
$n_0 = m$

Fonctions :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Suites :



$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

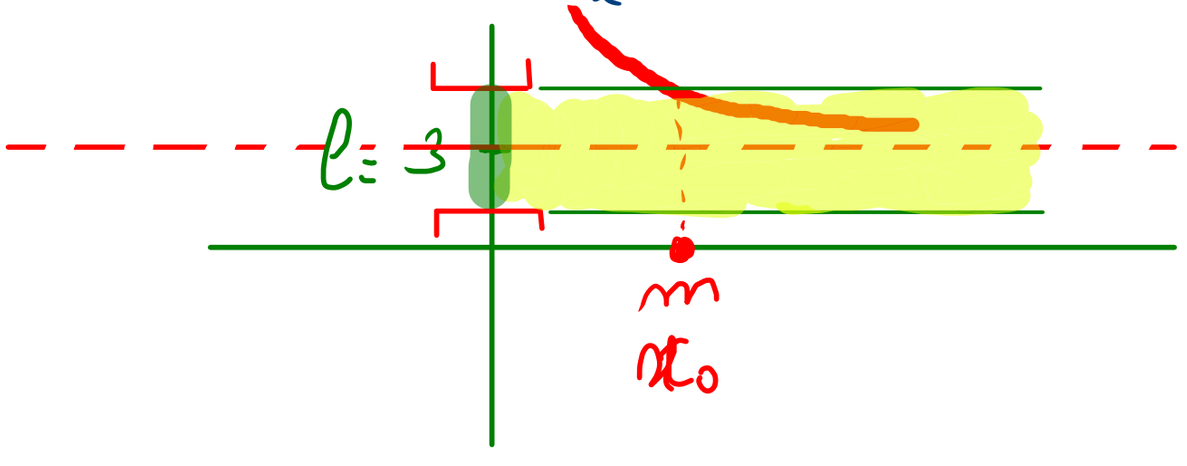
Définitions avec des intervalles

Intervalle ouvert $]a ; b[$

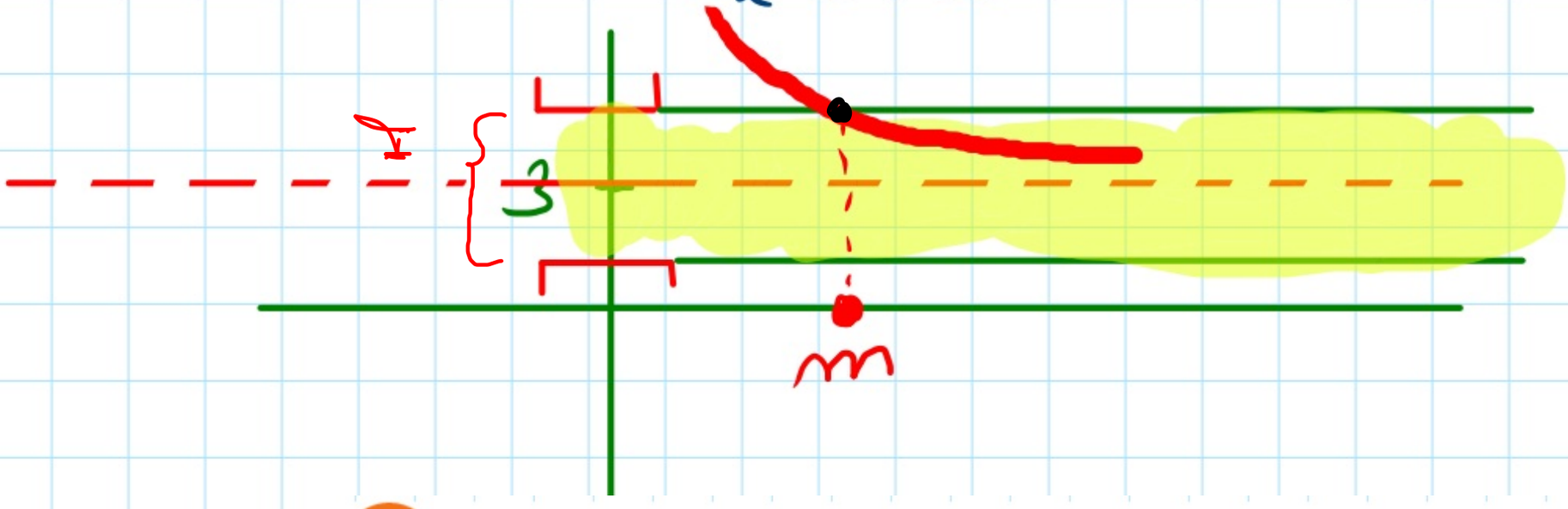
Définition Limite finie en l'infini

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ, quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, lorsque tout intervalle ouvert I contenant ℓ, contient $f(x)$ pour x assez grand. C'est-à-dire que pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un réel m tel que si $x > m$ alors $f(x) \in I$.

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$



Exemple : $\lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$ (ℓ)



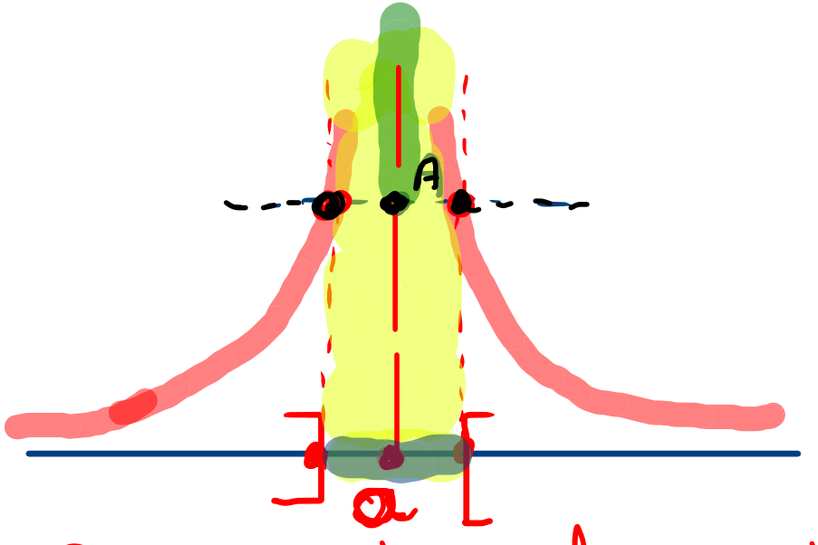
2 Limite d'une fonction en une valeur réelle

On note $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f

Définition **Limite infinie**

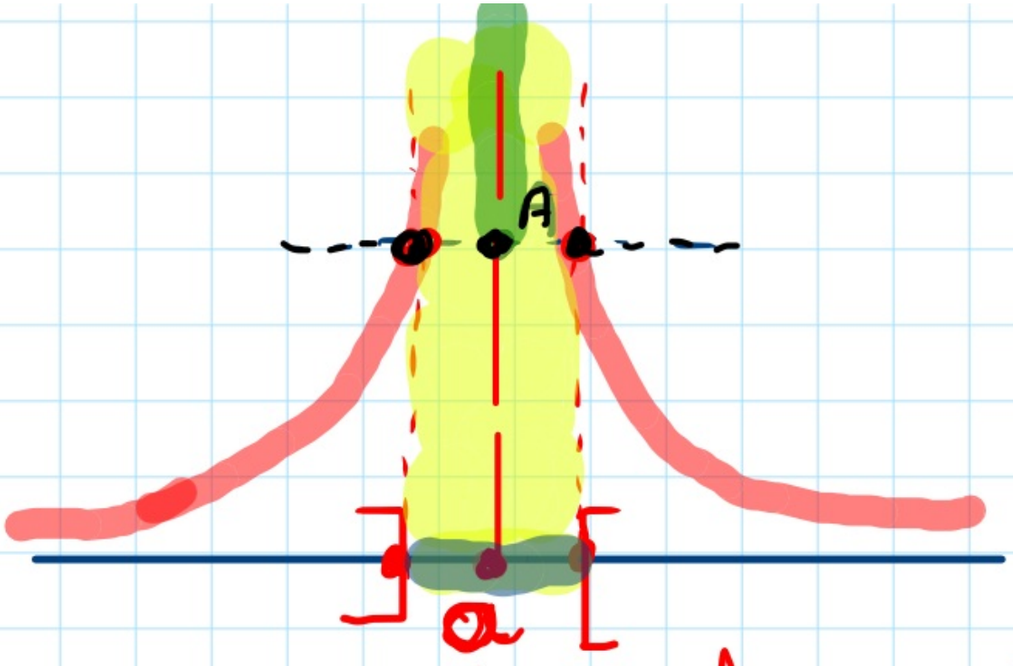
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x suffisamment proche de a dans $\mathcal{D}$. C'est-à-dire que pour tout réel A il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que si $x \in \mathcal{D} \cap I$ alors $f(x) > A$.

$]A ; +\infty[$



$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Dans cet intervalle ouvert, les points de la courbe sont au-dessus de A.



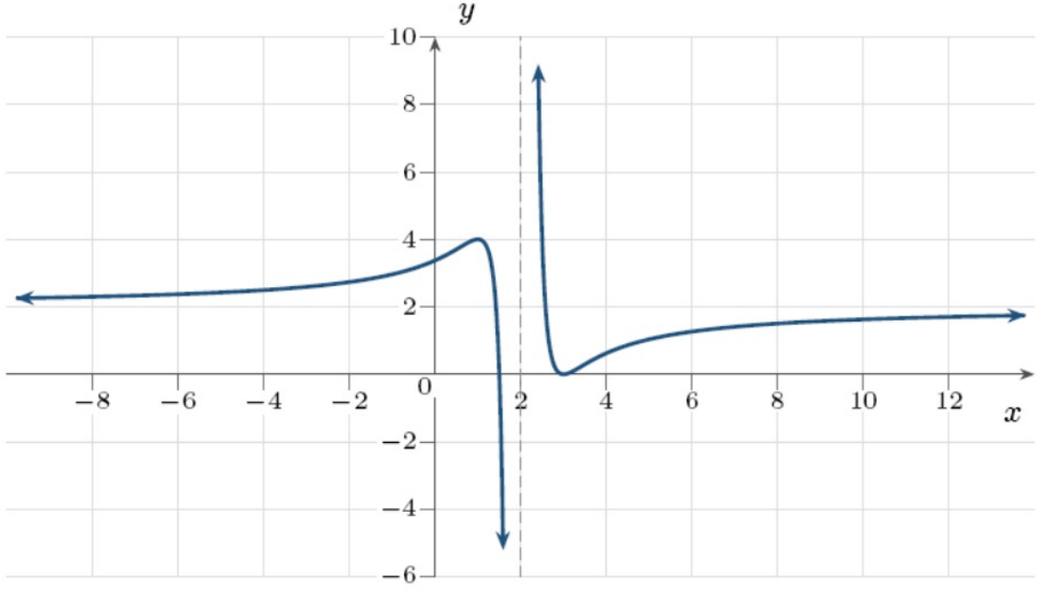
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

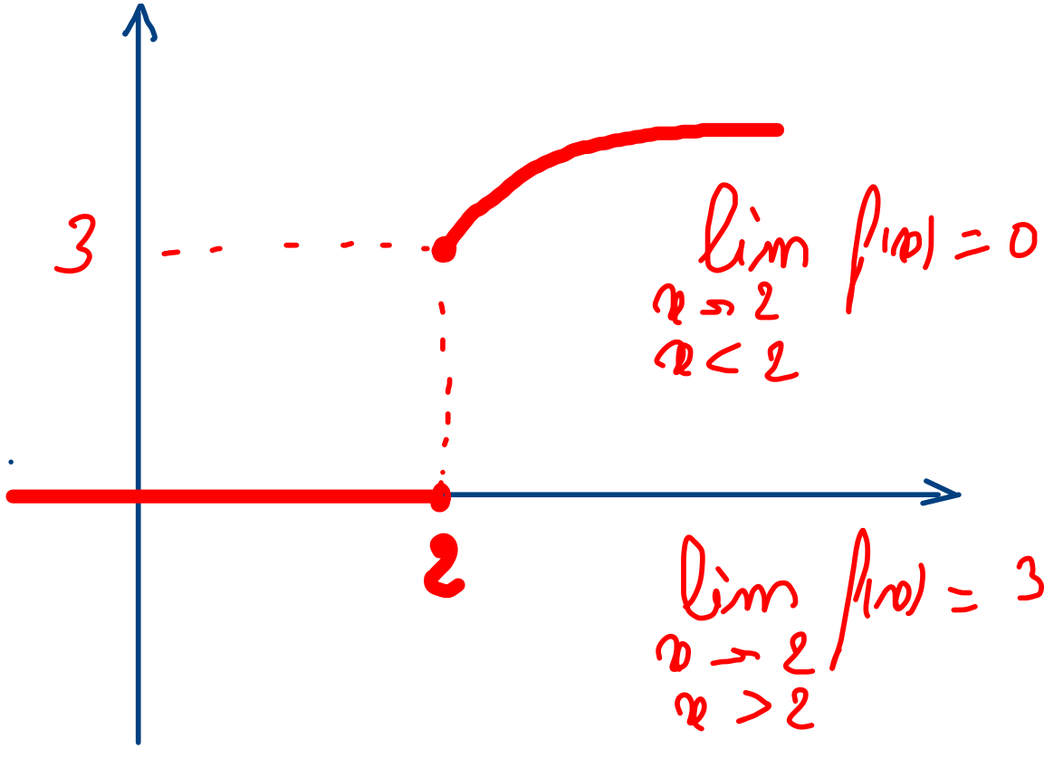
Dans cet intervalle ouvert, les points de la courbe sont au-dessus de A.

Définition Limite finie ou infinie à gauche ou à droite

- On dit que f admet une **limite à gauche** de a et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x < a$.
- On dit que f admet une **limite à droite** de a et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x > a$.

Courbe 3

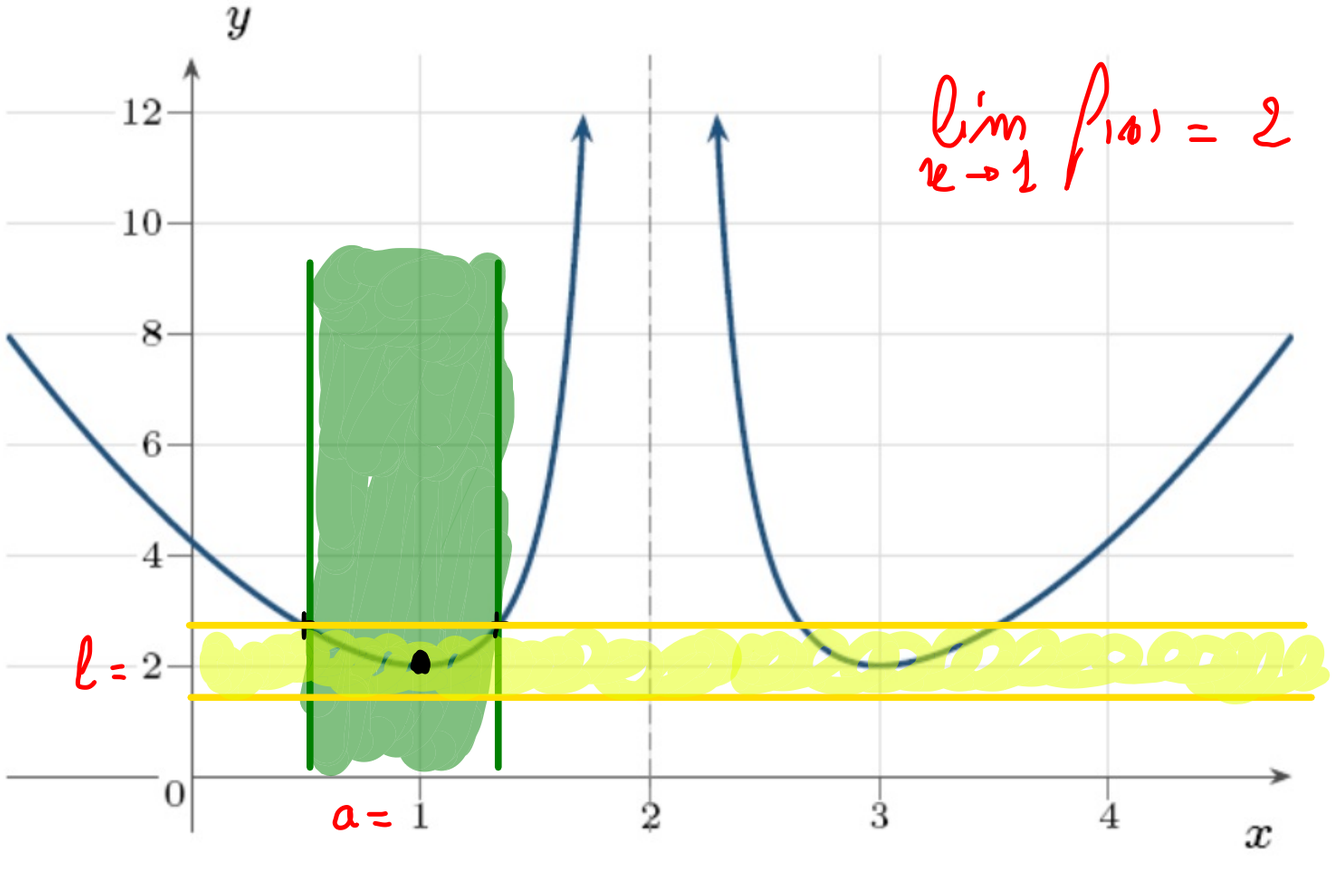




Définition Limite finie

Une fonction f admet une limite ℓ quand x tend vers un réel a lorsque $f(x)$ est aussi proche de ℓ que voulu, pourvu que x soit suffisamment proche de a.

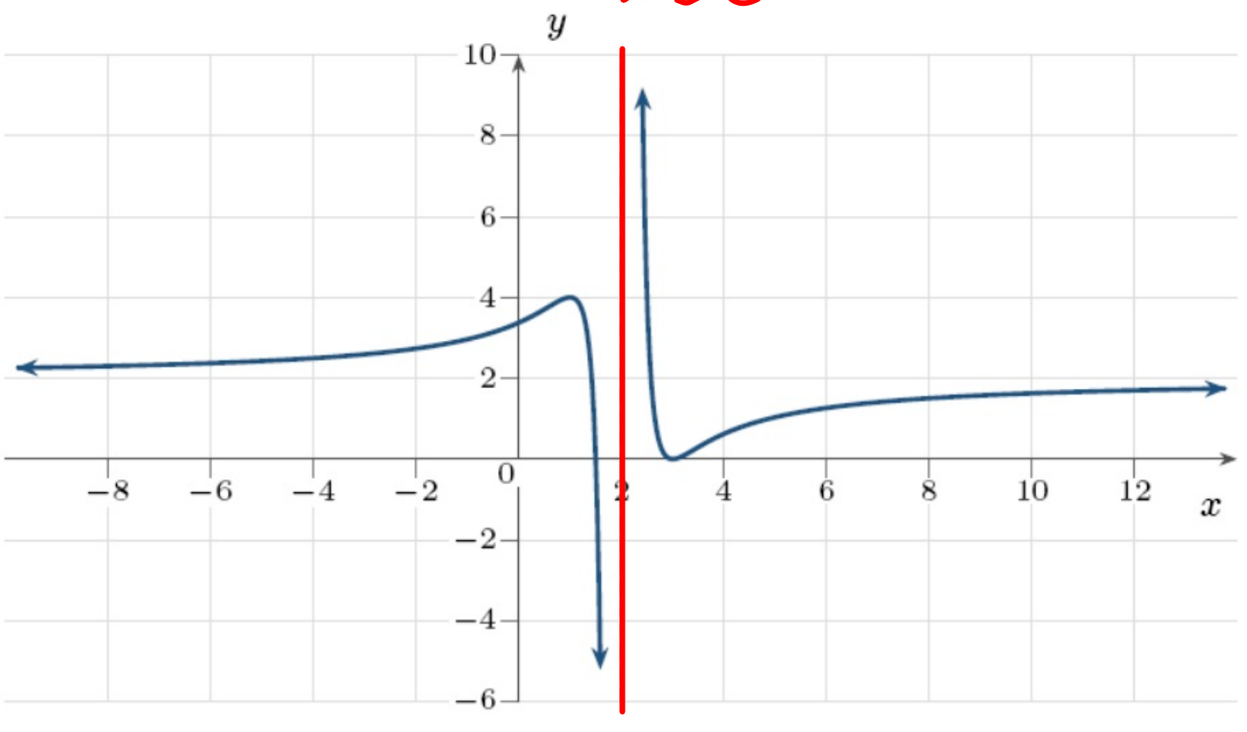
Courbe 4 $\mathcal{C}_{f_4}$



Définition Asymptote verticale

Si la limite à gauche ou/et à droite de $f(x)$ quand x tend vers a est infinie alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f.

Courbe 3



Exemple

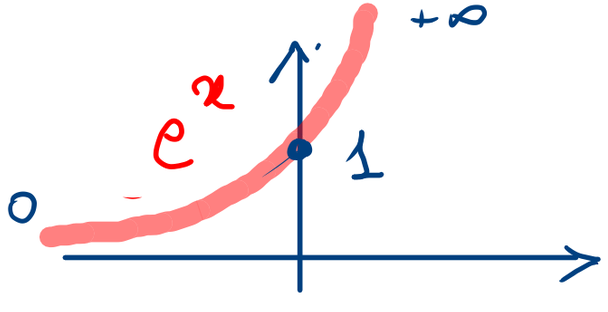
Pour la courbe 3, la droite d'équation $x = 2$ est asymptote

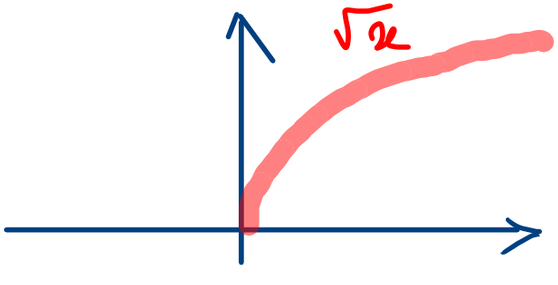
3 Limite des fonctions de référence

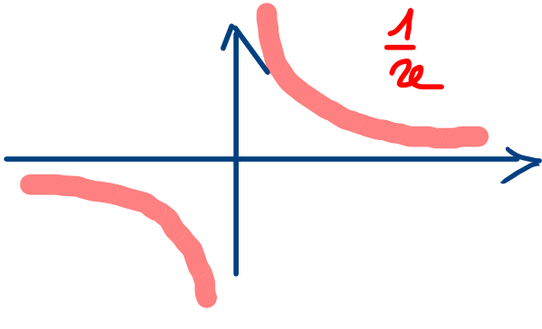
Propriétés Limite des fonctions de référence

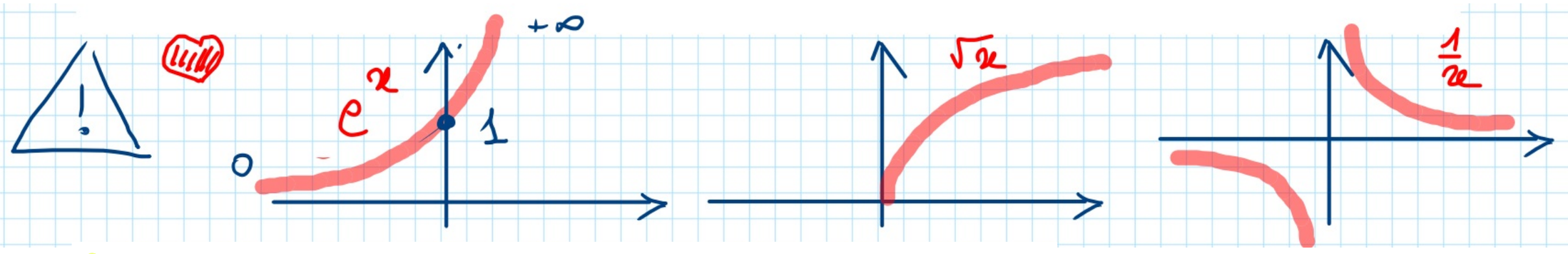
Fonction inverse	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$	• $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$	• $\lim\limits_{\substack{x<0\\x\to0}} \frac{1}{x} = -\infty$	• $\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to0}} \frac{1}{x} = +\infty$
Fonction puissance	• Pour tout entier naturel n : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$	• Si n est pair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$	• Si n est impair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$	
Fonction exponentielle	• $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	• $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$	• $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$	• $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$
Fonction racine carrée et racine carrée inverse	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$	• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x} = 0$	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$











4 Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions, on note α une valeur réelle a ou a^+ ou a^- ou $-\infty$ ou $+\infty$.

Propriété Limites d'une somme et d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$	$\ell\times\ell'$
$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ Règle des signes
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$

Propriété Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	$\ell'\neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$\pm\infty$	0
ℓ	0	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$ Règle des signes
0	0	indéterminée
$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée

On retiendra les quatre formes indéterminées:

$(+\infty) + (-\infty)$ $(+\infty) - (+\infty)$ ...	$\frac{0}{0}$
$0 \times (\pm\infty)$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Exercice 1

Compléter le plus rapidement possible les limites suivantes, (l'infini $+\infty$ ou $-\infty$ se noterons respectivement "+inf" et "-inf":

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 9x^4 - \frac{8}{x^6} =$ + ∞

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{56}{\frac{2}{x} - 7} =$ - 8

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} -7x + \frac{9}{x} =$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x^3} =$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} - 4 =$

$$\frac{56}{-7} = -8$$

Exercice 2

Compléter le plus rapidement possible les limites suivantes, (l'infini $+\infty$ ou $-\infty$ se noterons "+inf" ou "-inf":

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 9x - \frac{4}{x} =$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-9}{-3x + \frac{1}{x}} =$ 0 $\quad \frac{-9}{\infty}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{64 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x} - 8} =$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{9}{\sqrt{x}} - 8 =$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} - 7 =$

LIMITES_FCT_REFERENCE_INFINI1
LIMITES_FCT_REFERENCE_INFINI2

Propriétés Limite des fonctions de référence

Fonction inverse	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$	• $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$	• $\lim\limits_{\substack{x<0\\x\to0}} \frac{1}{x} = -\infty$	• $\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to0}} \frac{1}{x} = +\infty$
Fonction puissance	• Pour tout entier naturel n : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$	• Si n est pair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$	• Si n est impair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$	
Fonction exponentielle	• $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	• $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$	• $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$	• $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$
Fonction racine carrée et racine carrée inverse	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$	• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x} = 0$	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Propriété Limites d'une somme et d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$	$\ell\times\ell'$
$\ell\neq0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ Règle des signes
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$

Propriété Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	$\ell'\neq0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$\pm\infty$	0
ℓ	0	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\ell'\neq0$	$\pm\infty$ Règle des signes
0	0	indéterminée
$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée

Exercices

$(+\infty)+(-\infty)$	$\frac{0}{0}$
$0\times(\pm\infty)$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$\frac{3}{0^-}=-\infty$

$\frac{-2}{0^+}=-\infty$

$\frac{+\infty}{0^-}=-\infty$

1) $\frac{-\infty}{0^+}=$ $-\infty$ ✓

2) $\frac{+\infty}{0^-}=$ $+\infty$ ✓

3) $\frac{+\infty}{+\infty}=$ FI ✓

4) $(-\infty)+(+\infty)=$ FI ✓

5) $\frac{2}{+\infty}=$ 0 ✓

6) $\frac{-\infty}{0^-}=$ ✓

7) $-2+(-\infty)=$ ✓

8) $\frac{-\infty}{-\infty}=$ ✓

9) $\frac{-5}{+\infty}=$ ✓

10) $\frac{-\infty}{0^+}=$ ✓

$\frac{10}{0,1}$ $\frac{100}{0,01}$

1) $\frac{-9}{0^-} =$ +∞

2) $5 \times (-\infty) =$ -∞

3) $\frac{+\infty}{0^+} =$ +∞

4) $-2 \times (-\infty) =$ +∞

5) $4 + (+\infty) =$ +∞

6) $-6 \times (+\infty) =$ -∞

7) $(-\infty) \times (-\infty) =$ +∞

8) $\frac{-\infty}{+\infty} =$ FI

9) $(+\infty) \times (+\infty) =$ +∞

10) $-4 + (+\infty) =$ +∞

FONCTIONS_LIMITES_CALC_RAPIDE0a.html
FONCTIONS_LIMITES_CALC_RAPIDE0b.html
FONCTIONS_LIMITES_CALC_RAPIDE0c.html

Dans les exercices suivant, donner les limites des opérations proposées.
On notera "inf" pour l'infini et "FI" pour forme indéterminée.

1) $(-\infty)+(+\infty)=$ FI

2) $\frac{-8}{0^-}=$ +inf

3) $\frac{0^+}{0^+}=$ FI

4) $-4\times(-\infty)=$ +inf

5) $\frac{-\infty}{+\infty}=$ FI

6) $\frac{0^-}{0^-}=$ FI

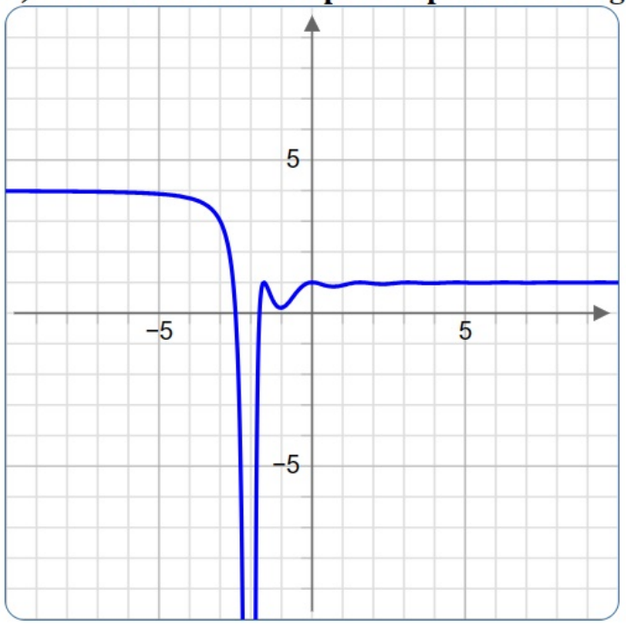
7) $-7+(+\infty)=$ +inf

8) $\frac{+\infty}{0^-}=$ -inf

9) $\frac{1}{+\infty}=$ 0

10) $\frac{+\infty}{-\infty}=$ FI

1) La fonction f admet pour représentation graphique la courbe suivante:



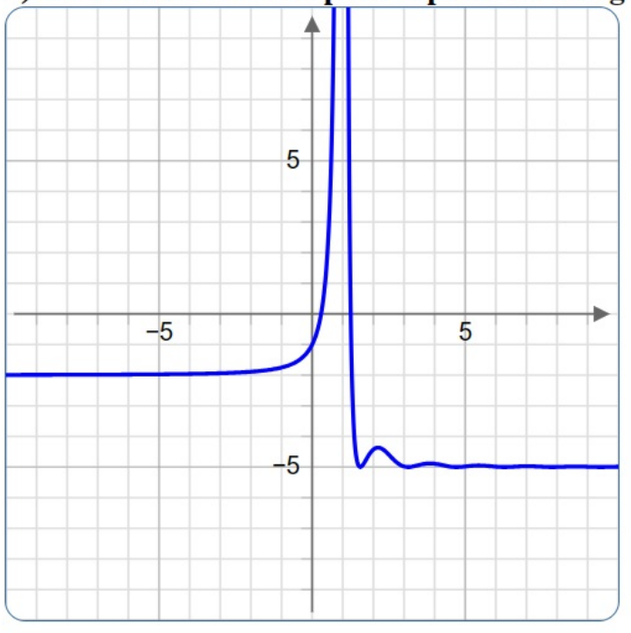
Compléter par conjecture les limites suivantes:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ☐ ?

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ ☐ ?

$\lim\limits_{x\to-2} f(x) =$ ☐ ?

2) La fonction f admet pour représentation graphique la courbe suivante:



Compléter par conjecture les limites suivantes:

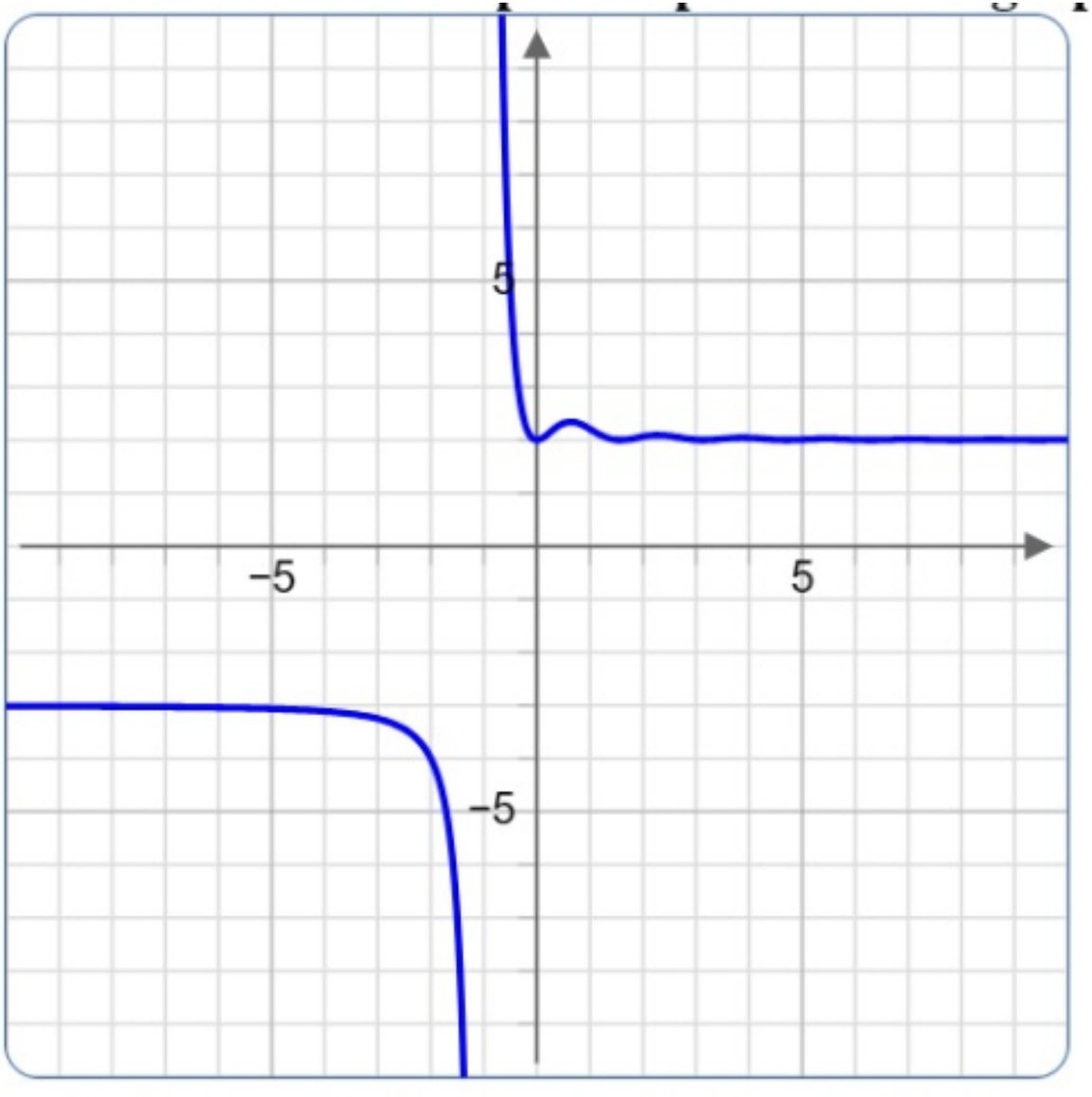
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ☐ ?

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ ☐ ?

$\lim\limits_{x\to1} f(x) =$ ☐ ?

LIMITES_COURBES1
LIMITES_COURBES2

Exercice



Compléter par conjecture les limites suivantes:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ 2

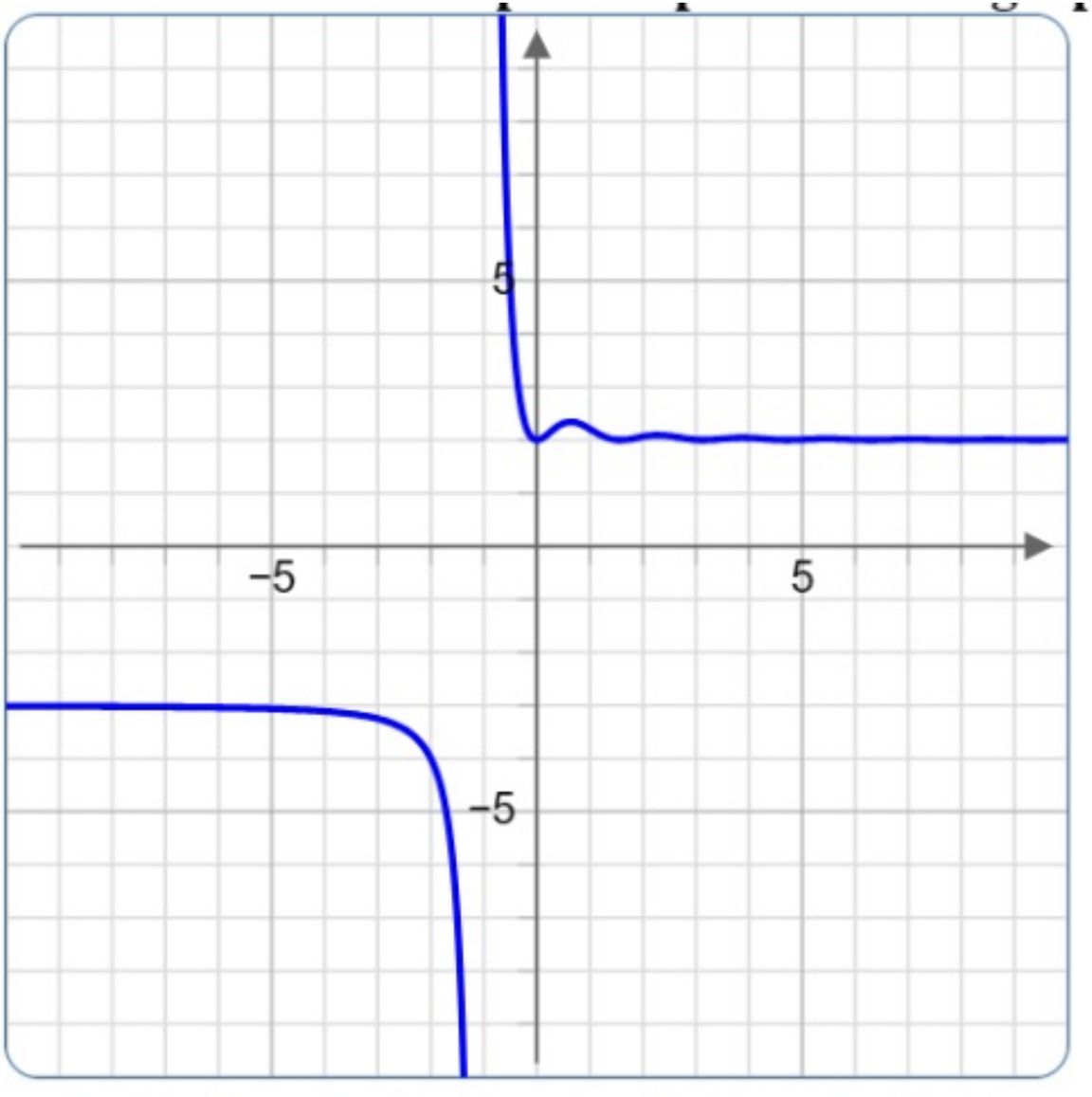
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) =$ $+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) =$ $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ -3

LIMITES_COURBES3
LIMITES_COURBES4
LIMITES_COURBES5
LIMITES_COURBES6

Exercice



Compléter par conjecture les limites suivantes:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ 2

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) =$ $+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) =$ $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ -3

LIMITES_COURBES3

LIMITES_COURBES4
LIMITES_COURBES5
LIMITES_COURBES6

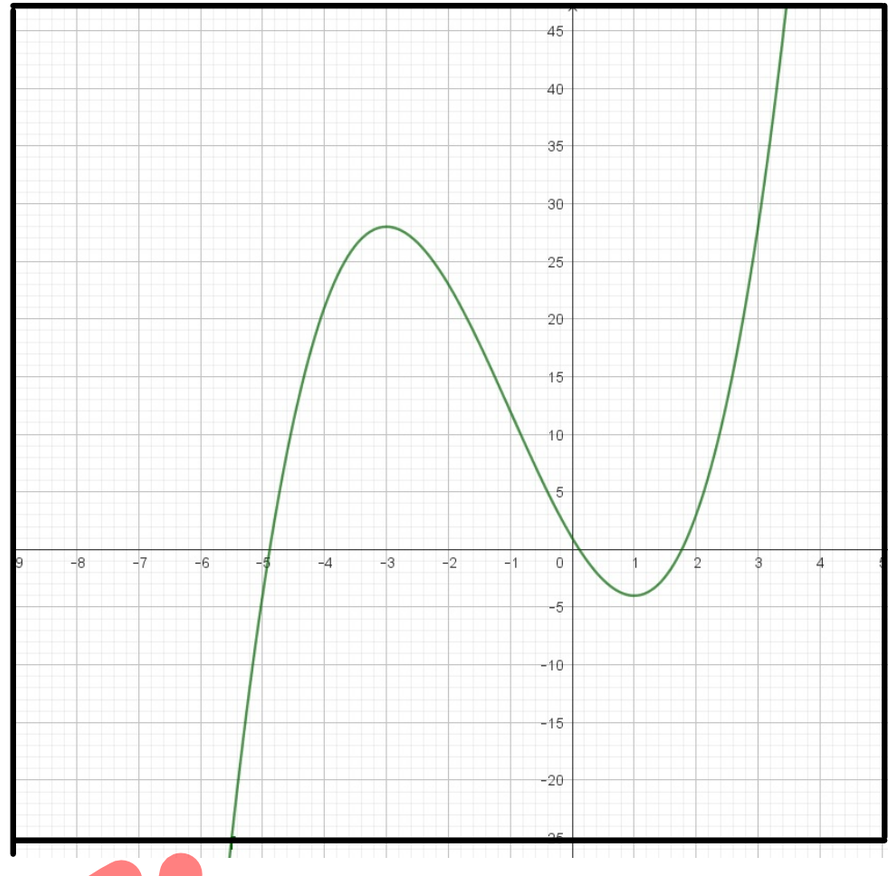


Rédiger un calcul de limites

Exercice 1:

$f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ ?$$



Preuve:

① On a une F.I. "$(+\infty)+(-\infty)$"

$f(x) = \underbrace{x^3 + 3x^2}_{(+\infty)} + (-9x+1)$

"$(+\infty) + (-\infty)$"

② Levée de l'indétermination

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 1 = x^3\left(1 + \frac{3x^2}{x^3} - \frac{9x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= x^3\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{x \times x \times 1}{x \times x \times x} = \frac{1}{x}$$

Preuve:

① On a une F.I. "$(+\infty)+(-\infty)$"

$$f(x) = \underbrace{x^3 + 3x^2}_{\text{"}(+\infty)} + \underbrace{(-9x+1)}_{(-\infty)\text{"}}$$

② Levée de l'indétermination

$$x^3+3x^2-9x+1 = x^3\left(1+\frac{3x^2}{x^3}-\frac{9x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+3x^2-9x+1)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^3\times\left(1+\frac{3}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

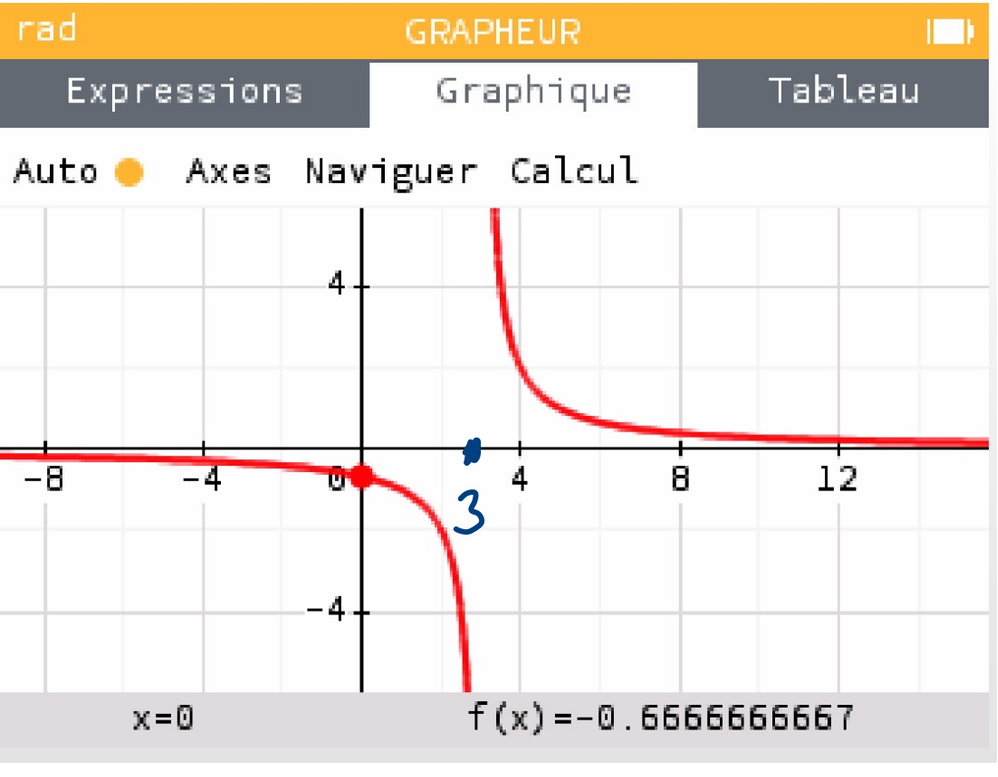
$$= \text{"}(+\infty)\times(1+0-0+0)\text{"}$$

$$= +\infty$$

Par théorèmes d'opérations.

Exercice 2:

$f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$



① Conjecture : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \left(\dfrac{2}{x-3}\right) = +\infty$

② Preuve :

① Conjecture : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \left(\dfrac{2}{x-3}\right) = +\infty$

(Calculs à la main ou dessin de courbe)

② Preuve : Signe de $x - 3$

Comme $x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0$

(on ajoute -3 des deux côtés)

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{2}{x-3} = \text{“}\dfrac{2}{0^+}\text{”} = +\infty$

③ $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \dfrac{2}{x-3} = \text{“}\dfrac{2}{0^-}\text{”} = -\infty$

Car $x < 3 \Leftrightarrow x - 3 < 0$

“$\dfrac{2}{3-3}$” = “$\dfrac{2}{0^{+ \text{ ou } -}}$” ($> 0$ ou < 0)

$= \begin{cases} +\infty \\ \text{ou} \\ -\infty \end{cases}$

$\dfrac{2}{-0{,}1} = -20$	$\dfrac{2}{0{,}1} = 20$
$\dfrac{2}{-0{,}01} = -200$	$\dfrac{2}{0{,}01} = 200$
$\dfrac{2}{-0{,}001} = -2000$	$\dfrac{2}{0{,}001} = 2000$
$-\infty$	$+\infty$

③ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{2}{x-3} = \text{“}\dfrac{2}{0^-}\text{”} = -\infty$

Car $x<3 \Leftrightarrow x-3<0$



$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{-5}{x-3} = \text{“}\dfrac{-5}{0^-}\text{”} = +\infty$

$\dfrac{2}{-0,1} = -20 \qquad \dfrac{2}{0,1} = 20$

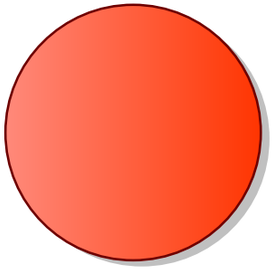
$\dfrac{2}{-0,01} = -200 \qquad \dfrac{2}{0,01} = 200$

$\dfrac{2}{-0,001} = -2000 \qquad \dfrac{2}{0,001} = 2000$

$$\frac{2}{-0,1} = -20 \qquad \frac{2}{0,1} = 20$$

$$\frac{2}{-0,01} = -200 \qquad \frac{2}{0,01} = 200$$

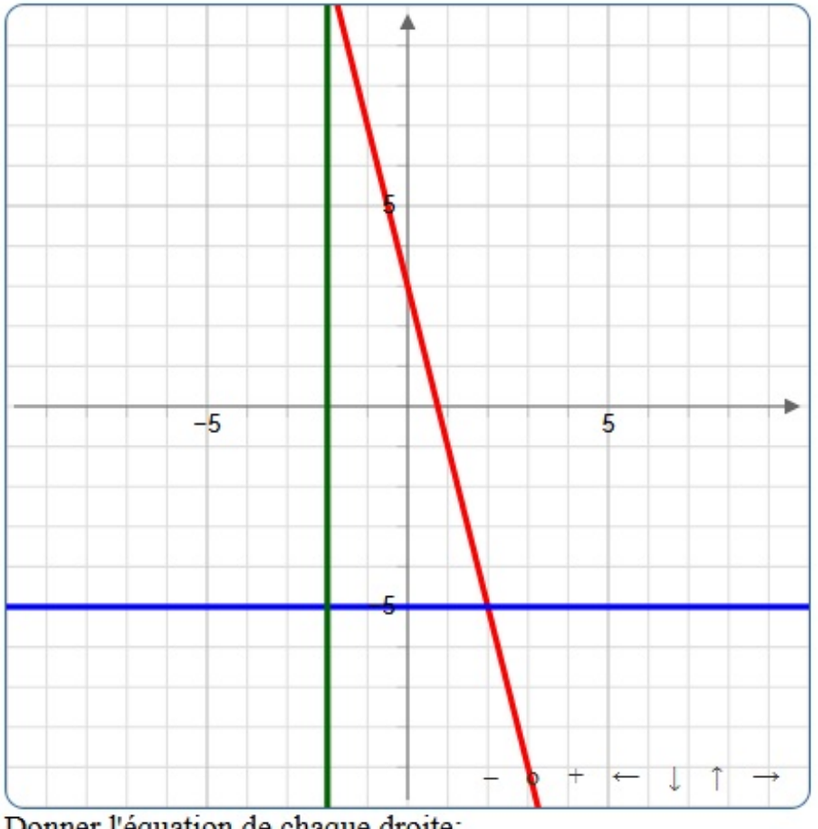
$$\frac{2}{-0,001} = -2000 \qquad \frac{2}{0,001} = 2000$$



A voir rentrée octobre:
asymptote oblique et horizontal
th comparaisons, ...

Les différents types d'équation de droite

(Rappels de secondes)



Donner l'équation de chaque droite:

Droite rouge: Sou

Droite bleue: Sou

Droite verte: Sou

Il existe 3 types d'équation de droite

$y = c$, droite BLEUE : $y = -5$

$x = d$, droite VERTE : $x = -2$

$y = ax + b$, droite rouge : $y = -4x + 3$

-4 : coefficient directeur

3 : ordonnée à l'origine.

EQ_DROITES_TYPES0
EQ_DROITES_TYPES0a

Définition **Asymptote verticale**

Si la limite de $f(x)$, à gauche ou à droite de a, est égale à $+\infty$ ou à $-\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

Définition **Asymptote horizontale**

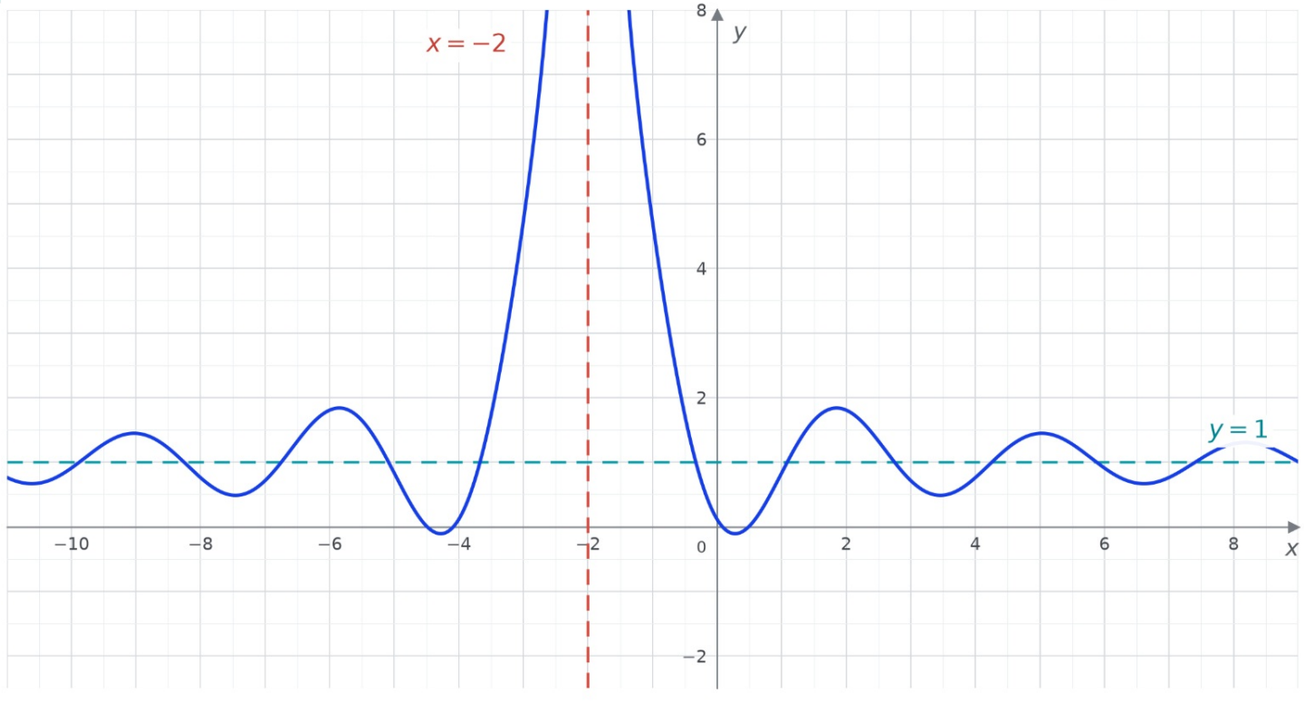
Si $f(x)$ tend vers un nombre réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Asymptotes

$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$

$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$

$x = -2$ est asymptote verticale

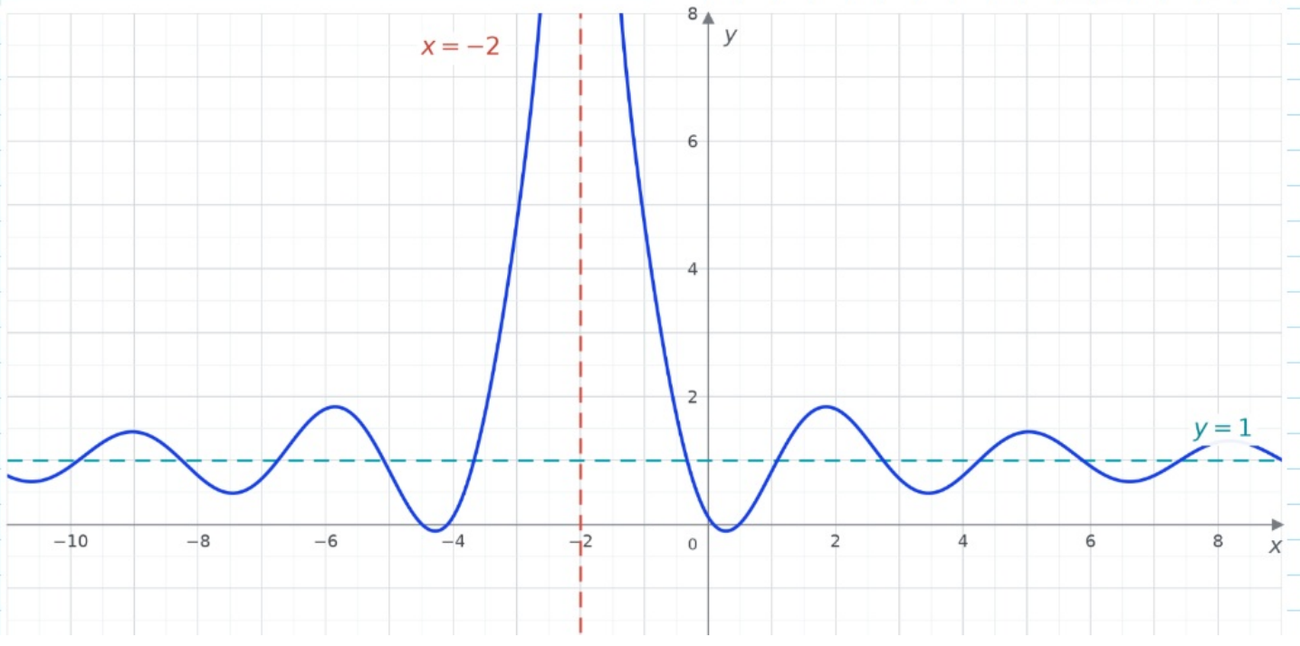


Asymptotes

$\lim_{x \to -2,\ x > -2} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -2,\ x < -2} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow x = -2$ est asymptote verticale

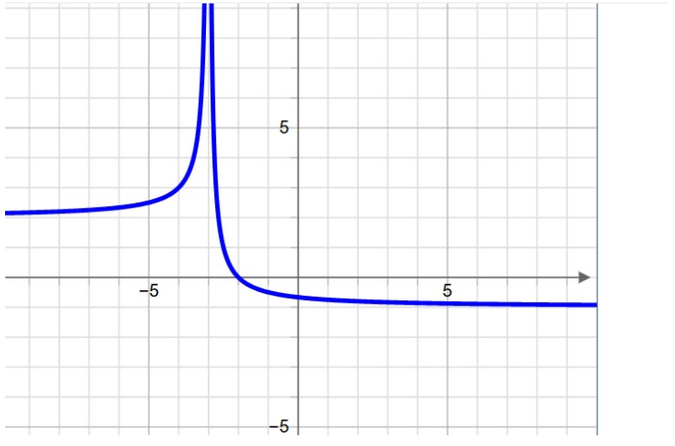


$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

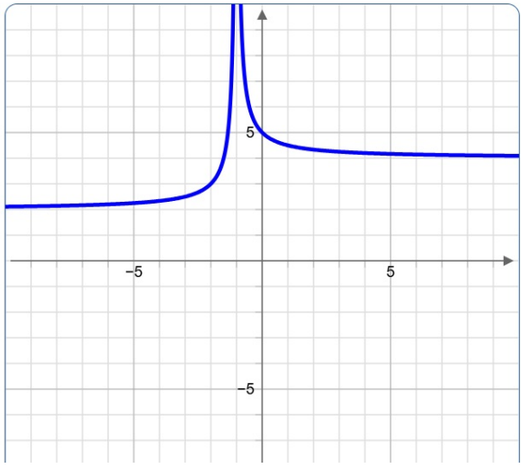
$\Rightarrow y = 1$ est asymptote horizontale

Exercice 1



LIMITES_ASYMPTOTES1
LIMITES_ASYMPTOTES2
LIMITES_ASYMPTOTES3
LIMITES_ASYMPTOTES4
LIMITES_ASYMPTOTES5

Exercice 2



LIMITES_ASYMPTOTES_TABVAR1
LIMITES_ASYMPTOTES_TABVAR1a
LIMITES_ASYMPTOTES_TABVAR2
LIMITES_ASYMPTOTES_TABVAR3
LIMITES_ASYMPTOTES_TABVAR4

Exercice 1

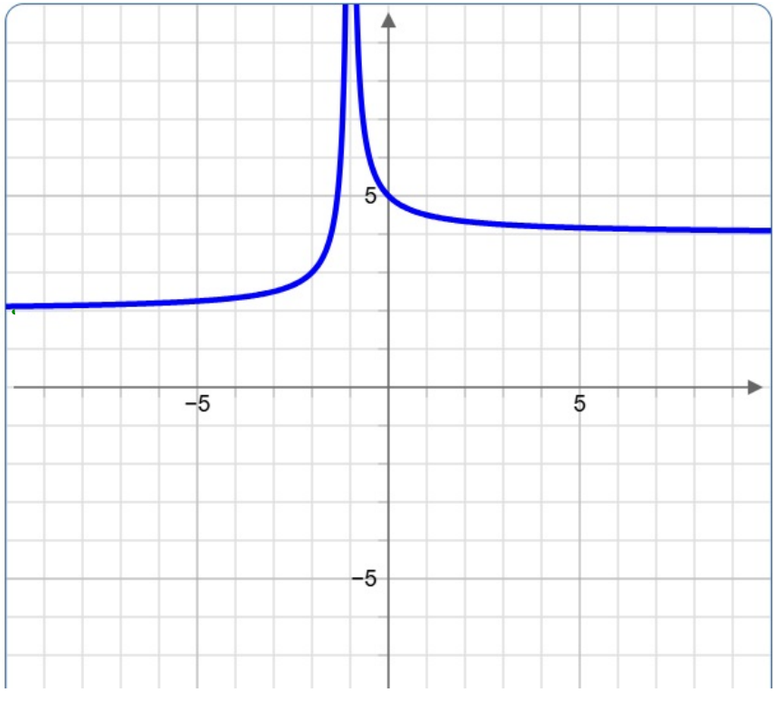
Compléter les phrases suivantes:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ 4 d'où l'asymptote $y = 4$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ 2 d'où l'asymptote $y = 2$

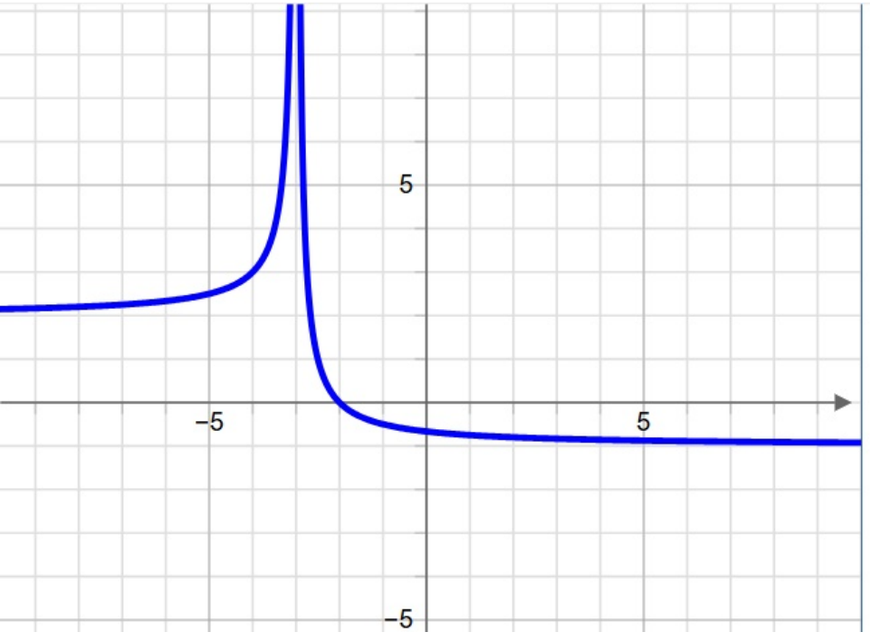
$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) =$ $+\infty$ d'où l'asymptote $x = -1$

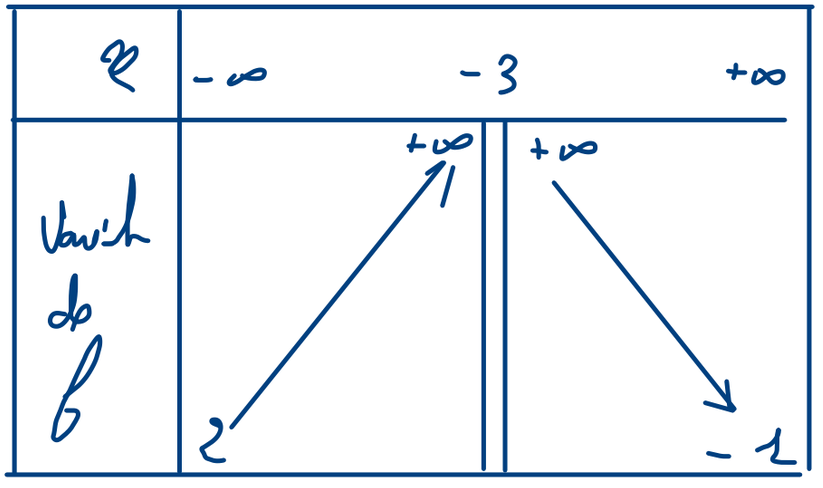
$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) =$ $+\infty$ d'où l'asymptote $x = -1$



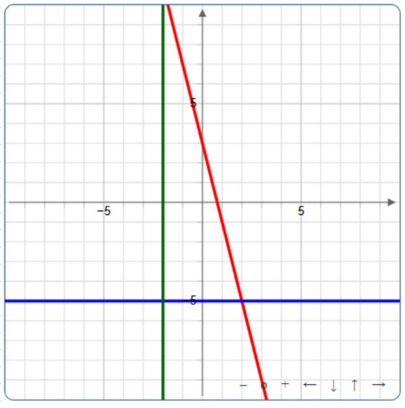
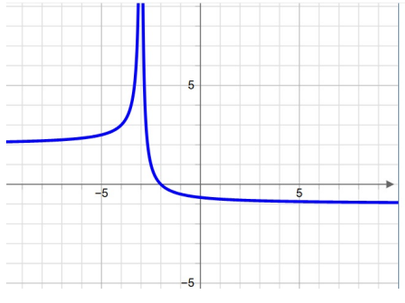
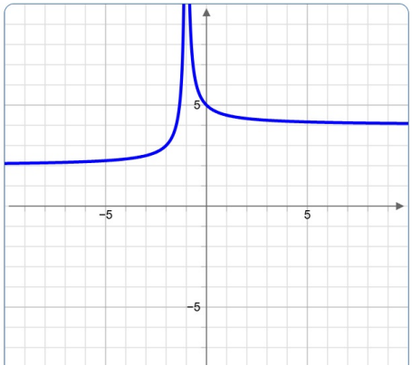
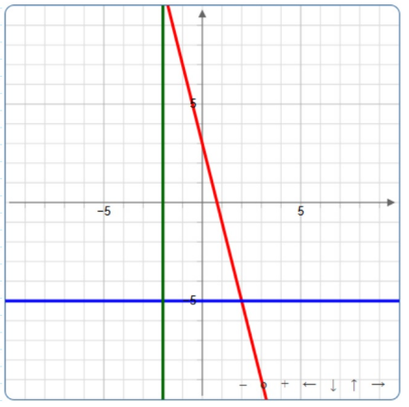
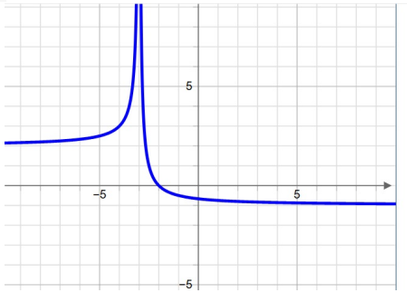
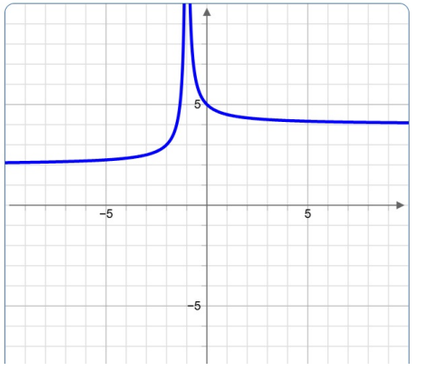
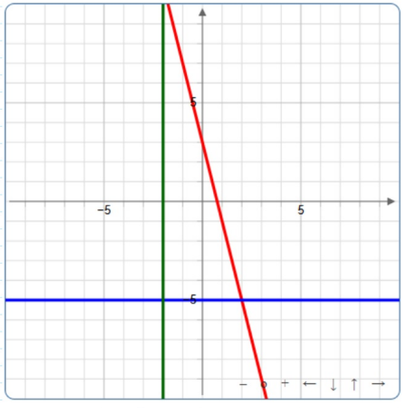
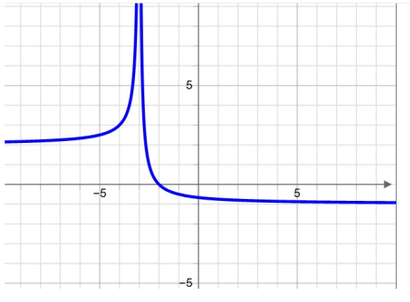
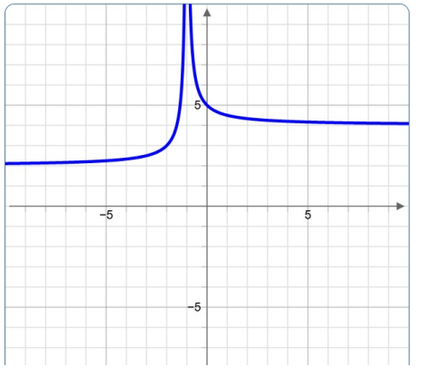
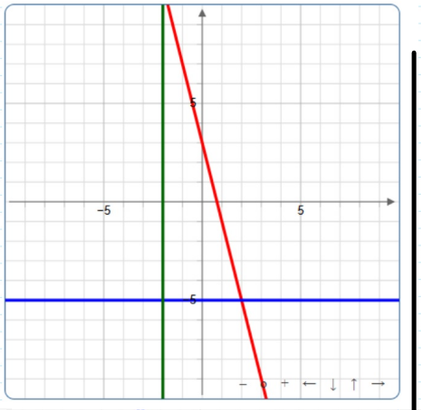
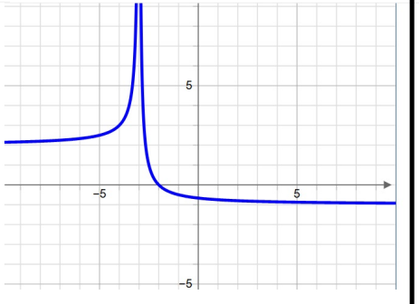
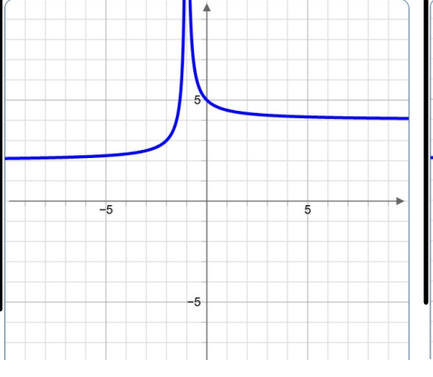
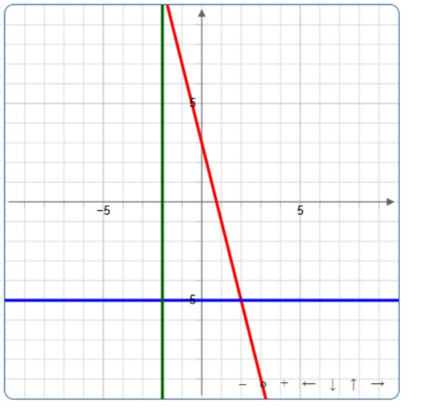
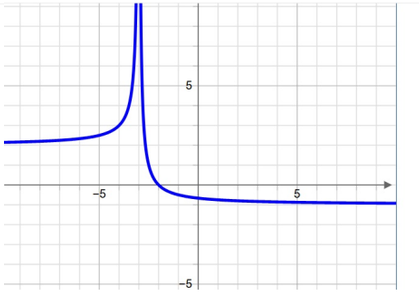
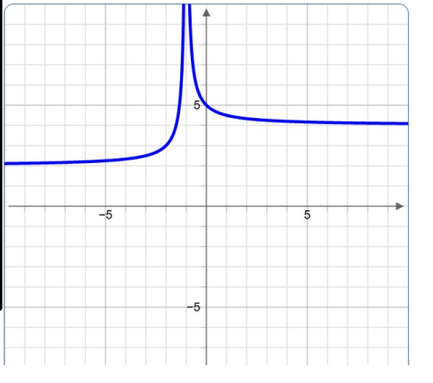
LIMITES_ASYMPTOTES1
LIMITES_ASYMPTOTES2
LIMITES_ASYMPTOTES3
LIMITES_ASYMPTOTES4
LIMITES_ASYMPTOTES5

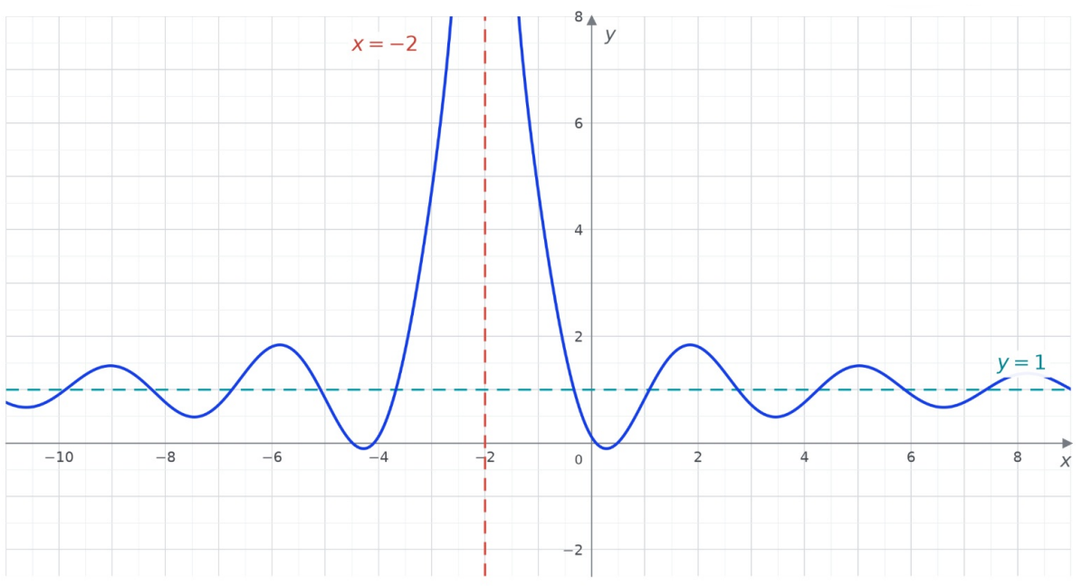
Exercice 2

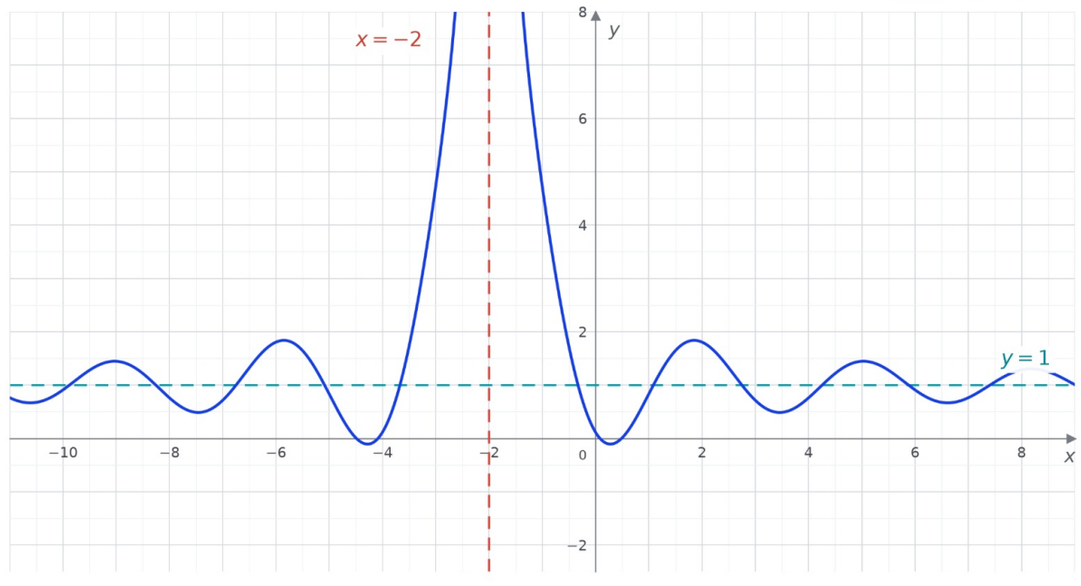


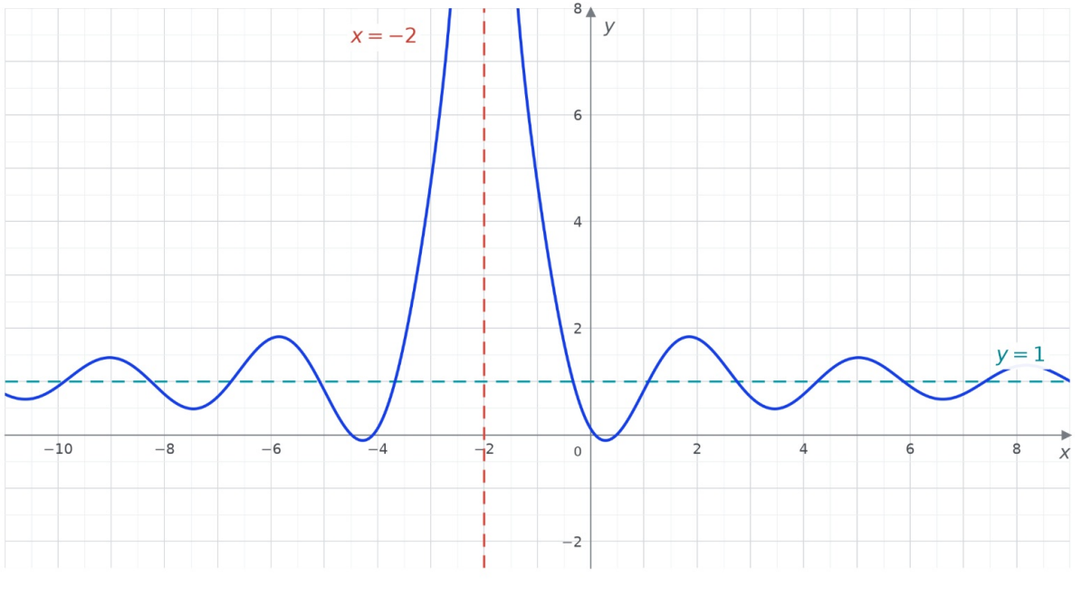


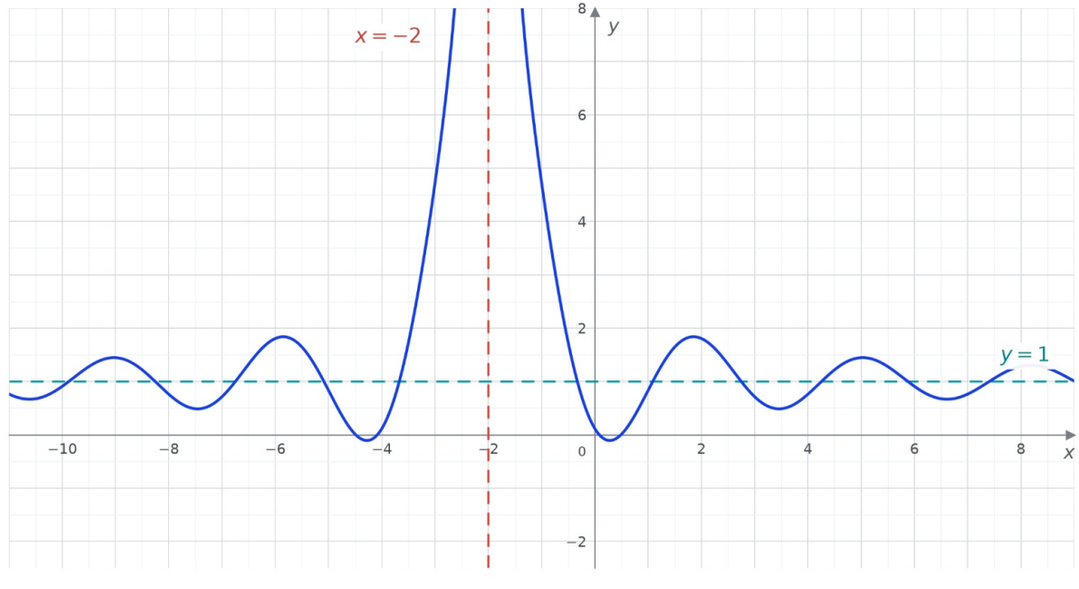
LIMITES_ASYMPTOTES_TABVAR1
LIMITES_ASYMPTOTES_TABVAR1a
LIMITES_ASYMPTOTES_TABVAR2
LIMITES_ASYMPTOTES_TABVAR3
LIMITES_ASYMPTOTES_TABVAR4


x = −2
y = 1
x
y


x = −2
y = 1
x
y


x = −2
y = 1
x
y


x = −2
y = 1
x
y

5 Théorème de comparaison

On note α une valeur de I ou une borne (finie ou infinie) de I.

Théorème **Théorème de comparaison**

On considère deux fonctions *f* et *g*.

- **Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ et s'il existe un réel *A* tel que, pour $x \geqslant A$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$.**
- **Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$ et s'il existe un réel *A* tel que, pour $x \geqslant A$, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$.**

Ex : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x) = ?$

Méthode 1 | Méthode 2

Ex : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x) = ?$ $(+\infty) - (+\infty)$, on a une F.I

Méthode 1

$x^2 - x = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

$\lim (x^2 - x) = \text{"}(+\infty) \times (1 - 0)\text{"} = +\infty$

Méthode 2

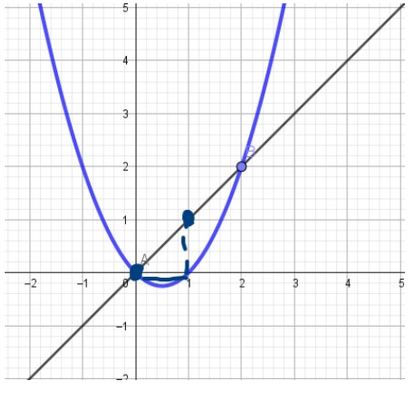
$q \,;\, q^2 \ldots$

si $x \geq 2$

$x^2 - x \geq x$ (à prouver)

or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x = +\infty$



$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$

$\frac{e^x}{x^n}$ $\quad \frac{+\infty}{+\infty}$

Corollaire Croissance comparée

Pour tout entier naturel n, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Ex : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$

Une transformation est nécessaire

$$x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}}$$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\frac{b}{a}}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ (Croissance comparée)

Ex : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$

Une transformation est nécessaire

$$x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}}$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ (Croissance comparée)

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = " \frac{1}{+\infty} "$ (Th. d'opérations)

$= 0$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ (Croissance comparée)

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = \text{“}\dfrac{1}{+\infty}\text{”}$ (Th. d'opérations)

$= 0$

Théorème **Théorème d'encadrement (ou des « gendarmes »)**

Soit f, g, et h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Si, pour un réel l, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

Ex : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t}$ (Indication : Si $a > 1$, $a \leq a+1 \leq 2a$)

Comme $t \to +\infty$, on peut supposer $t > 1$

Théorème **Théorème d'encadrement (ou des « gendarmes »)**

Soit f, g, et h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que pour tout $x \in I$,
$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Si, pour un réel l, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

Ex : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t}$ (Indication : Si $a > 1$, $a \leq a+1 \leq a+2a+1$)

Comme $t \to +\infty$, on peut supposer $t > 1$

On a $0 < t^2 \leq t^2+1 \leq t^2+2t+1$

$\sqrt{t^2} \leq \sqrt{t^2+1} \leq \sqrt{t^2+2t+1}$

$t \leq \sqrt{t^2+1} \leq t+1$

$\dfrac{t}{t} \leq \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t} \leq \dfrac{t+1}{t}$

On peut prendre la racine

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

car $\sqrt{t^2} = |t| = t$

et $t^2+2t+1 = (t+1)^2$

On a $0 < t^2 \leq t^2+1 \leq t^2+2t+1$

$$\sqrt{t^2} \leq \sqrt{t^2+1} \leq \sqrt{t^2+2t+1}$$

$$t \leq \sqrt{t^2+1} \leq t+1$$

$$\frac{t}{t} \leq \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} \leq \frac{t+1}{t}$$

On peut prendre la racine

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

car $\sqrt{t^2} = |t| = t$

et $t^2+2t+1 = (t+1)^2$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\underbrace{1}_{\downarrow 1} \leq f(t) \leq \underbrace{1+\frac{1}{t}}_{\downarrow 1}$$

$\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + \frac{1}{t} = 1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} 1 = 1$, Par th. des gendarmes

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 1$$

6 Limites et fonction composée

Théorème Composition de limites

Chacune des lettres a, b et c désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$ et deux fonctions f et g.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$.

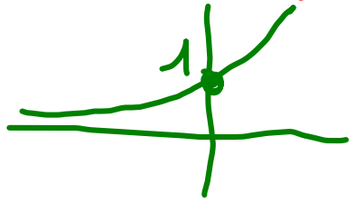
(Changement de variable X)

Ex : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} = ?$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 = "-2\times(+\infty)" = -\infty$ (Th d'opérations)

Changement de variable $X = -x^2$, $X \to -\infty$

- $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ (cours)



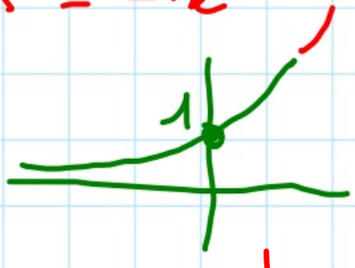
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2}$

Ex : $\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = ?$

- $\lim_{x \to -\infty} -x^2 = "-1 \times (+\infty)" = -\infty$ (Th d'opérations)

Changement de variable $X = -x^2$ $\quad X \to -\infty$

- $\lim_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ (cours)

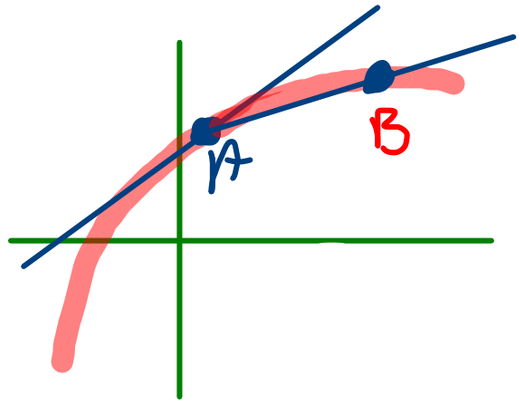


$\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2}$

Par composition des limites

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0$$

(7) Limites et dérivée



Propriété : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

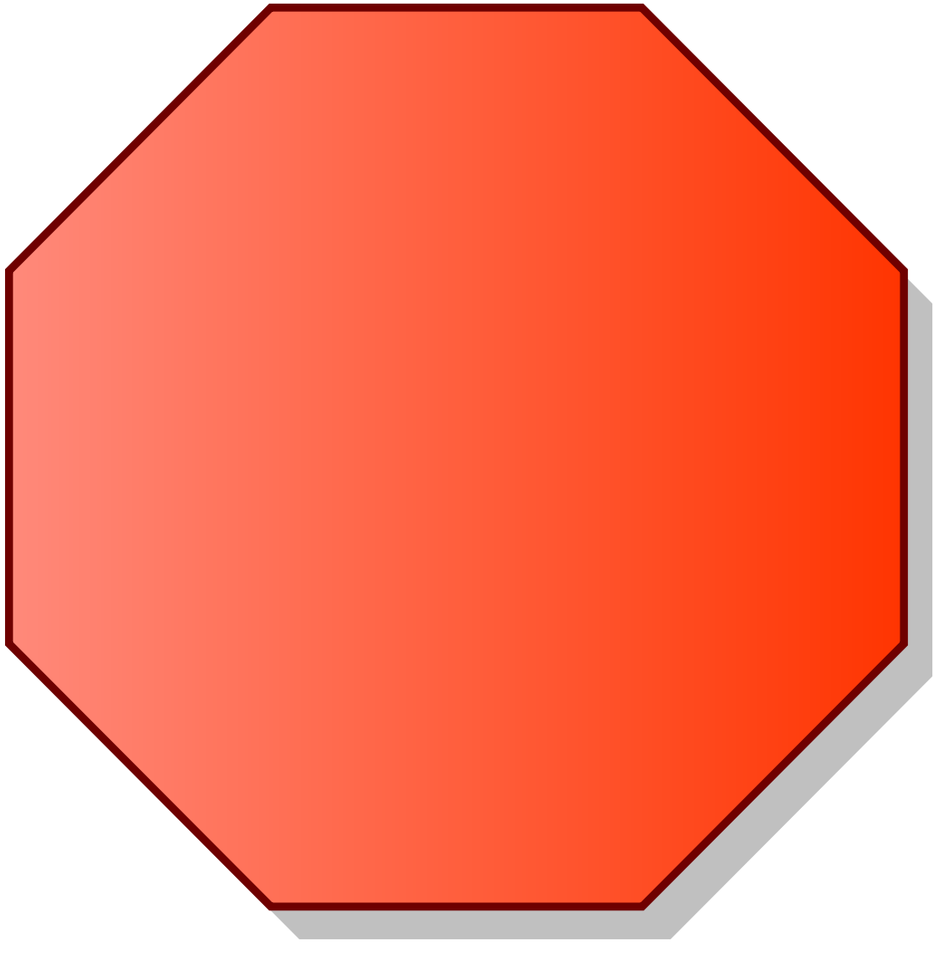
Preuve

$\dfrac{e^a - e^b}{a-b}$ est par définition un taux d'accroissement de exp

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{0+h} - e^0}{h}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x-0}$ est par définition la dérivée de e^x en 0

donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x-0} = (e^x)'(0)$ or $(e^x)' = e^x$

$= e^0 = 1$



Ex: $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$$

Calcul de limites: fiche de synthèse

Exercice

LIMITES DE FONCTIONS: division par 0+ et 0- (Niveau 1)

> **À retenir :** Un dénominateur vers 0^+ conserve le signe du numérateur ; vers 0^-, il l'inverse. Un carré est positif de chaque côté du pôle.

▼ **Deux exemples corrigés**

Exemple 1. $\lim_{x\to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty.$

Exemple 2. $\lim_{x\to 2} \frac{-3}{(x-2)^2} = -\infty.$

À retenir : À l'infini, simplifier a−ax/(x+b)=ab/(x+b) : le dénominateur tend vers 0^+ ; son opposé tend vers 0^-.

▼ **Deux exemples corrigés**

Exemple 1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3+1/x}{2-2x/(x+1)} = +\infty.$

Exemple 2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3+1/x}{2x/(x+1)-2} = +\infty.$

FONCTIONS_LIMITES_0PLUS_0MOINS_1.html
FONCTIONS_LIMITES_0PLUS_0MOINS_1a.html
FONCTIONS_LIMITES_0PLUS_0MOINS_2.html
FONCTIONS_LIMITES_0PLUS_0MOINS_2a.html

Propriétés Limite des fonctions de référence

Fonction inverse	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$	• $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$	• $\lim\limits_{\substack{x<0\\x\to0}} \frac{1}{x} = -\infty$	• $\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to0}} \frac{1}{x} = +\infty$
Fonction puissance	• Pour tout entier naturel n : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$	• Si n est pair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$	• Si n est impair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$	
Fonction exponentielle	• $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	• $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$	• $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$	• $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$
Fonction racine carrée et racine carrée inverse	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$	• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x} = 0$	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Propriété Limites d'une somme et d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$	$\ell\times\ell'$
$\ell\neq0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ Règle des signes
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$

Propriété Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	$\ell'\neq0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$\pm\infty$	0
ℓ	0	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\ell'\neq0$	$\pm\infty$ Règle des signes
0	0	indéterminée
$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée

