

Chapitre 1

Suites et récurrences

www.courounadin.fr

① Formule explicite :

On peut calculer un terme de la suite par opérations sur n

$$u_n = 2 \times n$$

② Formule par récurrence

On peut calculer un terme de la suite par opérations sur le terme précédent

$$u_0 = 1$$

$$u_{n+1} = 2 \times u_n + 1$$

Rappels

Ex 1 p 13

1 Calculer les termes d'une suite définie par une formule explicite

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3^n - 1$.
Calculer u_0 et u_5 .

2 Calculer les termes d'une suite définie par une relation de récurrence

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$.
Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n) .

① Formule explicite :

On peut calculer un terme de la suite par opérations sur n

② Formule par récurrence

On peut calculer un terme de la suite par opérations sur le terme précédent

Exercice 1 (p 13) :

$$u_n = 3^n - 1 \rightarrow \text{formule explicite.}$$

$$u_0 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$u_5 = 3^5 - 1 = 242$$

$$a^0 = 1$$

$$3^0 = 1$$

2 Calculer les termes d'une suite définie par une relation de récurrence

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n) .

Exercice 1 (p 13) :

$$u_n = 3^n - 1 \rightarrow \text{formule explicite.}$$

$$u_0 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$u_5 = 3^5 - 1 = ? \quad 242$$

Exercice 2 p 13

$$v_0 = 3$$

$$v_3 = 17$$

formule par
récurrence

$$\begin{cases} v_{n+1} = 2v_n - 1 \\ v_0 = 3 \end{cases}$$

$$v_1 = 5$$

$$v_2 = 9$$

$$\begin{aligned} v_1 &= 2v_0 - 1 \\ &= 2 \times 3 - 1 = 5 \end{aligned}$$

$$v_2 = 2v_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$$

Exercice 1 (p 13) :

$$u_n = 3^n - 1 \rightarrow \text{formule explicite.}$$

$$u_0 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$u_5 = 3^5 - 1 = ? \quad 242$$

Exercice 2 p 13

formule par
réurrence

$$v_{n+1} = 2v_n - 1$$

$$v_0 = 3$$

$$v_1 = 5$$

$$v_2 = 9$$

$$v_3 = 17$$

$$\begin{aligned} v_1 &= 2v_0 - 1 \\ &= 2 \times 3 - 1 = 5 \end{aligned}$$

$$v_2 = 2v_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$$

CALCUL_TERMES_SUITE1
CALCUL_TERMES_SUITE2

3) avec la calculatrice

On considère la suite (v_n) définie par

$$v_{n+1} = \frac{4v_n + 4}{3 + v_n} \text{ et } v_0 = -14.$$

Calculer en utilisant le menu table de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-2} près du terme u_{21} :

$u_{21} =$  

2.56

1) On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{-2}{2+3n}$.

Calculer u_0, u_1 et u_2 :

$$u_0 = \text{[input box]} $$

$$u_1 = \text{[input box]} $$

$$u_2 = \text{[input box]} $$

2) On considère la suite (v_n) définie par

$$v_{n+1} = \frac{-2}{2+3v_n} \text{ et } v_0 = 2.$$

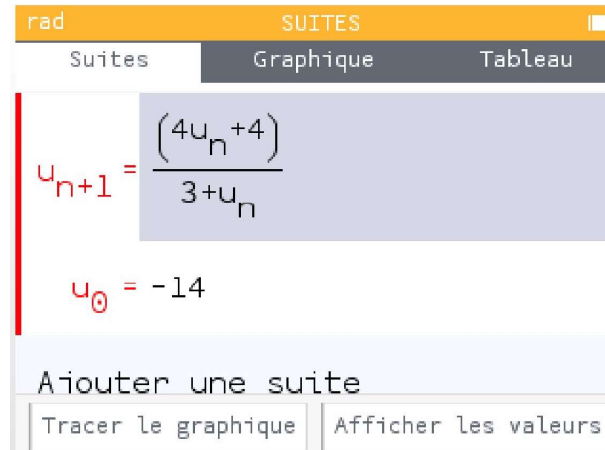
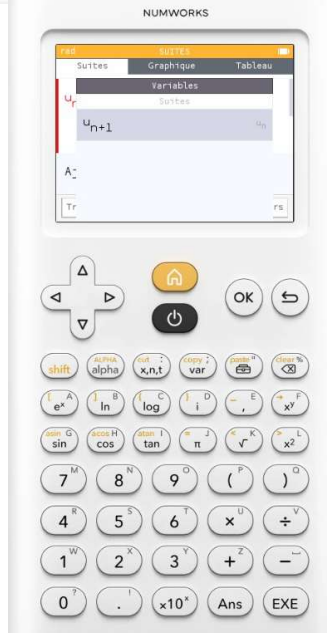
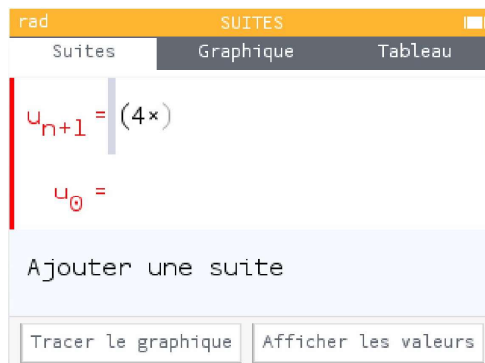
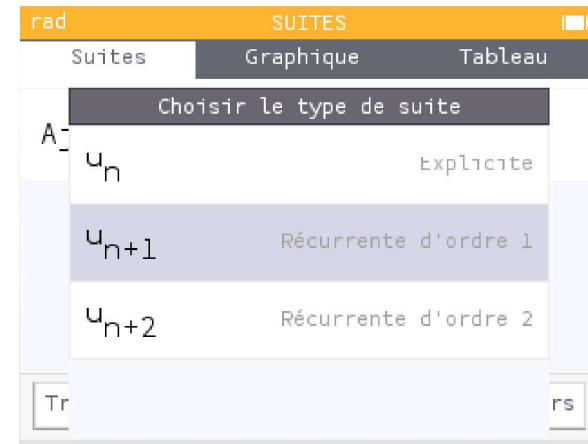
Calculer v_1, v_2 et v_3 :

$$v_1 = \text{[input box]} $$

$$v_2 = \text{[input box]} $$

$$v_3 = \text{[input box]} $$

NUMWORKS



Régler l'intervalle

n	u_n
0	-14
1	4.727272727
2	2.964705882
3	2.65877712
4	2.586266992
5	2.567916641
6	2.56319688
7	2.561077011

TI 1

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
 TYPES FONCTION
 MATHPRINT CLASSIQ
 NORMAL SCI ING
 FLOTTANT 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 RADIAN DEGRÉ
 FONCTION PARAMÉTRIQ POLAIRE SUITE
 ÉPAIS POINT-ÉPAIS FIN POINT-FIN
 SÉQUENTIELLE SIMUL
 RÉEL a+bt re^(0t)
 PLEINECR HORIZONTAL GRAPHE-TABLE
 TYPE FRACTION: n/d Un/d
 RÉSULTATS: AUTO DÉC
 DIAGNOSTIQUES STATS: NAFF AFF
 ASSISTANT STATS: AFF NAFF
 RÉGLER HORLOGE 01/01/15 12:00 AM
 LANGUE: FRANÇAIS

quitter mode 3 3 précédent entrer

2

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
 Graph1 Graph2 Graph3
 TYPE: SUITE(n) SUITE(n+1) SUITE(n+2)
 nMin=1
 u(n)=
 u(1)=
 u(2)=
 v(n)=
 v(1)=
 v(2)=
 w(n)=

graphstats f1
 f(x)

3

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
 DEUXIEME CONDITION SI NECESSAIRE
 Graph1 Graph2 Graph3
 TYPE: SUITE(n) SUITE(n+1) SUITE(n+2)
 nMin=0
 u(n+1)=
 u(0)=
 u(1)=
 v(n+1)=(4*v(n)+4)/(3+v(0))
 v(0)=-14
 v(1)=
 w(n+1)=

échanger
 X,T,θ,n

$$v_{n+1} = \frac{4v_n + 4}{3 + v_n} \text{ et } v_0 = -14.$$

4

n	u
0	-14
1	4.7273
2	2.9647
3	2.6588
4	2.5863
5	2.5679
6	2.5632
7	2.562
8	2.5617
9	2.5616
10	2.5616

n=0

table f5
 2nde graphe

5

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
 CONFIG TABLE
 DébutTbl=20
 ΔTbl=1
 Indent : Auto Demande
 Dépendte : Auto Demande

déf table f2 L2 Z catalog
 2nde fenêtre 2 0

6

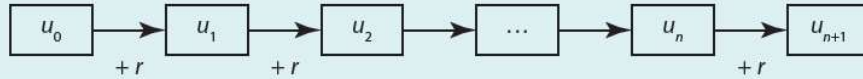
n	u
20	2.5616
21	2.5616
22	2.5616
23	2.5616
24	2.5616
25	2.5616
26	2.5616
27	2.5616
28	2.5616
29	2.5616
30	2.5616

CALCUL_TERMES_SUITE_CALCULATRICE1
CALCUL_TERMES_SUITE_CALCULATRICE1a
CALCUL_TERMES_SUITE_DEPASSEMENT1
CALCUL_TERMES_SUITE_SITUATIONS1

2 Suite arithmétique

Définition Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r , appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$.



Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$.
- La suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0,5$.

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + (-0,5)$. (v_n) est la suite arithmétique de raison $r = -0,5$ et de premier terme $v_0 = 3$.

Remarque

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut chercher à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est égal à une constante r .

Propriété Expression du terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + r \times n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + r \times (n - 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + r \times (n - p)$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ 2 & \xrightarrow{+0,5} & 2,5 & \xrightarrow{+0,5} & 3 & \xrightarrow{+0,5} & 3,5 & \xrightarrow{+0,5} & 4 \dots \end{array}$$

raison : 0,5

Premier terme : $u_0 = 2$

Définitions

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

formule de récurrence

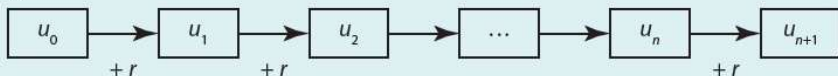
$$u_n = u_0 + n r$$

formule explicite

2 Suite arithmétique

Définition Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r , appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$.



Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$.
- La suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0,5$.

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + (-0,5)$. (v_n) est la suite arithmétique de raison $r = -0,5$ et de premier terme $v_0 = 3$.

Remarque

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut chercher à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est égal à une constante r .

Propriété Expression du terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + r \times n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + r \times (n - 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + r \times (n - p)$.

Attention au terme de départ

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\ 2 & \xrightarrow{+0,5} & 2,5 & \xrightarrow{+0,5} & 3 & \xrightarrow{+0,5} & 3,5 & \xrightarrow{+0,5} & 4 \dots \end{array}$$

$$u_n = u_1 + (n - 1) r$$

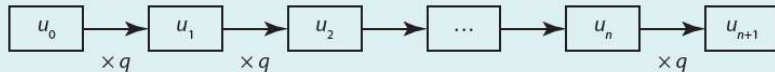
$$\begin{array}{ccccccccc} 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 \\ 2 & \xrightarrow{+0,5} & 2,5 & \xrightarrow{+0,5} & 3 & \xrightarrow{+0,5} & 3,5 & \xrightarrow{+0,5} & 4 \dots \end{array}$$

$$u_n = u_5 + (n - 5) r$$

3 Suite géométrique

Définition Suite géométrique

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q , appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = q \times u_n$.



Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$ est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0,5$.

- Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{3} \times v_n$. Donc (v_n) est la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 5$.

Remarques

- Pour démontrer qu'une suite (u_n) est géométrique, il faut montrer que $u_{n+1} = q \times u_n$.

Si les termes sont non nuls, on peut aussi chercher à montrer que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à une constante q .

- La variation relative entre deux termes consécutifs est constante.

Propriété Expression du terme général

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & & 1 & & 2 & & \textcircled{3} & & 4 \\
 0,5 & \xrightarrow{\times 2} & 1 & \xrightarrow{\times 2} & 2 & \xrightarrow{\times 2} & 4 & \xrightarrow{\times 2} & 8 \rightarrow \dots
 \end{array}$$

raison : 2

Premier terme : 0,5

- $$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = u_n \times 2 \end{cases}$$

formule par récurrence
- $$u_n = 0,5 \times 2^n$$

formule explicite

Attention au terme de

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \\ & & \text{ } & & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 \\ 0,5 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 8 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

$$u_n = u_3 \times q^{n-3}$$

$$u_7 = u_3 \times q^{7-3} = 4$$

Rappel

$$\nearrow 10\% \Leftrightarrow \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)$$

$\times 1,1$

$$\searrow 20\% \Leftrightarrow \times \left(1 + \frac{-20}{100}\right)$$

$\times 0,8$

Propriété Somme des n premiers entiers

Pour tout entier $n \geq 1$, on a $1 + 2 + \dots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$.

Calculons $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$
 $\left(= \frac{100 \times 101}{2} \right) = \frac{100}{2} \times 101 = 50 \times 101 = 5050$

Propriété Somme de n premières puissances

Pour tout réel $q \neq 1$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Calculons $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = \frac{1 - 2^6}{1 - 2} = \frac{1 - 64}{1 - 2} = \frac{-63}{-1} = 63$
 $(= 1)$

$$q^0 = 1$$