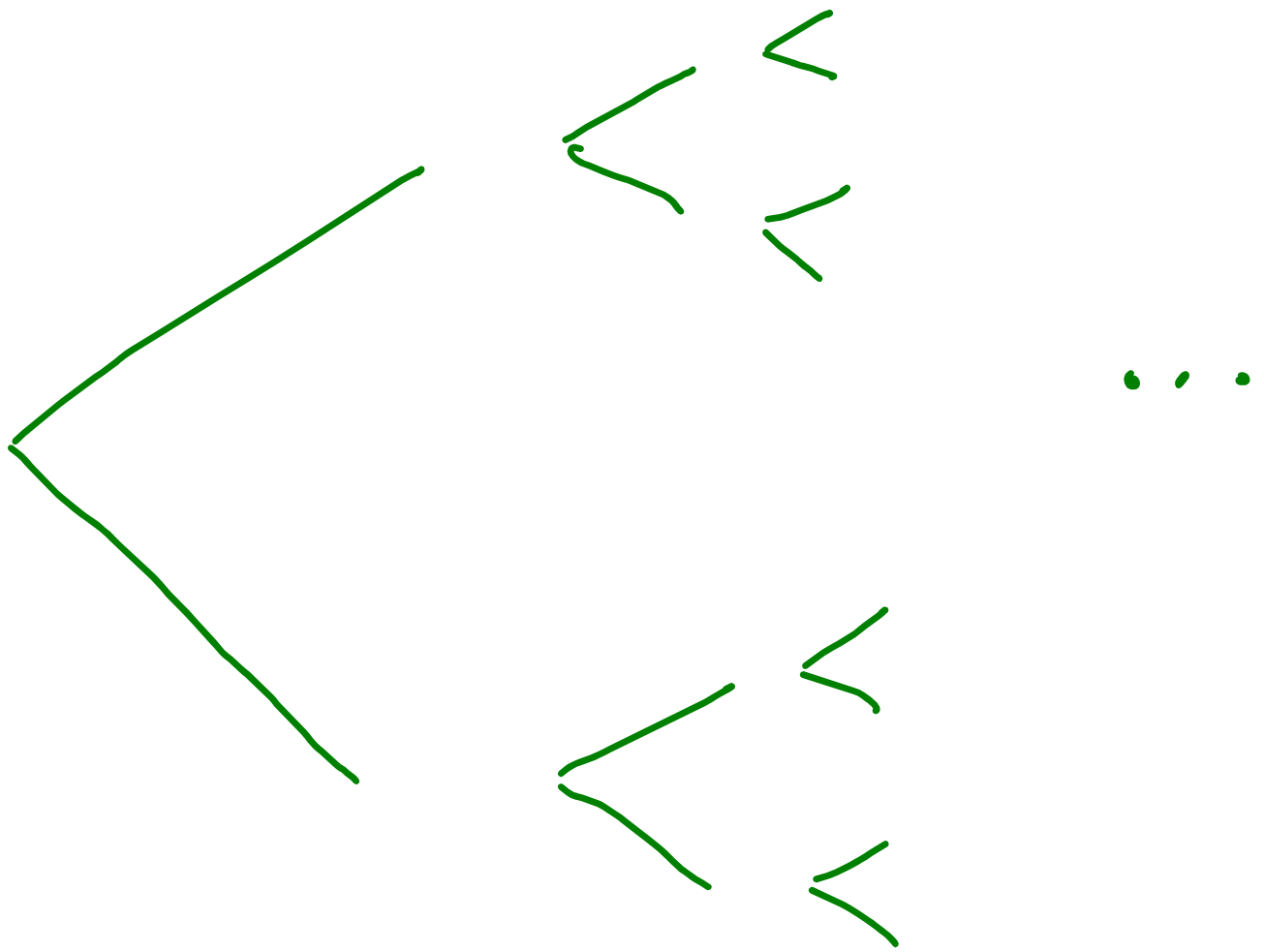
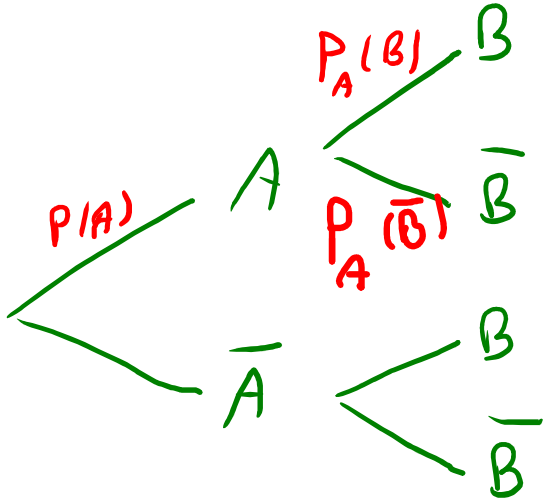
CHAPITRE 4
LOI BINOMIALE



Rappel

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$



$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

A et B independant
si et seulement si
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
$P_A(B) = P(B)$; $P_B(A) = P(A)$

1 Succession d'épreuves indépendantes

Définition Univers associé à une succession d'épreuves indépendantes

Soit une succession de n épreuves indépendantes dont les univers associés sont respectivement $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$.

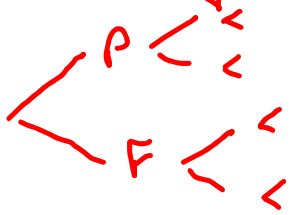
L'univers associé à cette succession de n épreuves est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$.

Exemple 1 : Pile (A) / Face ($\overline{A}$)

$n = 3$ $\quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \{P ; F\} = \{A ; \overline{A}\}$

3 lancers

$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 = \{(F,F,F), (F,P,F) \ldots\}$ Triplets



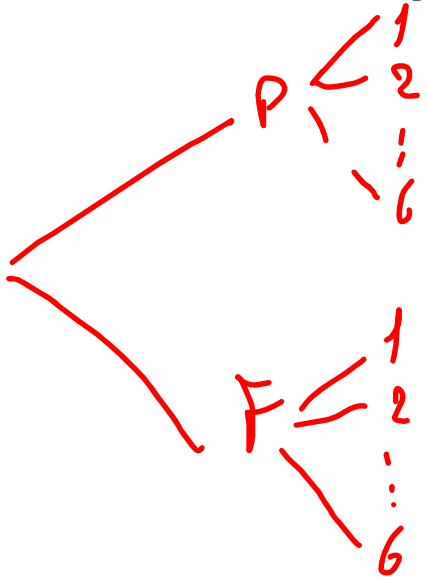
8 possibilités

4-uplets

Exemple 2 : On jette une pièce (pile ou face) puis on jette un dé (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6)

$\Omega_1 = \{P ; F\}$ $\Omega_2 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(P;1) ; (P;2) ; \dots ; (P;6) ;$
$(F;1) ; \dots (F;6)\}$



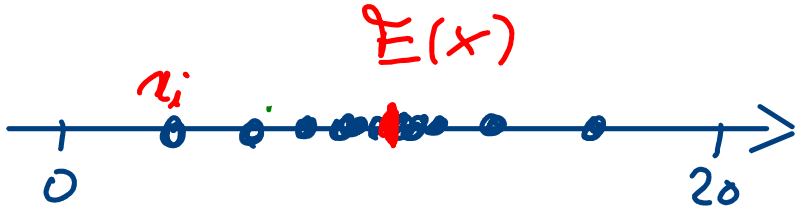
possibilités : $2 \times 6 = 12$

Rappel :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Loi de probabilité

Centrale $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times p_k$



dispersion $V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(x))^2 \times p_k$

$E(x)$ est l'espérance

$V(x)$ est la variance → $\sigma(x)$ est l'écart type

$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

2 Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

Définition **Épreuve de Bernoulli**

Une expérience aléatoire à deux issues, succès (noté S) et échec (noté $\overline{S}$ ou E), est dite épreuve (ou expérience) de Bernoulli.

Définition **Loi de Bernoulli**

Soit $p \in]0\,;1[$. La loi de la variable aléatoire X donnée ci-contre est appelée loi de Bernoulli de paramètre p, ce qui se note $\mathcal{B}(p)$.

$\mathcal{B}(p)$ ou $\mathcal{B}(1,p)$

Echec Succès

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1-p$	p

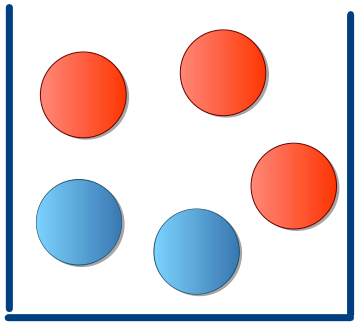
contraire

Définition **Schéma de Bernoulli**

La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est appelée schéma de Bernoulli.

Exemple

Expérience aléatoire



On tire une boule au hasard et on s'intéresse à l'événement

S = " la boule tirée est rouge " = 1

$\overline{S}$ = " la boule tirée est bleue " = 0

$S \hookrightarrow B\left(\frac{3}{5}\right)$

Méthode 2

Identifier, représenter et utiliser un schéma de Bernoulli

Énoncé

Gloria a remarqué que quand un client entre dans sa libraire, la probabilité qu'il achète un livre est 0,67. On admet que les achats des clients sont indépendants les uns des autres.
Quatre clients entrent dans la librairie. On s'intéresse au fait qu'ils achètent un livre ou non.

1. Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on préciser n, le nombre de répétitions, et p, la probabilité d'un succès.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité que deux des quatre clients achètent un livre.

Méthode 2

Identifier, représenter et utiliser un schéma de Bernoulli

p 384

Énoncé

Gloria a remarqué que quand un client entre dans sa libraire, la probabilité qu'il achète un livre est 0,67. On admet que les achats des clients sont indépendants les uns des autres.
Quatre clients entrent dans la librairie. On s'intéresse au fait qu'ils achètent un livre ou non.

1. Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on préciser*a* *n*, le nombre de répétitions, et *p*, la probabilité d'un succès.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité que deux des quatre clients achètent un livre.

(1)

- $X = 1$ si le client achète un livre

  $X = 0$ sinon

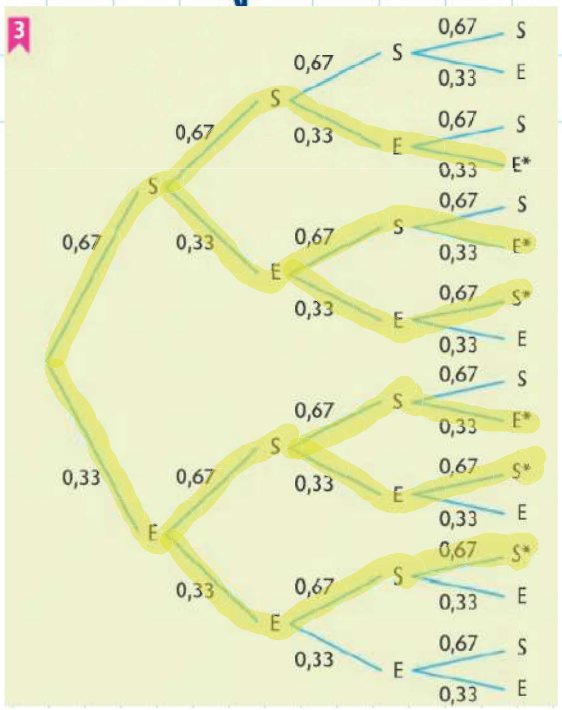
  X est une variable aléatoire et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(0{,}67)$
- On répète cette expérience 4 fois de manière indépendante : donc on a un schéma de BERNOULLI

① • $X = 1$ si "le client achète un livre" = S

$X = 0$ "sinon" = $\overline{S}$

X est une variable aléatoire et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(0{,}67)$

• On répète cette expérience 4 fois de manière indépendante : donc on a un schéma de BERNOULLI $n = 4$ et $p = 0{,}67$



②

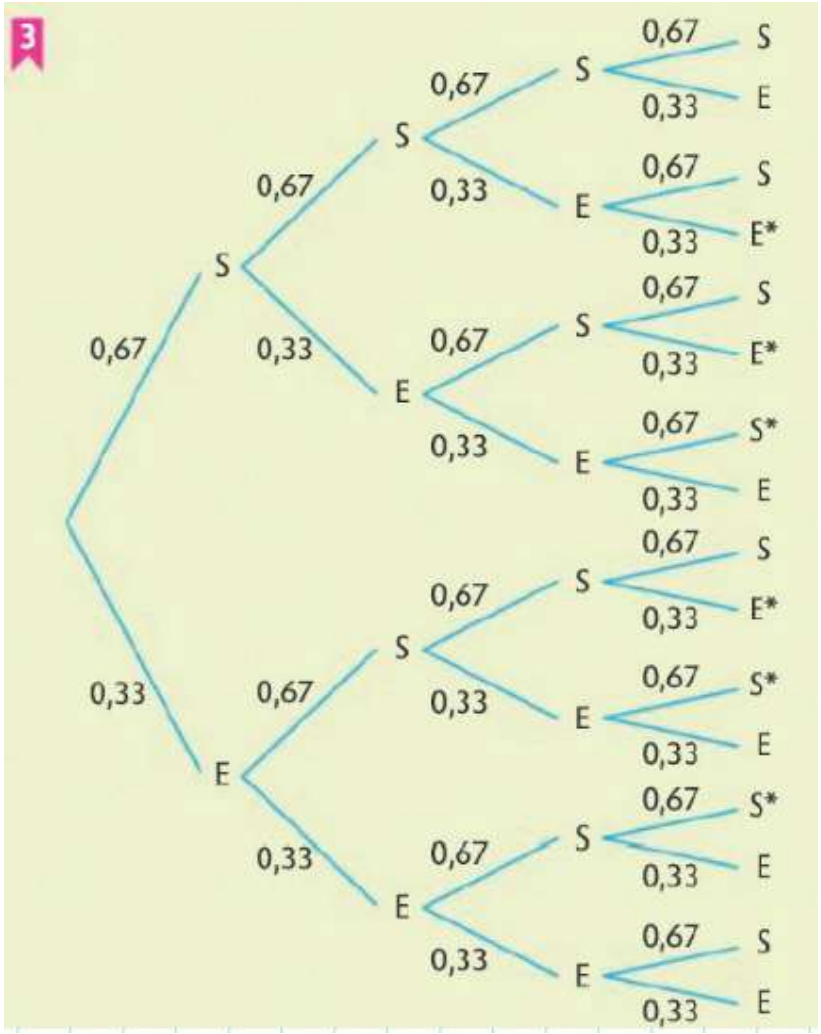
③ $P(X = 2) = 6 \times 0{,}67^2 \times 0{,}33^2$

Nombre de CHEMINS avec exactement 2 succès et 2 échecs

Méthode 2 Identifier, représenter et utiliser un schéma de Bernoulli

p 384

3


0,67
S
0,33
E
0,67
S
0,33
E
0,67
S
0,33
E

Propriété Loi de Bernoulli : espérance, variance et écart-type

Pour X, variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(p)$, on a :

- l'espérance : $E(X) = p$, (moyenne)
- la variance : $V(X) = p(1-p)$,
- l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

} Mesure de la dispersion.

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

Preuve

	$\bar{S}$	S
x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

$$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

$$V(X) = (0-p)^2 \times (1-p) + (1-p)^2 \times p$$

$$= p^2 \times (1-p) + (1-p)^2 \times p$$

$$= (1-p) \times (p^2 + (1-p)p)$$

$$= (1-p) \times p$$

$p^2 \times (1-p) + (1-p) \times (1-p) \times p$

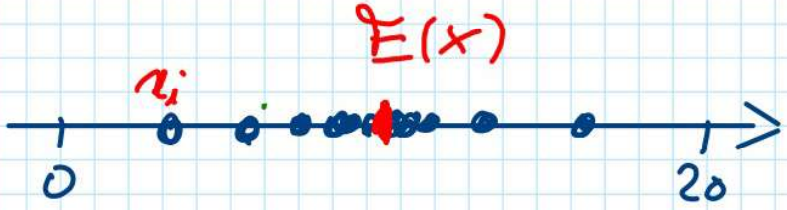
$p^2 + p - p^2 + p = p^2 + p - p^2 = p$

Rappel :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Loi de probabilité

Centrale $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times p_k$



dispersion $V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(x))^2 \times p_k$

(Variance)

(Exemple)

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

(Ecart type)

Exercice

Exercice

Un lot contient 4 pièces conformes et 6 pièces défectueuses, soit 10 pièces au total. On choisit une pièce au hasard, chaque pièce ayant la même probabilité d'être choisie. Le succès est « obtenir une pièce conforme ». X vaut 1 en cas de succès et 0 sinon.

① "$X = 0$" : $P(X=0) = \frac{6}{10}$

"$X \geq 1$" : $P(X \geq 1) = P(X=1) = \frac{4}{10}$

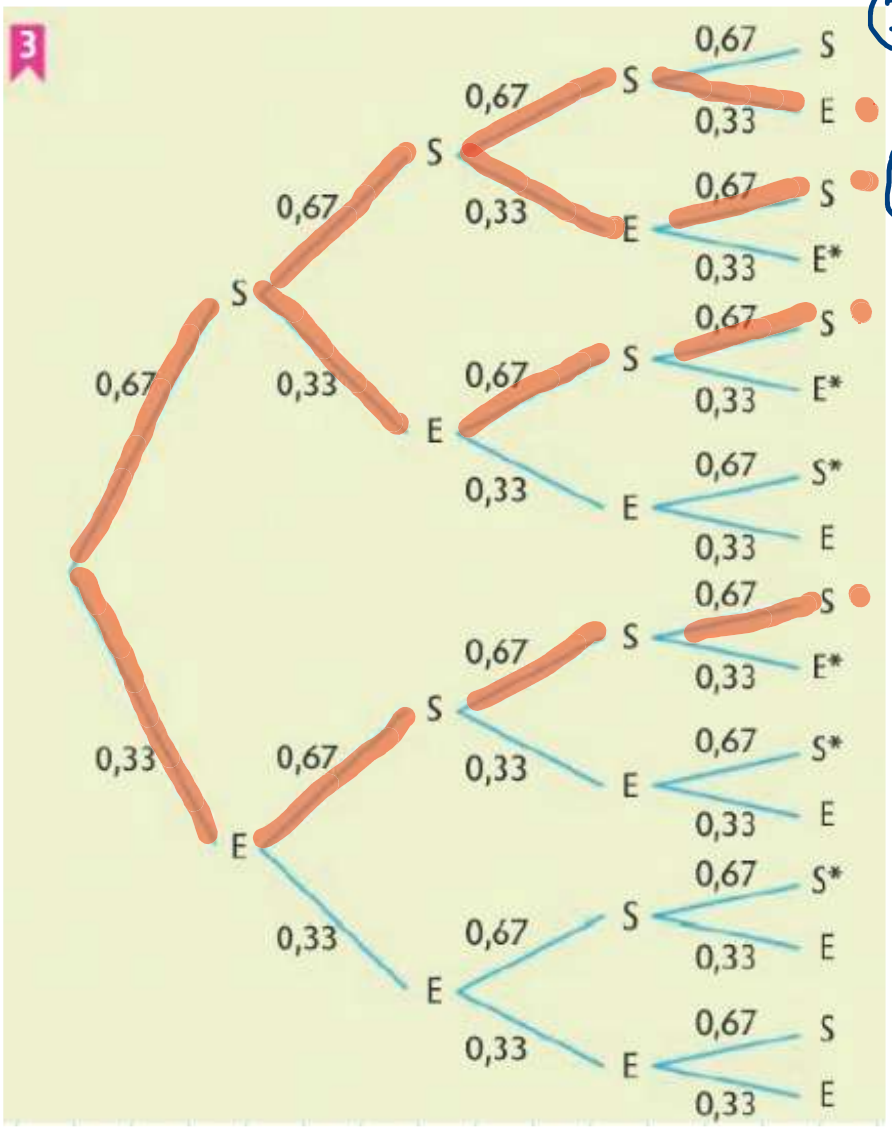
② $X \hookrightarrow B\left(\frac{4}{10}\right)$ $X \hookrightarrow B(0,4)$

$E(X) = p = 0,4$

$V(X) = p(1-p) = 0,4 \times 0,6$

$\sigma(X) = \sqrt{0,4 \times 0,6} \simeq$

LOI_BERNOULLI0
LOI_BERNOULLI0a
LOI_BERNOULLI1



③ $P(X=2) = \boxed{6} \times 0{,}67^2 \times 0{,}33^2$

④ $P(X=3) = \boxed{4} \times 0{,}67^3 \times 0{,}33^1$

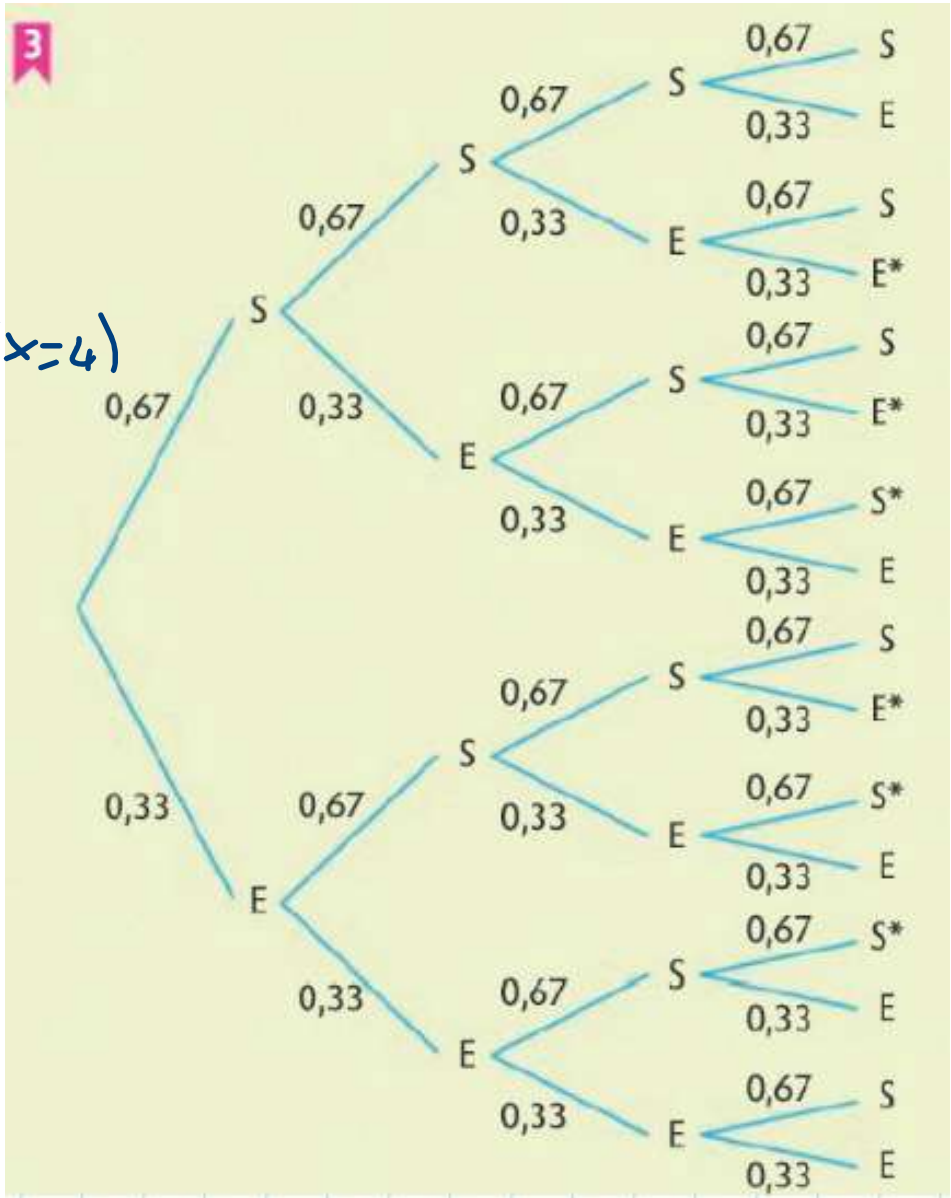
Nombre de chemins sur n répétitions où il existe exactement k succès

$\binom{n}{k}$

$\binom{4}{2}$	6
$\binom{4}{3}$	4

⑤ $P(X=4) = 0,67^4$

⑥ $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$



3 Loi binomiale

a Définition et calculs de probabilités

Définition **Loi binomiale**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0 ; 1[$. On considère le schéma de Bernoulli pour lequel n est le nombre de répétitions et p la probabilité d'un succès.
La loi de la variable aléatoire donnant le nombre de succès sur les n répétitions est appelée loi binomiale de paramètres n et p et se note $\mathcal{B}(n ; p)$.

: c'est la loi associée au schéma de Bernoulli

Si on note X cette variable aléatoire

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n ; p)$

X suit $\mathcal{B}(n ; p)$ — n : Nombre de répétitions ; p : probabilité du succès

"$X = 3$" est l'évènement : "On a obtenu exactement 3 succès"

Si on note X cette variable aléatoire

$$X \underset{\text{Suit}}{\hookrightarrow} \mathcal{B}(n\,;p)$$

Nombre de répétition

probabilité du succès

" $X = 3$ " est l'évènement : " On a obtenu exactement 3 succès "

Propriété **Probabilités et loi binomiale**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$.

Pour tout entier k dans $[0\,;n]$, on a $p(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \times 0{,}67^2 \times 0{,}33^{4-2}$$

Propriété **Probabilités et loi binomiale**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;p)$.

Pour tout entier k dans $[0\,;n]$, on a $p(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$.

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\times 0{,}67^{2}\times 0{,}33^{4-2}$$

Propriété **Probabilités et loi binomiale**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n ; p)$.

Pour tout entier k dans $[0 ; n]$, on a $p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$.

$P(X=2) = \binom{4}{2} \times 0{,}67^{2} \times 0{,}33^{4-2}$

Où $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins ici dans l'arbre de probabilité où il y a exactement k succès.

$\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial (lire "k parmi n") → Calcul machine

Méthode 3

Reconnaître la loi binomiale et calculer une probabilité de la forme $p(X = k)$

p 385

Énoncé

Une urne contient neuf boules rouges et une verte. On y tire onze boules avec remise et on considère la variable aléatoire V donnant le nombre de boules vertes obtenues.

1. Donner la loi de V.
2. Calculer $p(V = 2)$.

R R V V V R R R V V R
0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0

$S_i = \begin{cases} 1 \text{ si Verte} \\ 0 \text{ si Rouge} \end{cases}$ Bernoulli

1°) On a un schéma de Bernoulli.

ou succès = "boule verte" et $n = 11$

Car les S_i sont indépendantes (Remise)

$V \hookrightarrow \mathcal{B}(11 ; \frac{1}{10})$ (n ; p)

$\mathcal{B}(11 ; 0,1)$

En effet $V = \sum_{i=1}^{11} S_i$

2°) $p(V = 2) = \binom{11}{2} \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \left(\frac{9}{10}\right)^9$

Exercice :

Dans une usine, les produits passent un test.

La probabilité qu'un produit soit défectueux est 0,1.

Sur un échantillon de 10 produits, quelle est la probabilité que 2 d'entre eux soient défectueux ?

La probabilité qu'un produit soit défectueux est 0,1.

Sur un échantillon de 10 produits, quelle est la probabilité que 2 d'entre eux soient défectueux.

- Modéliser

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ produit est OK.} \\ 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ produit est défectueux} \end{cases}$$

$X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(0,1)$

Soit $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$.

- **Modéliser**

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ produit est OK.} \\ 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ produit est défectueux} \end{cases}$$

Soit $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$. les variables X_i sont indépendantes

et suivant la loi de Bernoulli $B(p)$,

on a donc un schéma de Bernoulli

donc $X \hookrightarrow B(10 ; 0,1)$

- **Calculer** $P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^8 = \dots$

- **Modéliser**

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ produit est OK.} \\ 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ produit est défectueux} \end{cases}$$

Soit $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$. les variables X_i sont indépendantes

et suivent la loi de Bernoulli $B(p)$, $\left(X_i \hookrightarrow B(0,1) \right)$

Pour X on a donc un schéma de Bernoulli

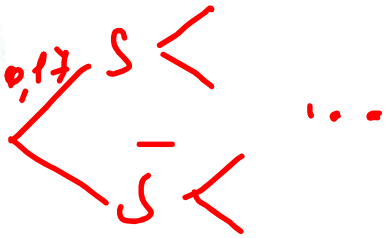
donc $X \hookrightarrow B(\underset{n}{10}; \underset{p}{0,1})$

- **Calculer** $P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^8 = \dots$

Exercice 1

Lors d'une enquête ménée dans une ville de moins de 10 000 habitants, il ressort que 17% des personnes agées de plus de 60 ans utilisent internet.
On choisi au hasard dans cette ville 10 habitants.
On note X la variable aléatoire égal au nombre de personnes utilisant internet parmis ces personnes
X suit une loi binomiale de paramètres n= 10 ✔ et p= 0.17 ✔
La probabilité, arrondi au millième, que 4 personnes parmis eux utilisent internet est égal à
0.057 ✔

$P(X=4) = \binom{10}{4} \times 0{,}17^4 \times (1-0{,}17)^6$



Exercice 2

D'après l'INSEE, en 2018, 54 % des ménages des 25-40 ans disposent d'un lave-vaisselle. On interroge au hasard et de manière indépendante 8 personnes.
La probabilité pour que parmi ces ménages, 4 disposent d'un lave-vaisselle est égal, après arrondi au millième, est égal à 0.267 ✔ .

LOI_BINOMIALE1
LOI_BINOMIALE1a
LOI_BINOMIALE1b

Propriété **Loi binomiale : espérance, variance et écart-type**

Pour X, variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$, on a :

- l'espérance $E(X) = np$
- la variance $V(X) = np(1-p)$
- l'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Moyenne **Dispersion**

$B(20\,;0,5)$

$E(X) = 20 \times 0,5 = 10$

		$E(X)$	$\sigma(X)$	
X_1	$B(18,0.4)$	7,2	2,08	← On peut espérer un nombre de succès autour de 7, 2
X_2	$B(10;0.2)$	2	1,26	← On peut espérer un nombre de succès autour de 2 avec plus d'optimisme

Méthode

4 Calculer des probabilités avec la loi binomiale

Les calculatrices « lycée » permettent de calculer des probabilités de la forme $p(X = k)$ et $p(X \leqslant k)$ (ainsi que $p(X \geqslant k)$ et $p(k \leqslant X \leqslant k')$ pour la numworks) mais il faut pouvoir calculer tous types de probabilités avec la loi binomiale.

1. Soit $X \sim \mathcal{B}(37\,;\,0{,}7)$. Calculer $P(X = 29)$.

Réponse : 0,082 ?

2. Soit $X \sim \mathcal{B}(37\,;\,0{,}7)$. Calculer $P(X < 29)$.

Réponse : 0,905 ?

3. Soit $X \sim \mathcal{B}(37\,;\,0{,}7)$. Calculer $P(X \geq 29)$.

Réponse : 0,176 ?

4. Soit $X \sim \mathcal{B}(37\,;\,0{,}7)$. Calculer $P(X < 29)$.

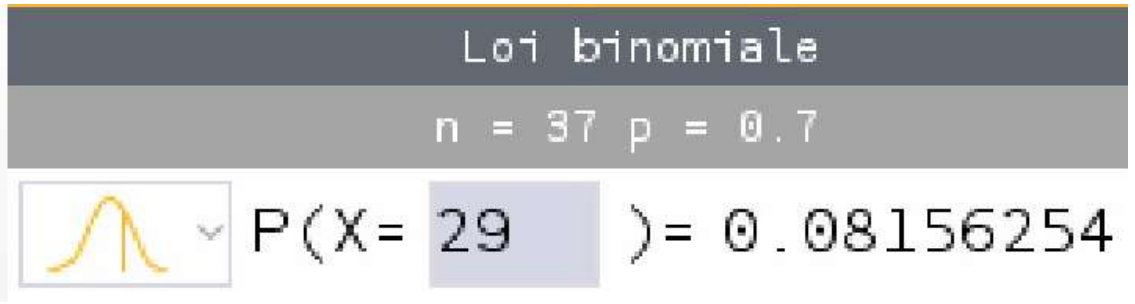
Réponse : 0,824 ?

Exercice → Numworks

① $X \hookrightarrow B(37\,;\,0{,}7)$

$P(X=29) = \binom{37}{29} \times 0{,}7^{29} \times 0{,}3^{8}$

$\simeq 0{,}08$



1. Soit $X \sim \mathcal{B}(37\,;\,0{,}7)$. Calculer $P(X = 29)$.

Réponse : 0,082 ?

2. Soit $X \sim \mathcal{B}(37\,;\,0{,}7)$. Calculer $P(X \leq 29)$.

Réponse : 0,905 ?

3. Soit $X \sim \mathcal{B}(37\,;\,0{,}7)$. Calculer $P(X \geq 29)$.

Réponse : 0,176 ?

4. Soit $X \sim \mathcal{B}(37\,;\,0{,}7)$. Calculer $P(X < 29)$.

Réponse : 0,824 ?

(4) $P(X < 29) = P(X \leq 28)$

... ; 25 ; 26 ; 27 ; 28 ; 29 ; 30 ; ...

$\simeq 0{,}824$

(5) $P(X > 25) = P(X \geqslant 26)$

... 23 ; 24 ; 25 ; 26 ; 27 ...

1. Soit $X \sim \mathcal{B}(37\,;\,0{,}7)$. Calculer $P(X = 29)$.

Réponse : 0,082 ?

2. Soit $X \sim \mathcal{B}(37\,;\,0{,}7)$. Calculer $P(X \leq 29)$.

Réponse : 0,905 ?

3. Soit $X \sim \mathcal{B}(37\,;\,0{,}7)$. Calculer $P(X \geq 29)$.

Réponse : 0,176 ?

4. Soit $X \sim \mathcal{B}(37\,;\,0{,}7)$. Calculer $P(X < 29)$.

Réponse : 0,824 ?

$P(X \neq 13) = 1 - P(X = 13)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

CALCULS_BINOMIALE1
CALCULS_BINOMIALE2

Exercice

Dans une petite ville, la proportion d'automobilistes ayant besoin d'une place réservée aux personnes à mobilité réduite (PMR) est estimée à 13 %.
On suppose que les besoins des automobilistes qui se présentent sont indépendants, avec cette même probabilité.
Un parking de 260 places reçoit autant d'automobilistes qu'il a de places. Il comporte 32 places réservées aux PMR.
On note X le nombre de places de stationnement PMR nécessaires pour ces automobilistes.

Modélisation $X_i = \begin{cases} 1 \text{ si le } i^{\text{ème}} \text{ automobiliste est PMR} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

suit une loi de BERNOULLI.

Les X_i sont indépendantes (énoncé)

Soit $X = \sum_{i=1}^{260} X_i$, $X \hookrightarrow B(260; 0,13)$

$X \hookrightarrow B(0,13)$

- Association PMR en Réunion
- ....

Exercice: appliquer la loi Binomiale

Dans une petite ville, la proportion d'automobilistes ayant besoin d'une place réservée aux personnes à mobilité réduite (PMR) est estimée à 13 %.
On suppose que les besoins des automobilistes qui se présentent sont indépendants, avec cette même probabilité.
Un parking de 260 places reçoit autant d'automobilistes qu'il a de places. Il comporte 32 places réservées aux PMR.
On note X le nombre de places de stationnement PMR nécessaires pour ces automobilistes.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement une place PMR de libre
On cherche à calculer P(X=31) ? = 0.066 ?

2) Quelle est la probabilité que ce ne soit pas suffisant
On cherche à calculer P(X>32) ? = 0.586 ?

3) Quelle est la probabilité que ce soit suffisant
On cherche à calculer P(X≤32) ? = 0.414 ?

4) Quelle est la probabilité pour qu'il manque exactement une place pour PMR
On cherche à calculer P(X=33) ? = 0.073 ?

Modélisation $X_i = \begin{cases} 1 \text{ si le } i^{\text{ème}} \text{ automobiliste est PMR} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

suit une loi de BERNOULLI. $X \hookrightarrow B(0,13)$

Les X_i sont indépendantes (énoncé) : • Association PMR en Réunion • ....

Soit $X = \sum_{i=1}^{260} X_i$, $X \hookrightarrow B(260; 0,13)$

EXOID 134 LOI_BINOMIALE2a LOI_BINOMIALE2a
EXOID 133 LOI_BINOMIALE2 LOI_BINOMIALE2
EXOID 131 CALCULS_BINOMIALE1 CALCULS_BINOMIALE1
EXOID 126 LOI_BINOMIALE1c LOI_BINOMIALE1c

LOI_BINOMIALE2
LOI_BINOMIALE2a

Exercice 1 — Germination des graines

Une jardinerie vend des sachets de graines de 30 g. Pour une expérience, on utilise des pots de 350 mL et du terreau vendu 7 € le sac. Dans les conditions de l'expérience, chaque graine a une probabilité de 75 % de germer. On sème 11 graines de cette variété et on observe leur germination.

On note X le nombre de graines qui germent parmi les 11 graines semées.

Calculer la probabilité de l'événement suivant : « exactement 5 graines germent ».

X suit la loi binomiale de paramètres n = 11 et p = 0.75.

La probabilité demandée, arrondie au millième, est égale à 0.027 ?

Exercice 2 — Abonnements de transport

Dans un réseau de transport, un ticket coûte 1,4 €, le trajet étudié dure 19 minutes et 30 % des bus sont électriques. Dans le modèle étudié, 35 % des voyageurs possèdent un abonnement. On observe 6 voyageurs choisis au hasard.

On note X le nombre de voyageurs possédant un abonnement parmi les 6 voyageurs observés.

Calculer la probabilité de l'événement suivant : « exactement 0 voyageur possède un abonnement ».

$0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6$

$n = 6$ $\quad X \hookrightarrow \mathcal{B}(6 ; 0{,}35)$

$p = 0{,}35$

$P(X > 4) = P(X \geq 5)$

