CHAPITRE 5
DERIVATION ET CONVEXITE

Dérivation et convexité

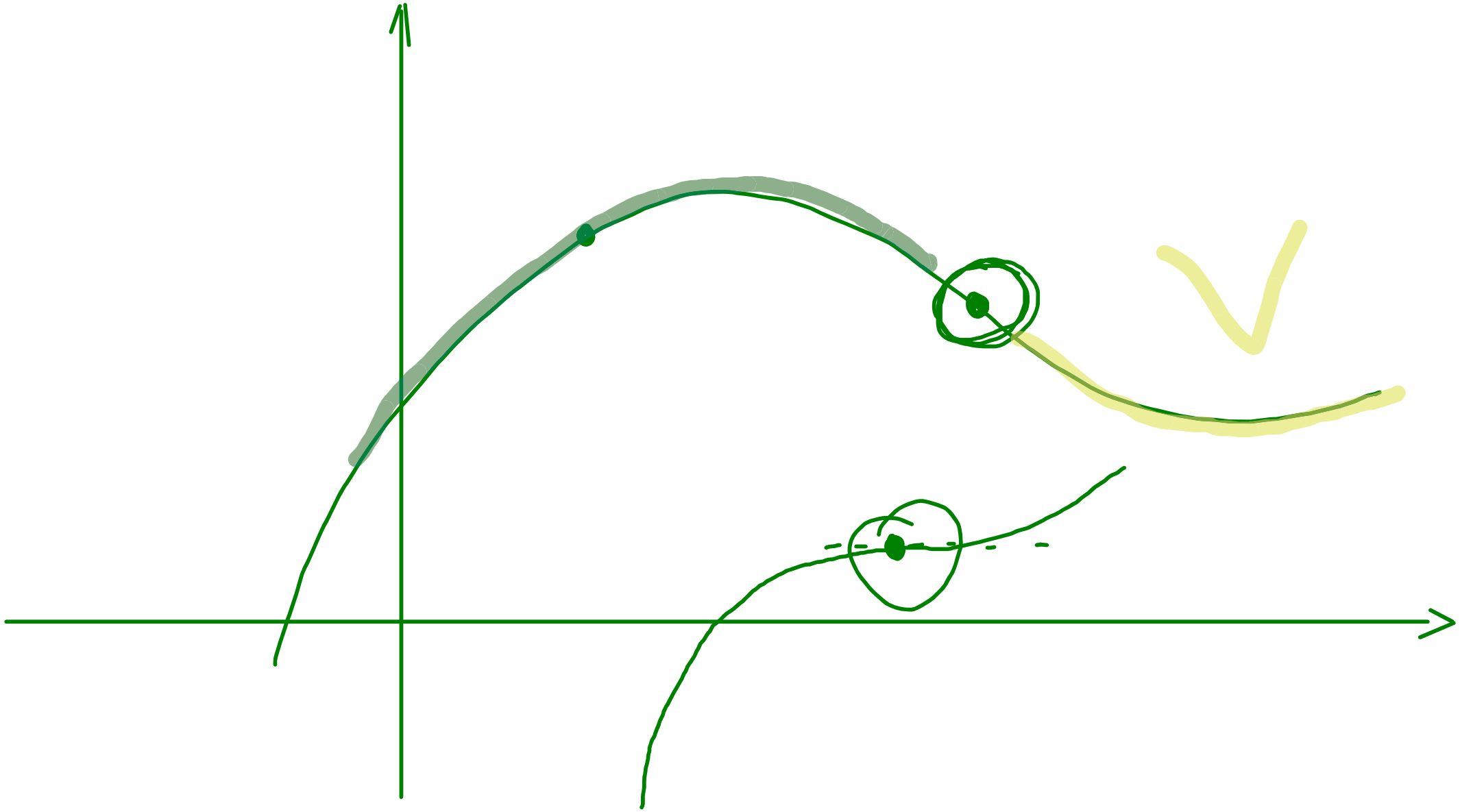
VIDÉO WEB
Un manège courbé
lienmini.fr/maths-s05-01

Les montagnes russes sont impressionnantes. Le Thunderhead Roller Coaster, par exemple, est une montagne russe des plus populaires au monde avec ses 22 virages et sa pente maximale de 60°.

Comment déterminer les endroits où la vitesse du train sera la plus grande ?

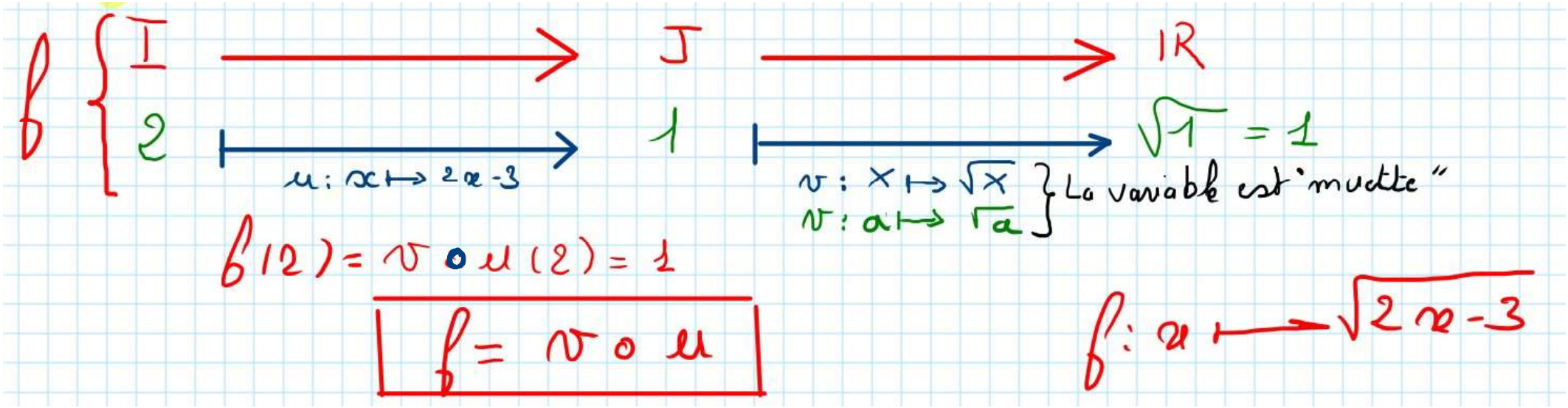
↪ TP 2 p. 167

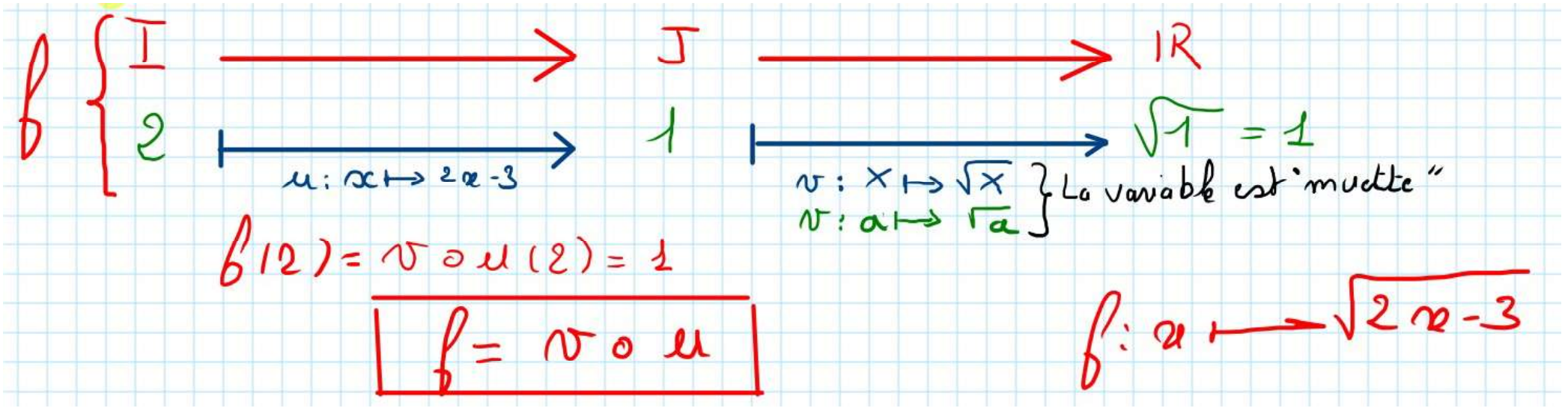


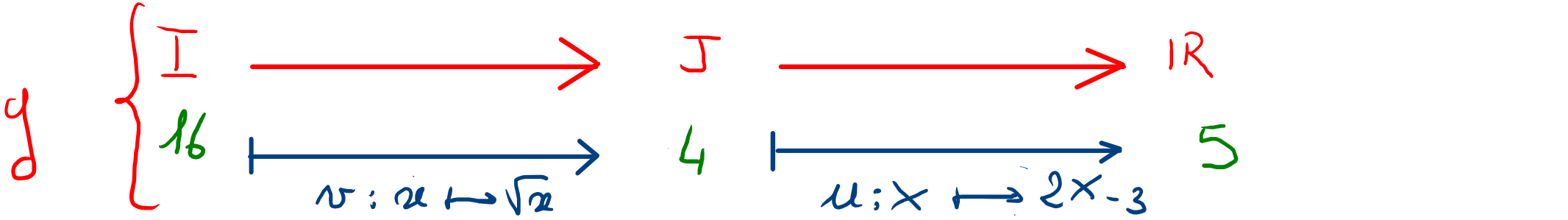


Composée de fonctions (Rappel)

Application 1 $f(x) = \sqrt{2x-3}$



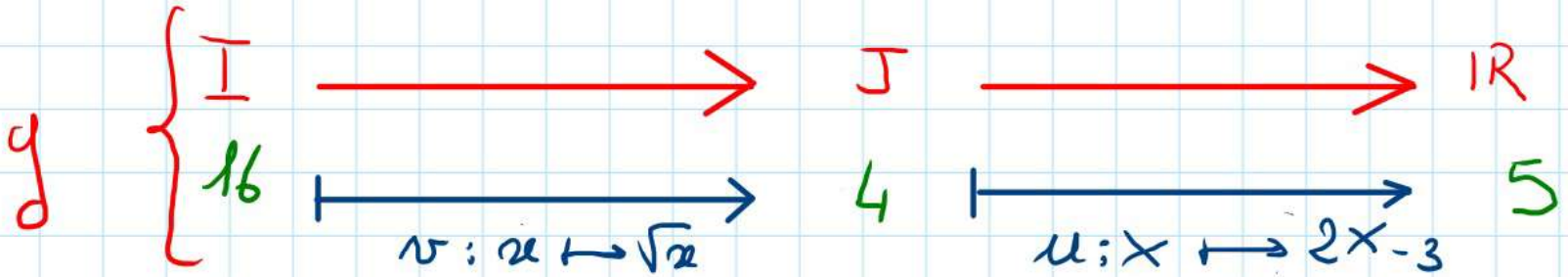




$g(16) = u \circ v(16) = 5$

$g = u \circ v$

$g : x \mapsto 2\sqrt{x} - 3$



$g(16) = u \circ v\,(16) = 5$

$g = u \circ v$

$g : x \mapsto 2\sqrt{x} - 3$

1 Composée d'une fonction *u* par une fonction *v*

Définition Composition d'une fonction *u* par une fonction *v*

Soit *v* et *u* deux fonctions telles que *u* est définie sur un intervalle I à valeurs dans l'intervalle J (c'est à dire pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J), et *v* est définie sur J.
On note alors $v \circ u$ la fonction définie sur I par $v \circ u : x \to v(u(x))$.

I	u	J	v	
x	$\mapsto$	$u(x)$	$\mapsto$	$v(u(x))$

Application 1

- $f(x) = \sqrt{2x-3}$ $(v \circ u)$

  est calculable si $2x - 3 \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow 2x \geqslant 3$

  $\Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{2}$

  $D_f = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ $(= I)$

- $g(x) = 2\sqrt{x} - 3$ $(u \circ v)$

  est calculable si $x \geqslant 0$

  $D_g = [0; +\infty[$

$D_f = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

- $g(x) = 2\sqrt{x} - 3$

est calculable si $x \geq 0$

$D_g = [0; +\infty[$

Application 2

$u : x \mapsto 2x - 8$ et $v : x \longmapsto \frac{1}{x}$

Mêmes questions.

Application 2

$u : x \mapsto 2x - 8$ et $v : x \mapsto \frac{1}{x}$

Mêmes questions.

$f = v \circ u$ $\quad f : x \mapsto \dfrac{1}{2x - 8}$ $\quad 2x - 8 \neq 0$, $2x \neq 8$, $x \neq 4$

$g = u \circ v$ $\quad g : x \mapsto 2 \times \dfrac{1}{x} - 8 = \dfrac{2}{x} - 8$ $\quad x \neq 0$

$D_f =]-\infty ; 4[\cup]4 ; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$D_g =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[= \mathbb{R}^*$

Application 3

$u : x \mapsto x^2 - 4x - 5$ et $v(x) = \frac{1}{x}$

$f = v \circ u$

$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4x - 5}$

f est calculable si $x^2 - 4x - 5 \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{36}}{2 \times 1} = -1$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 5$

$1 x^2 - 4x - 5 = 1 (x - 5)(x + 1)$

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+4x-5}$$

f est calculable si $x^2 - 4x - 5 \neq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-\sqrt{36}}{2\times 1} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 5$$

$1\,x^2 - 4x - 5 = 1\,(x-5)(x+1)$

$$D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 5[\cup]5 ; +\infty[$$



$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x-5}$

f est calculable si $x^2-4x-5 \neq 0$

$\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\times 1\times(-5) = 16+20 = 36$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4)-\sqrt{36}}{2\times 1} = -1$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 5$

$D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;5[\cup]5;+\infty[$

Application 4

$f(x) = \sqrt{-2x-4}$

$D_f = ?$

$-2x-4 \geq 0$

$-2x \geq 4$) $\div(-2)$

$x \leq -2$

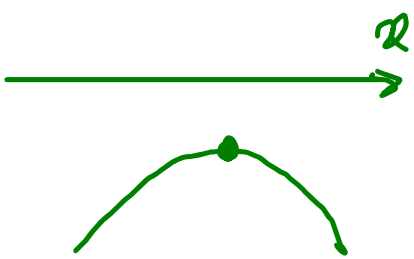
$D_f =]-\infty;-2]$

Application 5

$g(x) = \sqrt{-x^2+2x-4}$

$D_g = ?$

$-x^2+2x-4 \geq 0$



$\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times(-4) = 4-16 = -12 < 0$

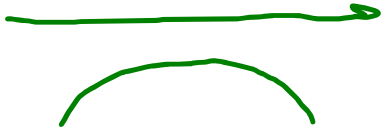
On a toujours $-x^2+2x-4 < 0$ car $a = -1 < 0$ (Parabole orientée vers le bas)

$D_f = \emptyset$ ✓

Application 6

$h(x) = \dfrac{1}{-x^2-6x-18}$

$D_h = ?$



$\Delta = -36 < 0$. $a = -1 < 0$ donc parabole orientée vers le bas.

$D_h = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$)

Application 7

$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

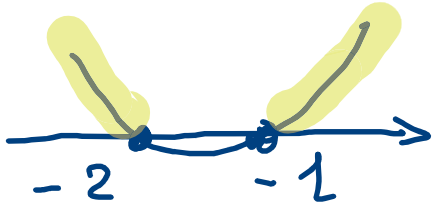
f calculable si :

$$x^2 + 3x + 2 \geq 0$$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = -2$

$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = -1$



$a = 1 > 0$ donc parabole orientée vers le haut.

$x^2 + 3x + 2 \geq 0$

$D_f =]-\infty ; -2] \cup [-1 ; +\infty[$

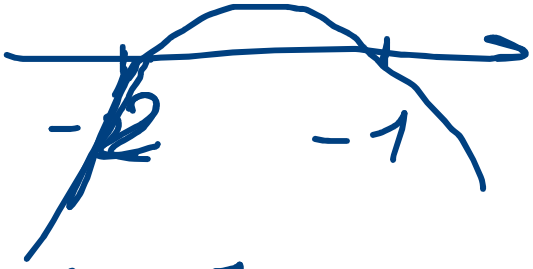
Application 8

$f(x) = \sqrt{-x^2 - 3x - 2}$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = -1$

$x_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = -2$



$-x^2 - 3x - 2 \geq 0$ ssi $x \in [-2; -1]$

$Df = [-2; -1]$

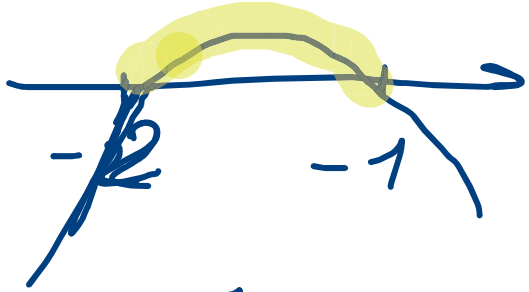
Application 8

$f(x) = \sqrt{-x^2 - 3x - 2}$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = -1$

$x_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = -2$



$-x^2 - 3x - 2 \geq 0$ si $x \in [-2; -1]$

$Df = [-2; -1]$

1) L'ensemble de définition de la fonction $\sqrt{x+2}$ est [ ] Sol

2) L'ensemble de définition de la fonction $\dfrac{1}{x^2-3x-18}$ est [ ] Sol

1) L'ensemble de définition de la fonction $\sqrt{-3x+9}$ est [ ] Sol

2) L'ensemble de définition de la fonction $\sqrt{-x^2-2x+8}$ est [ ] Sol

1) L'ensemble de définition de la fonction $\sqrt{x+3}$ est [ ] Sol

2) L'ensemble de définition de la fonction $\dfrac{1}{7x-28}$ est [ ] Sol

Ensemble de définition

Dans cet exercice, l'ensemble des réels "$\mathbb{R}$" se notera 'r' ou 'R'.
De même l'ensemble vide se votera 'v' ou 'V'.
Tous les autres ensembles se noteront sous forme d'intervalle (par exemple]-1;+inf[;) ou de réunion d'intervalle avec le symbole U (lettre U en majuscule)
Exemple]-inf;-2[U]4;+inf[

ENSEMBLE_DEFINITION0
ENSEMBLE_DEFINITION0a
ENSEMBLE_DEFINITION0b
ENSEMBLE_DEFINITION0c

