

Chapitre 2:

VECTEURS, DROITES ET PLAN DE L'ESPACE

$$ax + by + c = 0$$

équation cartésienne

$$y = mx + p$$

équation réduite

Revoir: systèmes d'équations

Exercice 1 (Combinaison linéaire)

$\begin{cases} 5x - 4y = -19 \\ 2x - 2y = -8 \end{cases}$ admet pour solutions $x =$  et $y =$ .

(Système de deux équations à deux inconnues)

Rappel: ce sont des équations cartésiennes de droites du PLAN

SYSTEME_EQUATIONS_GRAPHE_COURS.html

Revoir: systèmes d'équations

Exercice 1 (combinaison linéaire)

$$\begin{cases} 5x - 4y = -19 \\ 2x - 2y = -8 \end{cases} \text{ admet pour solutions } x = \boxed{} \text{ et } y = \boxed{}.$$

$$\begin{cases} (5x - 4y = -19) \times 2 \\ (2x - 2y = -8) \times (-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 8y = -38 & (E_1) \\ -10x + 10y = 40 & (E_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 8y = -38 & (E_1) \\ 2y = 2 & (E_1 + E_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 8y = -38 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 8 \times 1 = -38 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = -30 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} -4x - 3y = 1 \\ (-2x - 4y = 8) \times (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 3y = 1 \\ 4x + 8y = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 3y = 1 \\ \frac{5 \times y}{5} = -\frac{15}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 3 \times (-3) = 1 \\ y = -3 \end{cases} \quad (-3) \times (-3)$$

$$\begin{cases} -4x + \frac{9}{-9} = \frac{1}{-9} \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-4 \times x}{-4} = \frac{-8}{-4} \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$x = \dots -4 + 4$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ -3 + 8 \\ \text{[scribbled out]} \end{array} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

SYSTEME_EQUATIONS_GRAPHE_COURS

$$\begin{cases} (-5x - 2y = -3) \times 4 \\ (-4x + 4y = -8) \times (-5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20x - 8y = -12 \\ 20x - 20y = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20x - 8y = -12 \\ \quad \quad \quad \underline{-28y = 28} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \underline{-28} \end{cases}$$

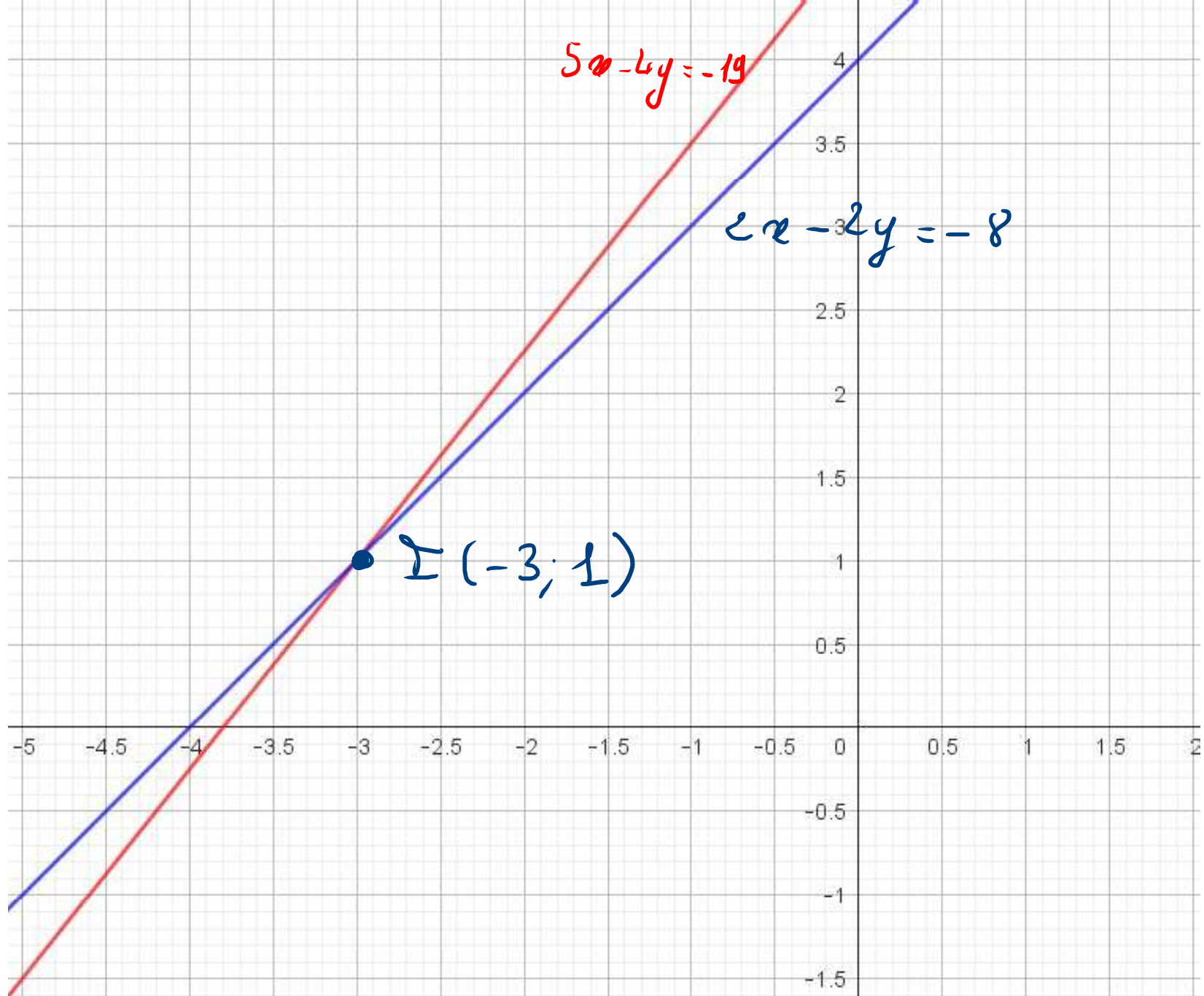
$$\begin{cases} -20x - 8 \times (-1) = -12 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20x + \underline{8} = \underline{-12} \\ y = -1 \end{cases}$$

$x = \dots$

$$\begin{cases} \underline{\frac{-20x}{-20} = \frac{-20}{-20}} \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$



SYSTEME_EQUATIONS_GRAPHE_COURS

Exercice 2

$$\begin{cases} 2x - 3y = 18 \\ -2x - 4y = 10 \end{cases} \text{ admet pour solutions } x = \boxed{3} \text{ et } y = \boxed{-4}.$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 18 \quad (E_1) \\ -2x - 4y = 10 \quad (E_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 18 \quad (E_1) \\ -7y = 28 \quad (E_1 + E_2) \end{cases}$$

Pas besoin
de (x a)

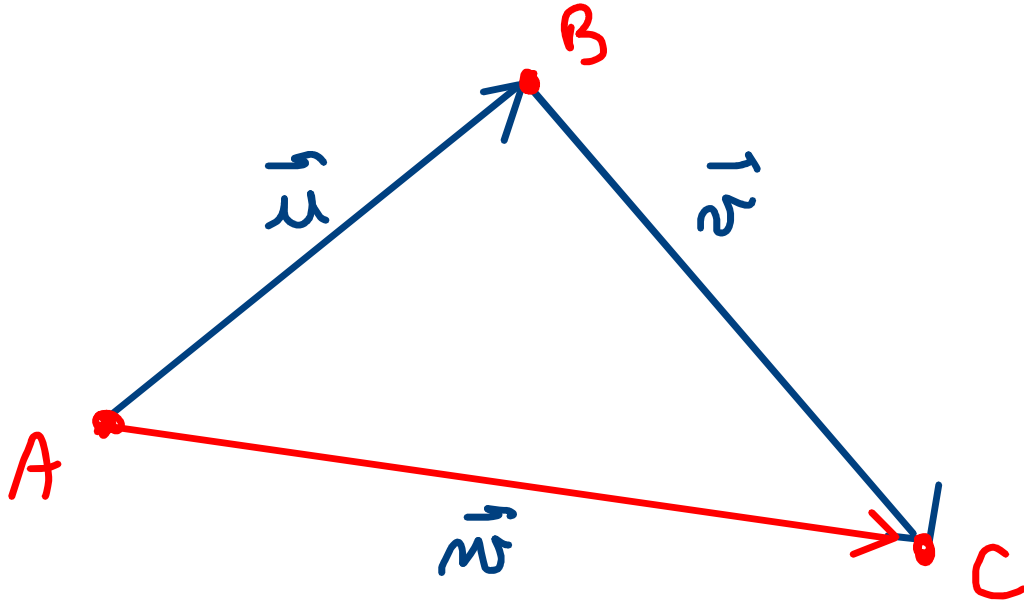
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 18 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \times (-4) = 18 \\ y = -4 \end{cases}$$

$+ 12$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

SYSTEME_EQUATIONS1
SYSTEME_EQUATIONS2

Revoir: CHASLES



$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

Revoir: calcul vectoriel élémentaire



$$-\vec{AB} = \vec{BA}$$

On a $\vec{AB} = \frac{1}{3} \vec{AD}$. Exprimer $\vec{DB}$ en fonction de $\vec{BA}$

Méthode: On utilise CHASLES

On part de $\vec{AB} = \frac{1}{3} \vec{AD}$

$$\vec{AB} = \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{BD})$$

$$\vec{AB} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{BD}$$

$$1 \vec{AB} - \frac{1}{3} \vec{AB} = \frac{1}{3} \vec{BD}$$

$$(1 - \frac{1}{3}) \vec{AB} = \frac{1}{3} \vec{BD}$$

$$\frac{2}{3} \vec{AB} = \frac{1}{3} \vec{BD}$$

$$\frac{1}{3} \vec{BD} = \frac{2}{3} \vec{AB}$$

$$\frac{1}{3} \vec{DB} = \frac{2}{3} \vec{BA}$$

$$\vec{DB} = 2 \vec{BA}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \vec{BD} &\times (-1) \\ &= -\frac{1}{3} \vec{BD} \\ &= \frac{1}{3} \vec{DB} \end{aligned}$$

Exercice (Le graphique ne sert qu'au contrôle de la réponse)

On considère trois points distincts S, V et M tels que: $\overrightarrow{SV} = -4\overrightarrow{SM}$.



① $\overrightarrow{SV} = -4\overrightarrow{SM}$

$\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SV} = -4\overrightarrow{SM}$

$1\overrightarrow{SM} + 4\overrightarrow{SM} = -\overrightarrow{SV}$

$5\overrightarrow{SM} = -1\overrightarrow{SV}$

$\overrightarrow{SM} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{SV}$

(Charles)

Compléter les égalités suivantes par des fractions ou des entiers:

1) $\overrightarrow{SM} = \boxed{-1/5} \overrightarrow{MV}$

2) $\overrightarrow{SV} = \boxed{-4/5} \overrightarrow{VM}$

3) $\overrightarrow{VM} = \boxed{5/4} \overrightarrow{VS}$

On considère trois points distincts S, V et M tels que: $\vec{SV} = -4\vec{SM}$.



Compléter les égalités suivantes par des fractions ou des entiers:

1) $\vec{SM} = \boxed{-1/5} \square \vec{MV}$

2) $\vec{SV} = \boxed{-4/5} \square \vec{VM}$

3) $\vec{VM} = \boxed{5/4} \square \vec{VS}$

① $\vec{SV} = -4\vec{SM}$

$\vec{SM} + \vec{SV} = -4\vec{SM}$ (Charles)

$1\vec{SM} + 4\vec{SM} = -\vec{SV}$

$5\vec{SM} = -\vec{SV}$

$\vec{SM} = -\frac{1}{5}\vec{SV}$

② $\vec{SV} = -4\vec{SM}$

$\vec{SV} = -4(\vec{SV} + \vec{VM})$

$\vec{SV} = -4\vec{SV} - 4\vec{VM}$

$1\vec{SV} + 4\vec{SV} = -4\vec{VM}$

$\frac{5\vec{SV}}{5} = \frac{-4\vec{VM}}{5}$

$\vec{SV} = -\frac{4}{5}\vec{VM}$

Test de COMBINAISON_LINEAIRE_CUBE1.html

CHASLES_BASES_DROITE0

CHASLES_BASES_DROITE1

CHASLES_BASES_DROITE2

Apprendre avec ou sans IA
Découverte filières PREPA à leconte

1 Les vecteurs de l'espace

Définition Vecteurs

Soient A et B deux points de l'espace, la transformation qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que ABM'M soit un parallélogramme s'appelle la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

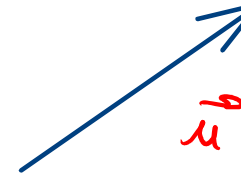
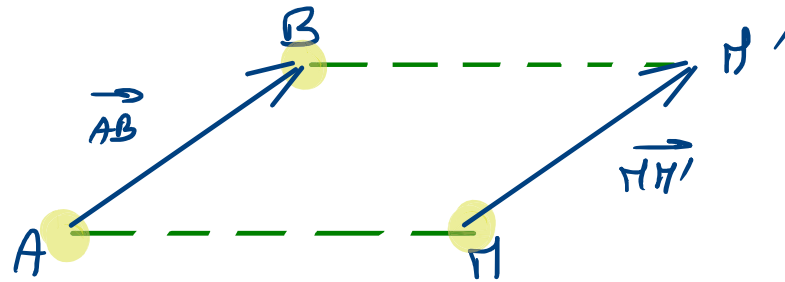
Comme, dans le plan, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont égaux et on dit également qu'ils sont deux représentants d'un vecteur unique noté $\vec{u}$.

1 Les vecteurs de l'espace

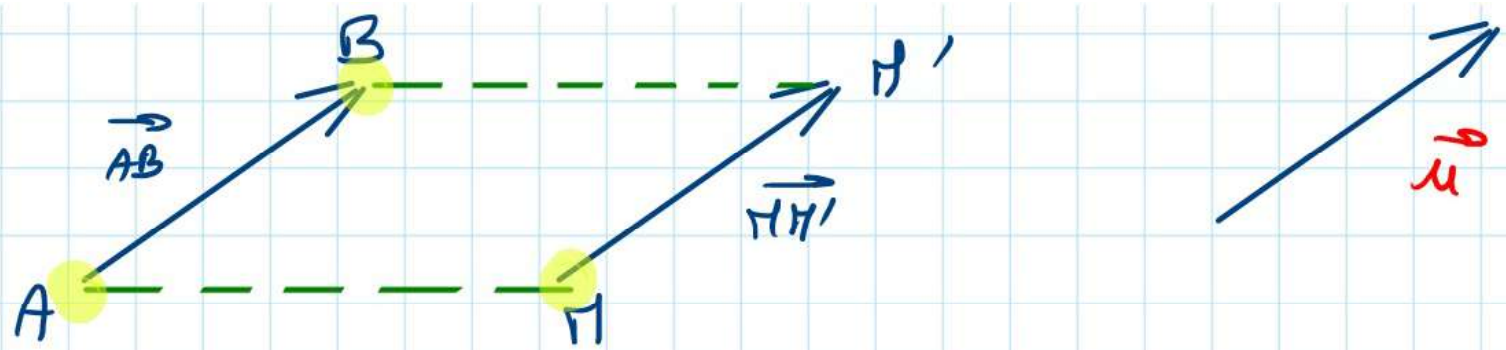
Définition Vecteurs

Soient A et B deux points de l'espace, la transformation qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que ABM'M soit un parallélogramme s'appelle la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

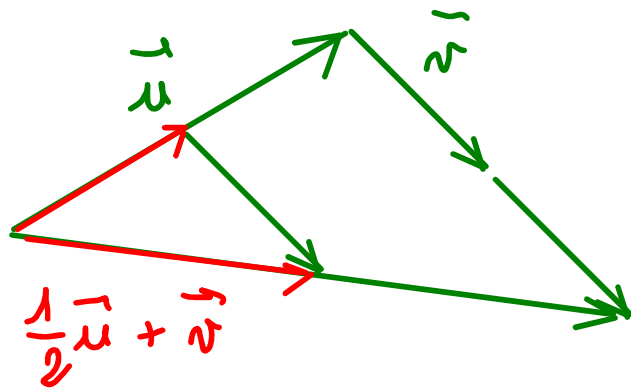
Comme, dans le plan, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont égaux et on dit également qu'ils sont deux représentants d'un vecteur unique noté $\vec{u}$.



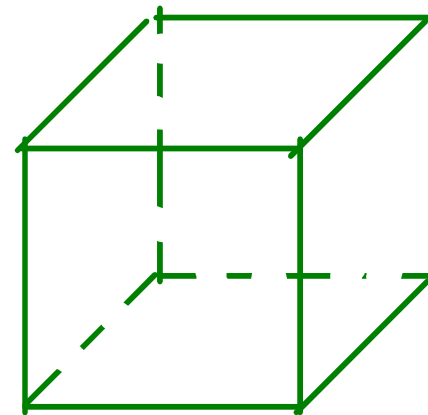
Propriété: combinaison linéaire



Propriété: combinaison linéaire



$$\vec{u} + 2\vec{v}$$



Propriété: combinaison linéaire

Soit $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ une famille de n vecteurs.

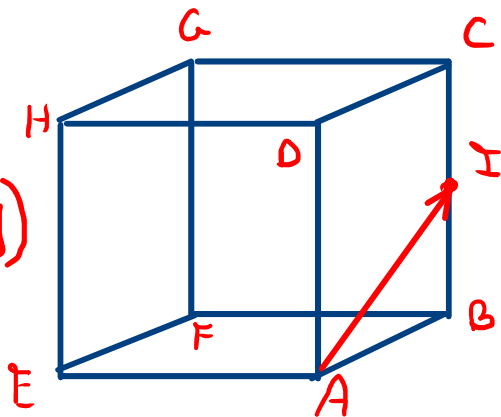
Soit $\vec{v}$ un vecteur donné.

On dit que $\vec{v}$ est une combinaison linéaire (C.L.) de cette famille de vecteurs si $\vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n$
où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des réels.

Exemples

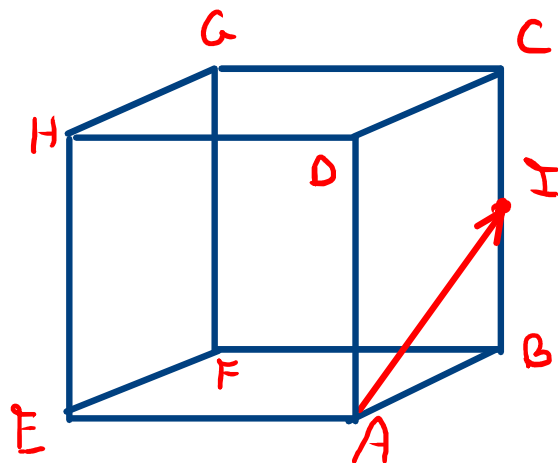
①

(I milieu de $[BC]$)

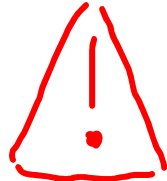


$$\vec{AI} = \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD} \quad (\vec{BC} = \vec{AD})$$

Donc $\vec{AI}$ est une combinaison linéaire de la famille de vecteurs $\{\vec{AB}; \vec{AD}\}$



Remarque



On pourrait aussi écrire

$$\vec{AI} = \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD} + 0 \vec{AE}$$

Donc $\vec{AI}$ est aussi une C.L. de la famille

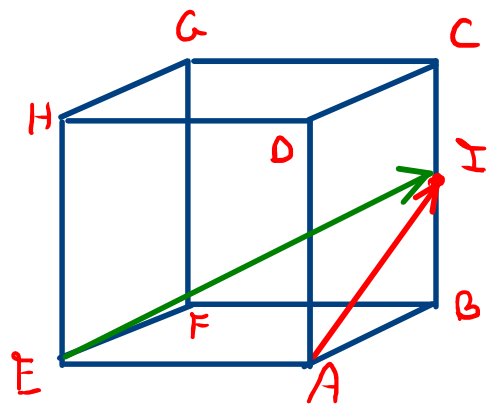
$\{\vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE}\}$ qui est plus grande.

On s'intéresse ici à la plus petite famille.

② Si on considère la famille $\{\vec{BC}\}$ et le vecteur $\vec{BI}$

on a $\vec{BI} = \frac{1}{2} \vec{BC}$ donc $\vec{BI}$ est une C.L. de la famille $\{\vec{BC}\}$

③ Si on considère la famille $\{\vec{EA}, \vec{EF}, \vec{EH}\}$ et le vecteur $\vec{EI}$

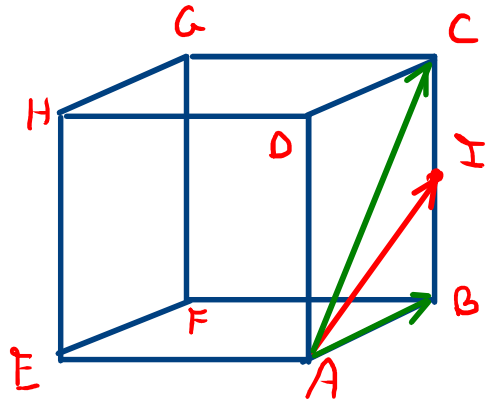


③ Si on considère la famille $\{\vec{EA}, \vec{EF}, \vec{EH}\}$ et le vecteur $\vec{EI}$

$$\vec{EI} = \vec{EA} + \vec{EF} + \frac{1}{2} \vec{EH}$$

$\vec{AB}$ $\vec{BC}$

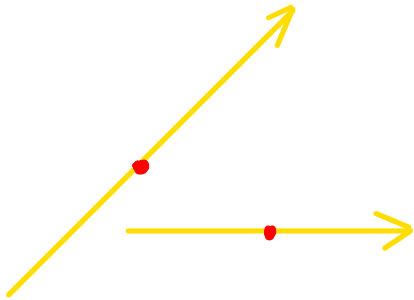
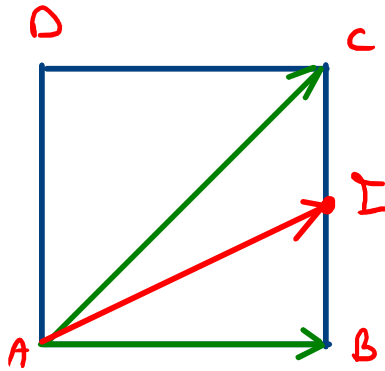
donc $\vec{EI}$ est une C.L. de $\{\vec{EA}, \vec{EF}, \vec{EH}\}$

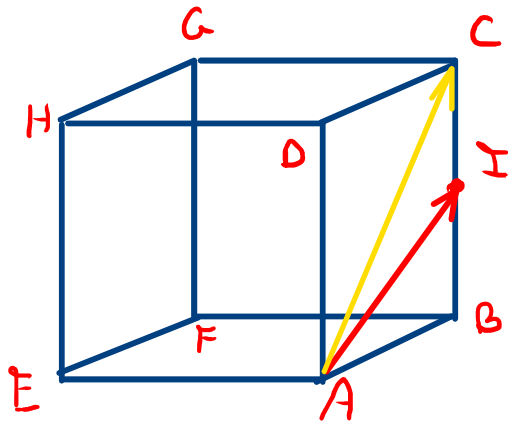


④ Soit la famille $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$ et le vecteur $\vec{AI}$

$$\vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$$

Donc $\vec{AI}$ est C.L. de $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$





⑤ On considère la famille $\{\vec{BA}, \vec{BC}\}$
et le vecteur $\vec{AC}$

$$\vec{AC} = -1\vec{BA} + 1\vec{BC}$$

Donc $\vec{AC}$ est C.L. de $\{\vec{BA}, \vec{BC}\}$

COMBINAISON_LINEAIRE_FAMILLES_CUBE1
COMBINAISON_LINEAIRE_FAMILLES_CUBE2

Définition Droite de l'espace

Une droite de l'espace est définie :

- soit par la donnée de deux points distincts,
- soit par la donnée d'un point et d'un vecteur non nul.

Propriété Caractérisation d'une droite de l'espace

La droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

(DROITE_VECTORIELLE2020.ggb)

$(A; \vec{u})$
ou $\vec{u}$ est un
vecteur directeur.

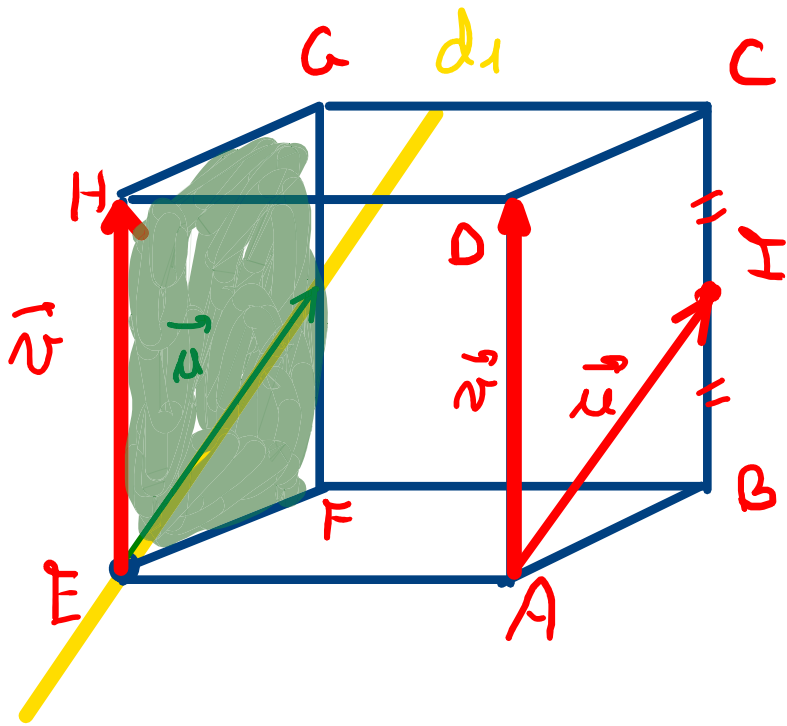
Définition Plan de l'espace

Un plan de l'espace est défini :

- soit par trois points non alignés (ABC),
- soit par un point et deux vecteurs non colinéaires $(A; \vec{u}, \vec{v})$.

(PLAN_VECTORIEL2020.ggb)

$(A; \vec{u}, \vec{v})$



Exercice

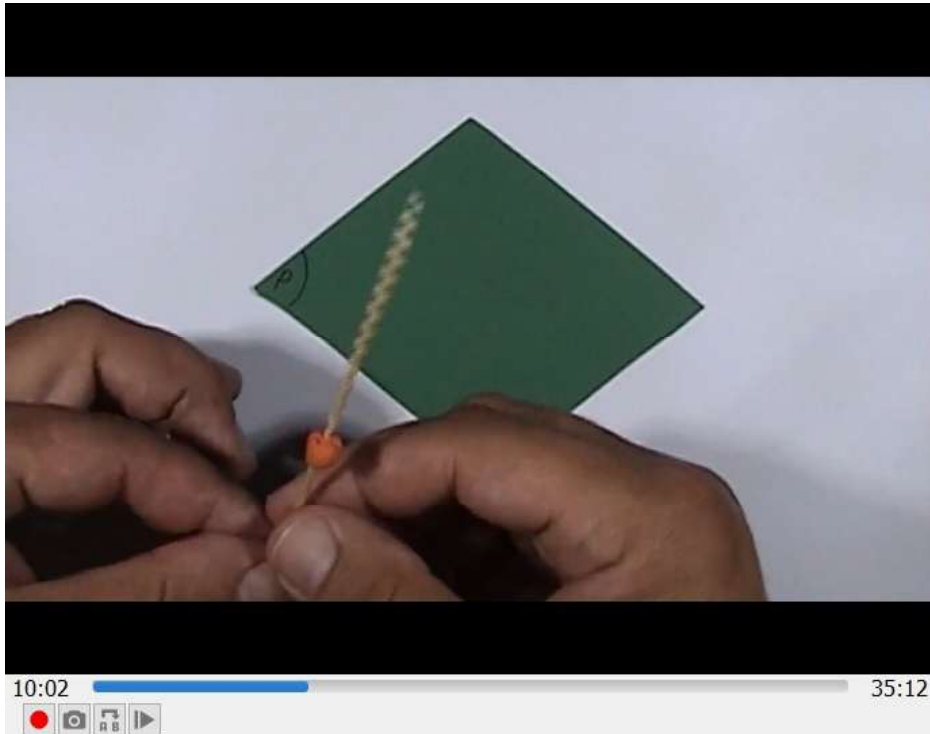
- ① La droite vectorielle $(E, \vec{u})$ est d_1
- ② Le plan vectoriel $(E, \vec{u}, \vec{v})$ est le plan (EFG)
 $(EFGH)$

DROITES_POINT_VECTEUR_CUBE1

PLANS_POINT_VECTEURS_CUBE1

DROITES_PLANS_SYNTHESE_SOLIDES1

2 Positions relatives de droites et de plans dans l'espace



Voilà vidéo

<https://www.youtube.com/watch?v=dW4Tt4ZiTb0&t>
(10 à 22 mn)

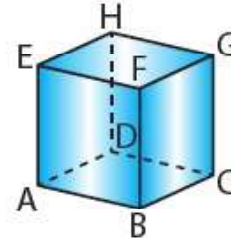
<https://www.youtube.com/watch?v=dW4Tt4ZiTb0&t=600s>

Activité

2 Utiliser des combinaisons linéaires de vecteurs

Dans un cube ABCDEFGH, on considère les points M et N définis par les relations suivantes.

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DH}$$



1. Démontrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

► **Remarque** On dit que $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

2. Démontrer de même que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}$.

3. Calculer alors le vecteur $4\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$.

4. En déduire que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ (on dit que A appartient au plan (BMN) et on note $A \in (BMN)$).

COMBINAISON_LINEAIRE_COPLANARITE_CUBE1
COMBINAISON_LINEAIRE_ALIGNEMENT_CUBE1

● $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DH}$

1. Démontrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

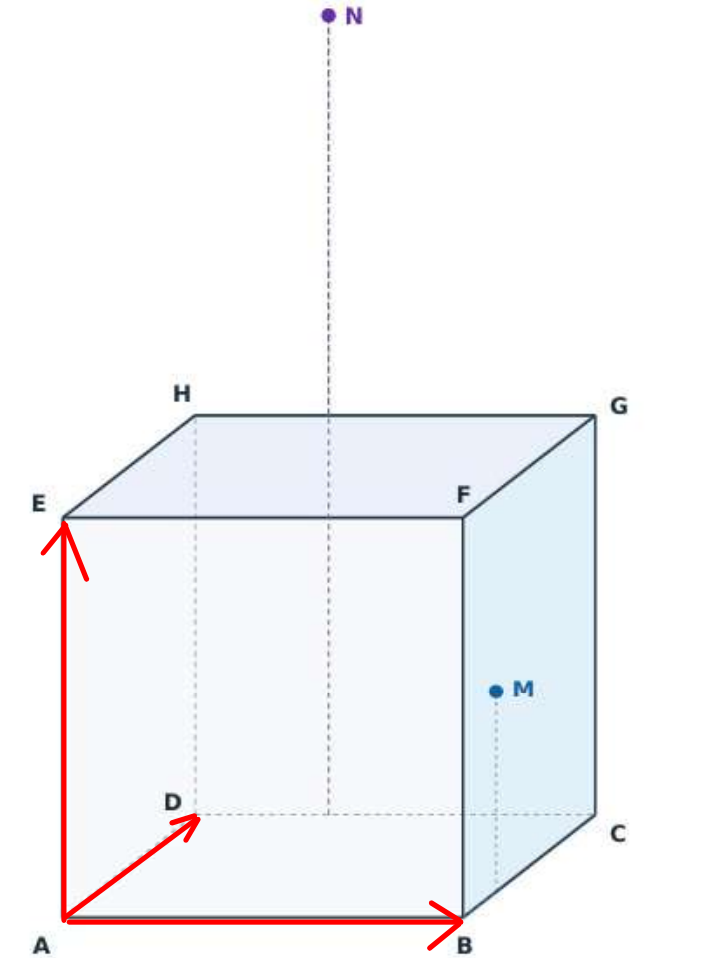
$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}) - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$$



1. Démontrer que $\vec{AM} = \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$.

$$\vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{BG} - \frac{1}{4}\vec{BC}$$

$$\vec{BA} + \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{CG}) - \frac{1}{4}\vec{AD}$$

$$\vec{BA} + \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{AE}) - \frac{1}{4}\vec{AD}$$

$$-\vec{BA} = \vec{AB}$$

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE} - \frac{1}{4}\vec{AD} + \vec{AB}$$

$$\frac{1 \times 2}{2 \times 2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DH}$$

2. Démontrer de même que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}$.

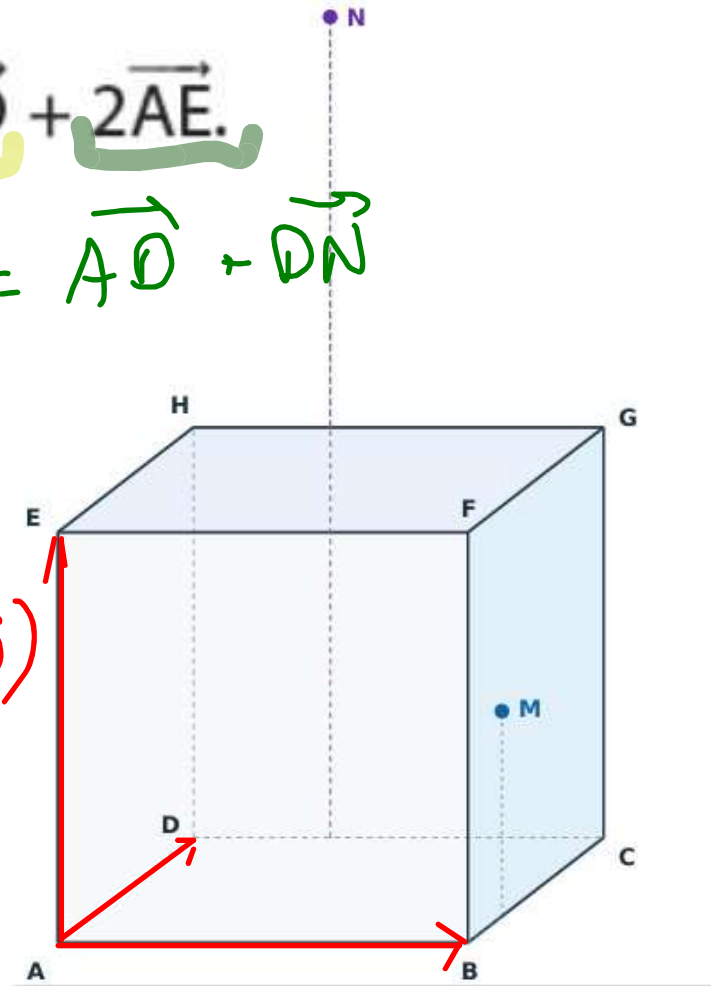
$$\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$$

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} \quad (-\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD})$$

d'où l'égalité.



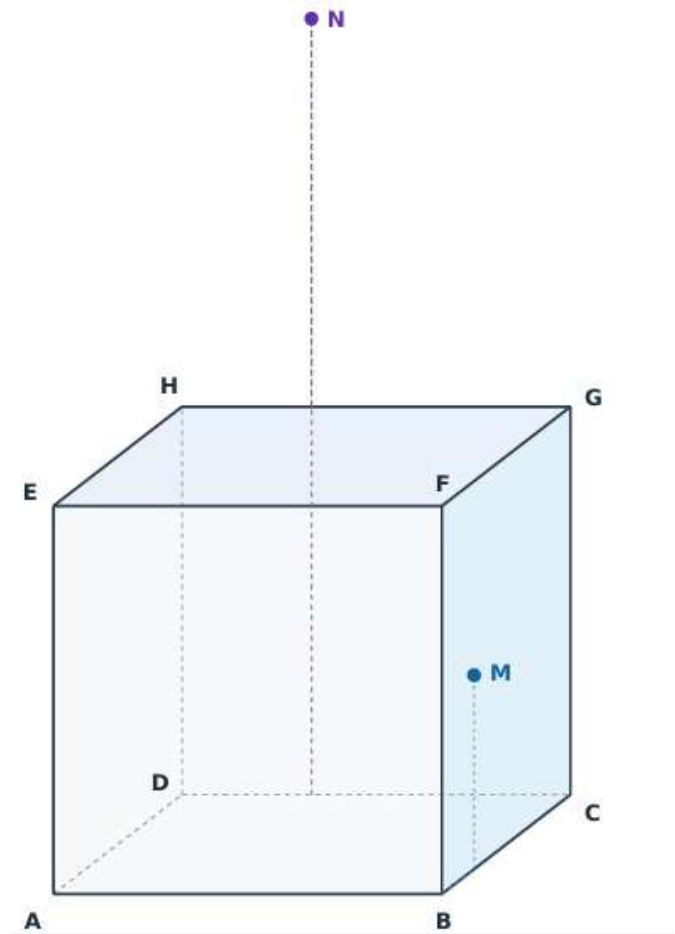
3. Calculer alors le vecteur $4\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$.

$$4\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = 4\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right) - \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}\right)$$

$$= 4\overrightarrow{AB} + \overset{4 \times \frac{1}{4}}{\overrightarrow{AD}} + 2\overrightarrow{AE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AE}$$

$$= \overset{4 - \frac{1}{3}}{\frac{11}{3}}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$$

$$4\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \frac{11}{3}\overrightarrow{AB}$$



1. Démontrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

2. Démontrer de même que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}$.

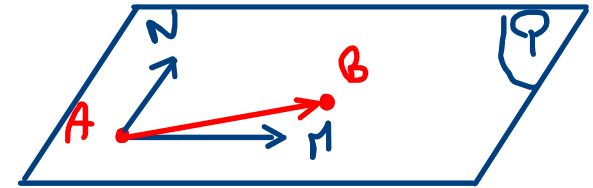
4. En déduire que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ (on dit que A appartient au plan (BMN) et on note $A \in (BMN)$)).

$$4 \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \frac{11}{3} \overrightarrow{AB}$$

$$\left(\frac{11}{3} \quad 0 \right) \times \frac{3}{11}$$

$$\frac{3}{11} \times \frac{11}{3} \overrightarrow{AB} = \frac{3}{11} (4 \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN})$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{12}{11} \overrightarrow{AM} - \frac{3}{11} \overrightarrow{AN}$$

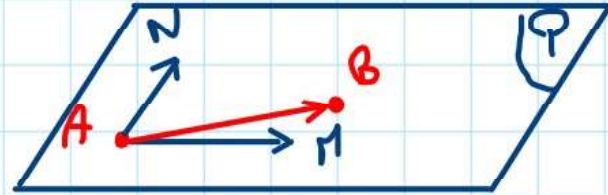


$$\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{AN}$$

donc $B \in \mathcal{P}$
 $B \in (AMN)$

$$\frac{3}{11} \times \frac{11}{3} \vec{AB} = \frac{3}{11} (4\vec{AM} - \vec{AN})$$

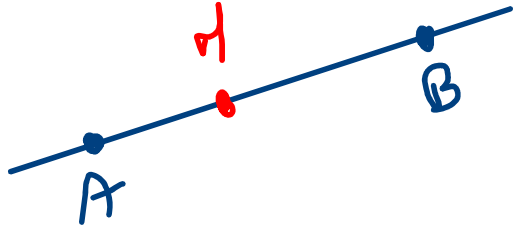
$$\boxed{\vec{AB} = \frac{12}{11} \vec{AM} - \frac{3}{11} \vec{AN}}$$



$$\vec{AB} = \alpha \vec{AM} + \beta \vec{AN}$$

donc $B \in \mathcal{P}$
 $B \in (AMN)$

Méthode : (Rappel de 2nde) Statuer l'alignement.



$$\vec{AM} = k \vec{AB} \Rightarrow M \in (AB)$$

$\vec{AM}$ est C.L. de $\{\vec{AB}\}$
 (Colinéaires)

3 Décomposition de vecteurs dans l'espace

Définition Base

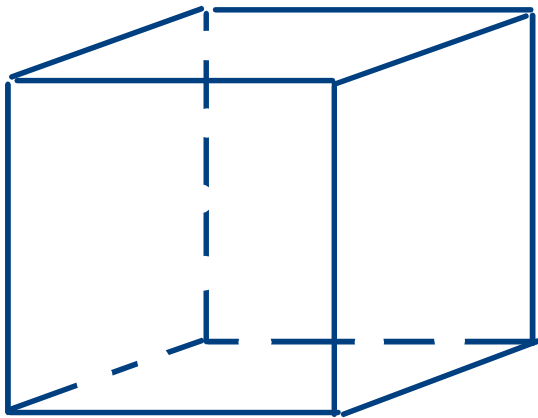
Trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ constituent une base de l'espace si et seulement si chacun de ces trois vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des deux autres.

→ On ne peut pas avoir

$$\vec{i} = \alpha \vec{j} + \beta \vec{k}$$

$$\vec{j} = \alpha' \vec{i} + \beta' \vec{k}$$

$$\vec{k} = \alpha'' \vec{i} + \beta'' \vec{j}$$



Si non on reste dans un plan

Définition Base

Trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ constituent une base de l'espace si et seulement si chacun de ces trois vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des deux autres.

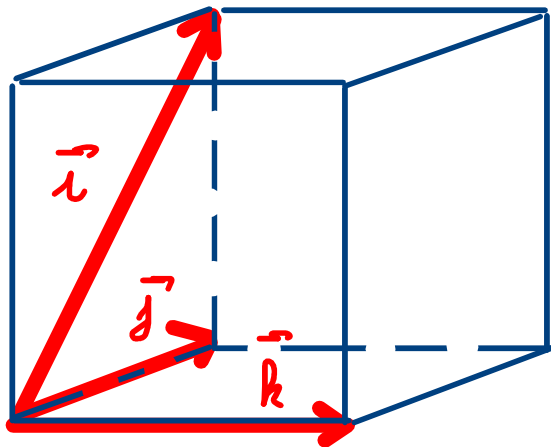
→ On ne peut pas avoir

Si on note dno un plan
Autrement dit les vecteurs
 $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires

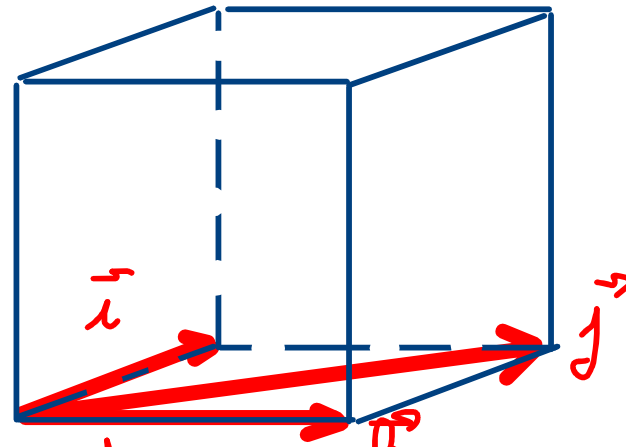
$$\vec{i} = \alpha \vec{j} + \beta \vec{k}$$

$$\vec{j} = \alpha' \vec{i} + \beta' \vec{k}$$

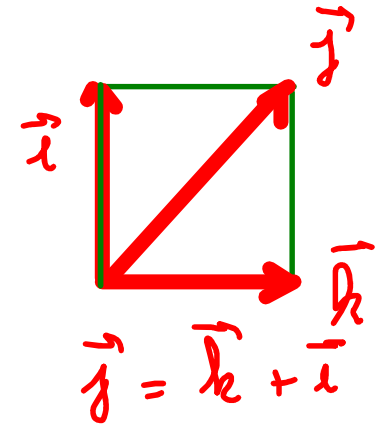
$$\vec{k} = \alpha'' \vec{i} + \beta'' \vec{j}$$



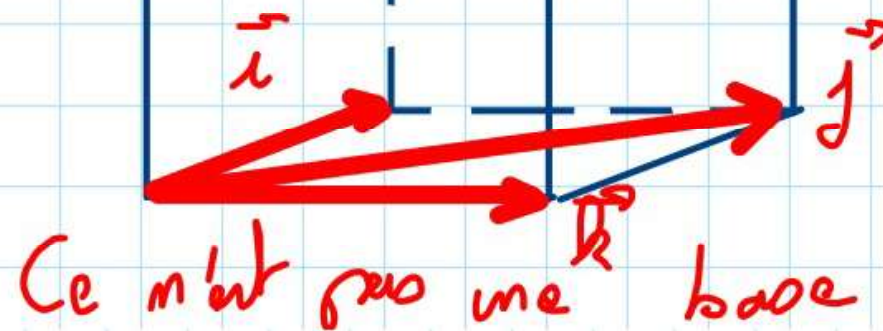
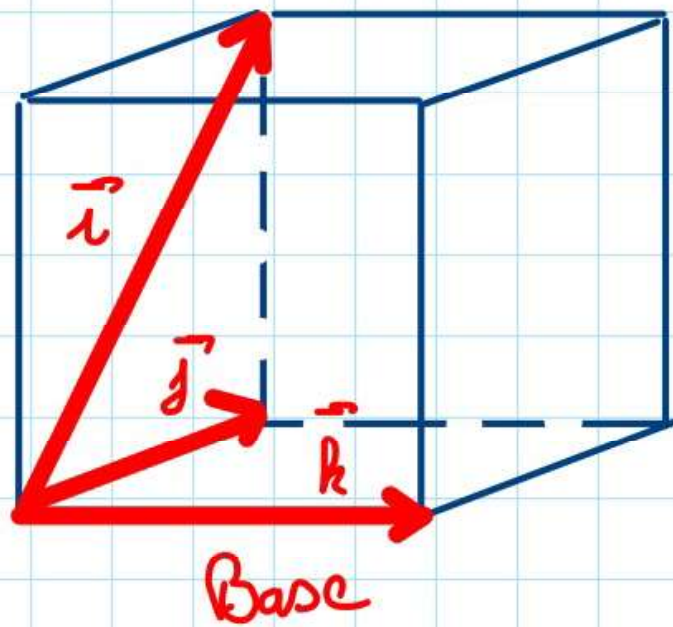
Base

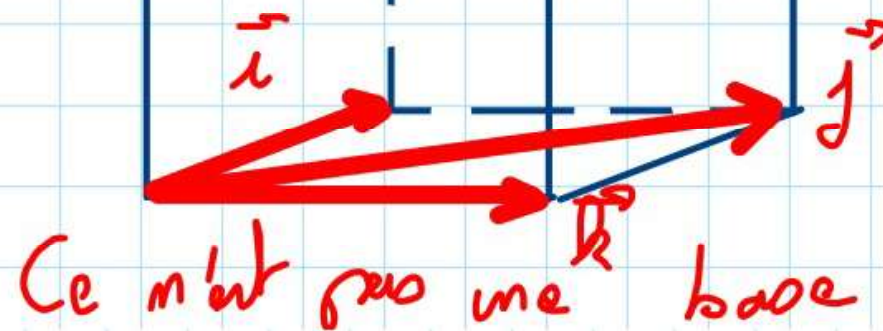
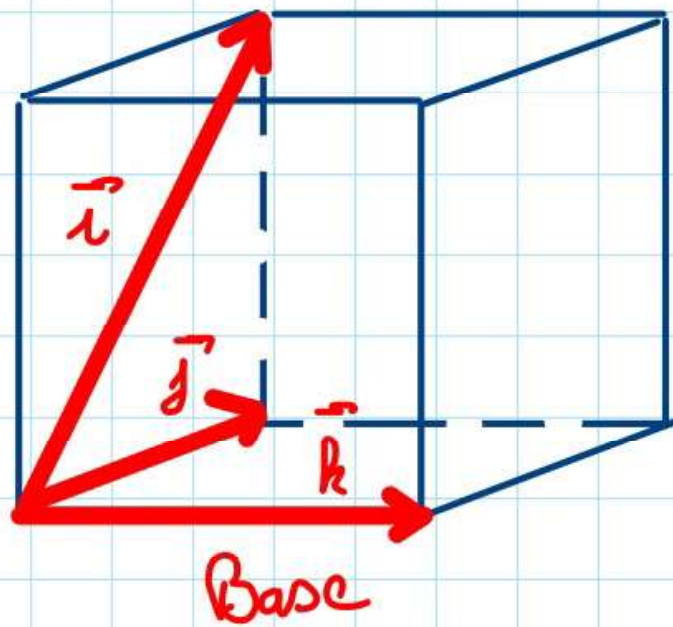


Ce n'est pas une base car coplanaires.



$$\vec{j} = \vec{k} + \vec{i}$$



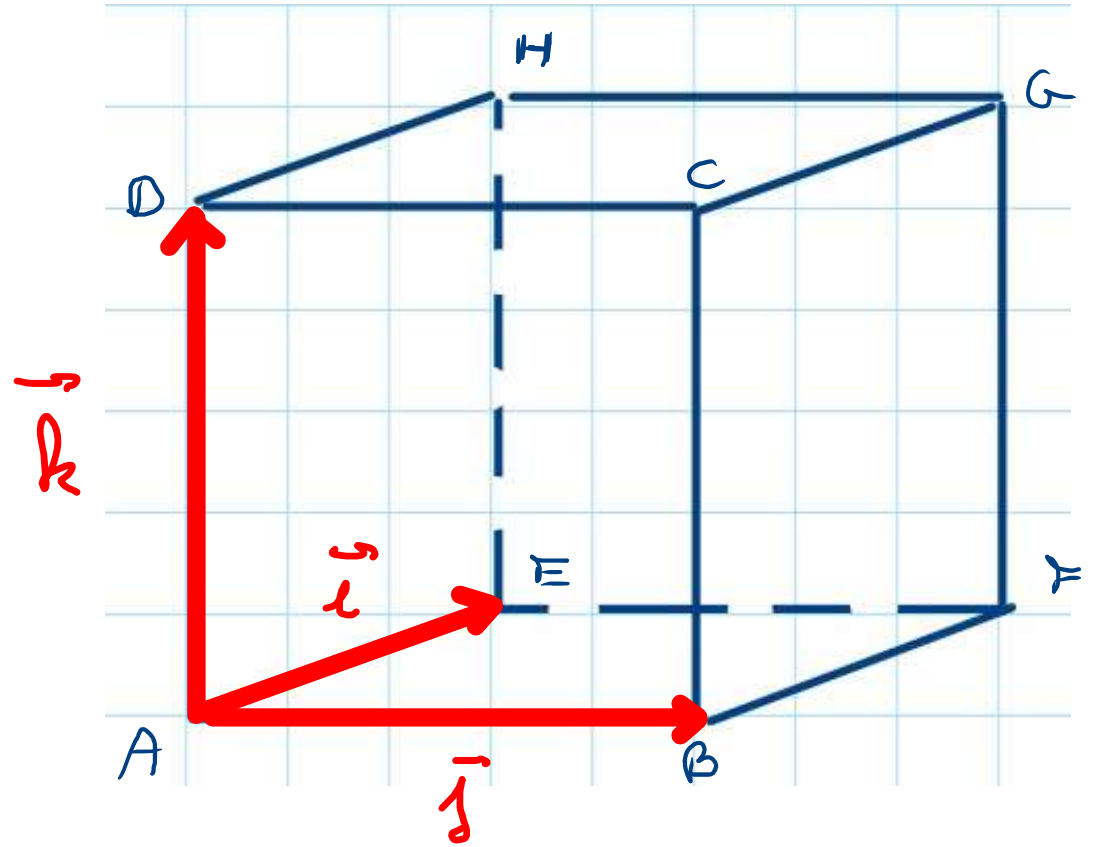


Exercice

$$\vec{l} = \vec{AE}$$

$$\vec{j} = \vec{AB}$$

$$\vec{k} = \vec{AD}$$



Exercice

$$\vec{i} = \vec{AE}$$

$$\vec{j} = \vec{AB}$$

$$\vec{k} = \vec{AD}$$

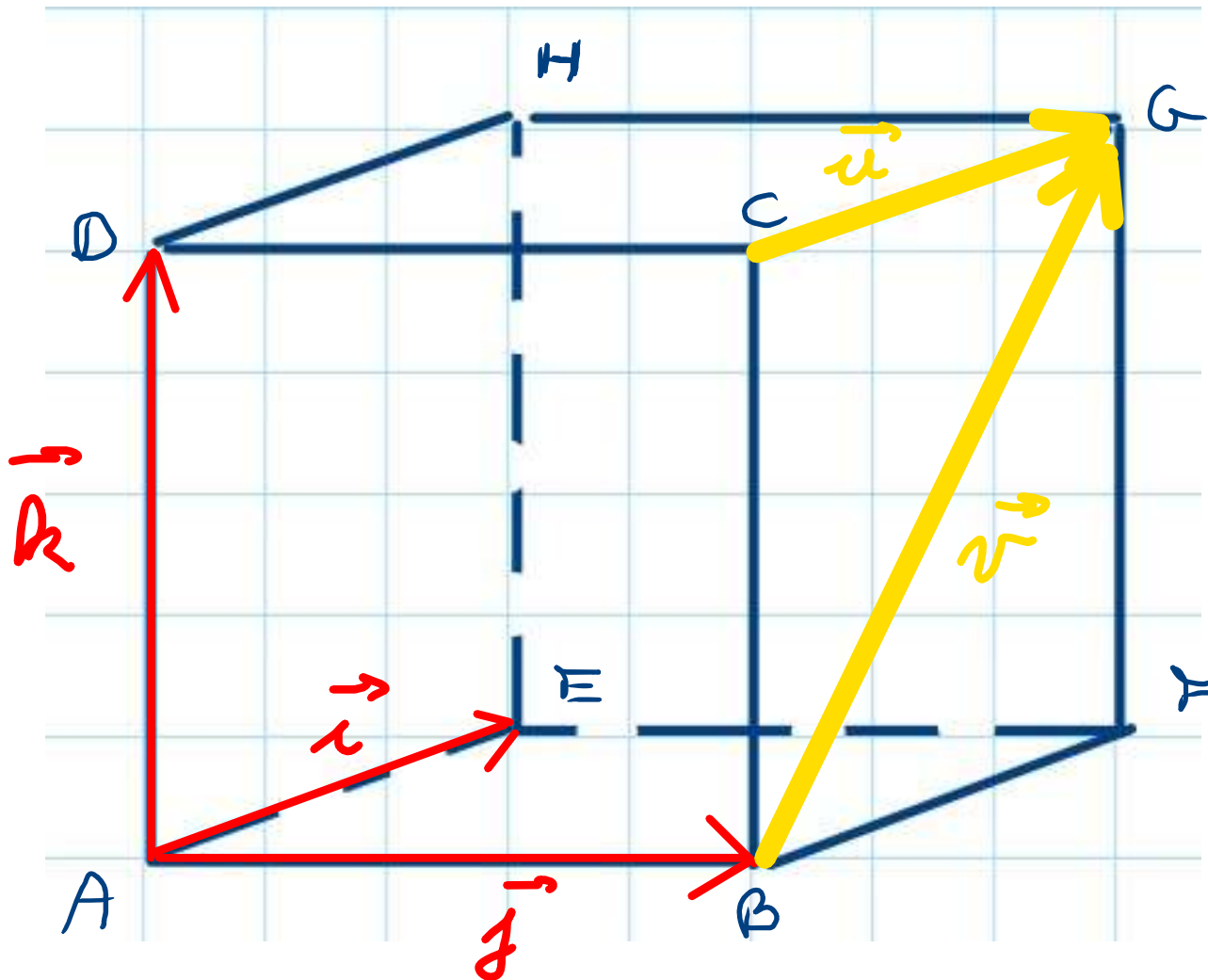
$$\vec{u} = \vec{CG} = \vec{AE} \\ = \vec{i}$$

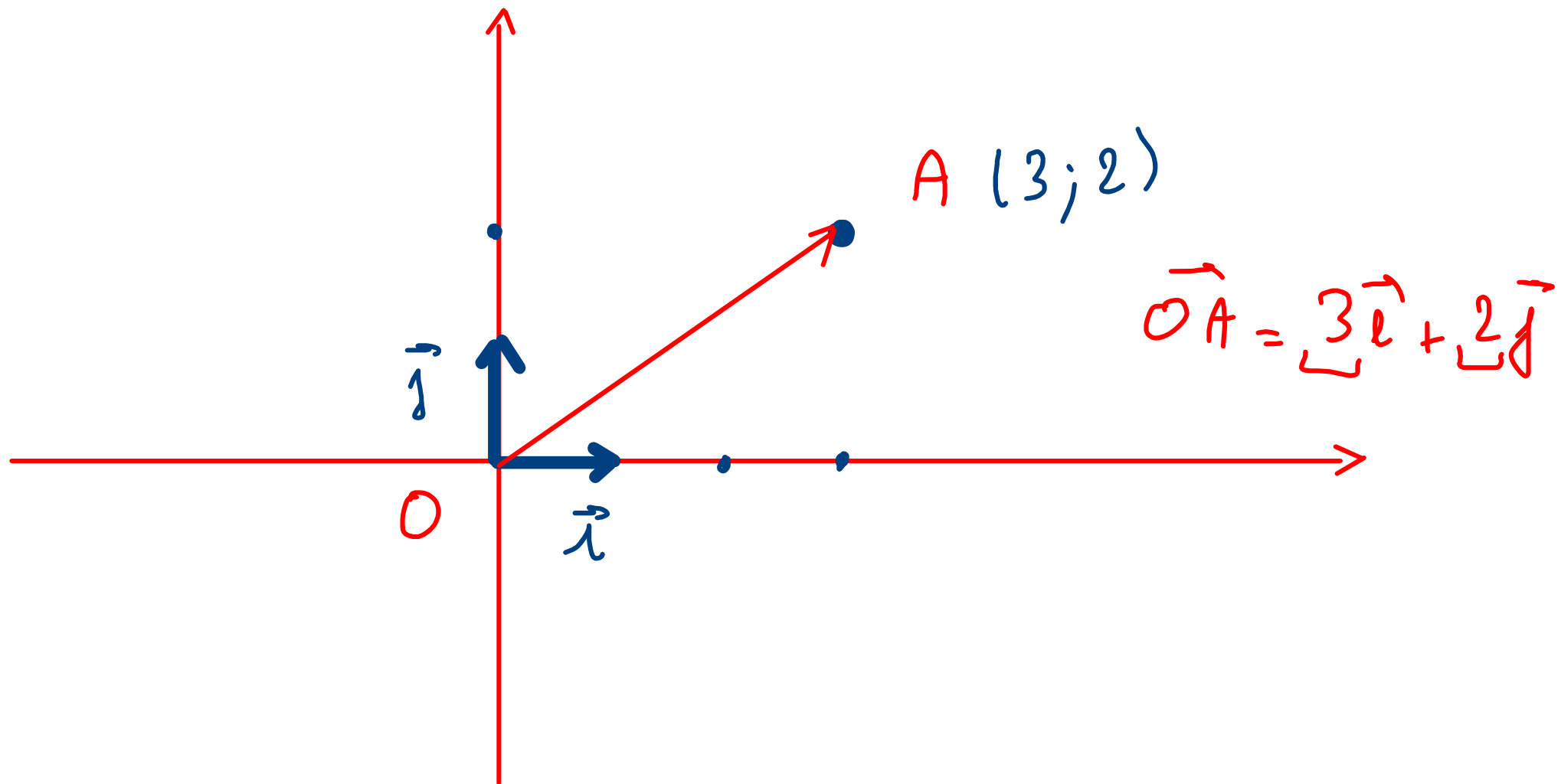
$$= 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{BF} + \vec{FG}$$

$$= \vec{i} + \vec{k}$$

$$= 1\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$$



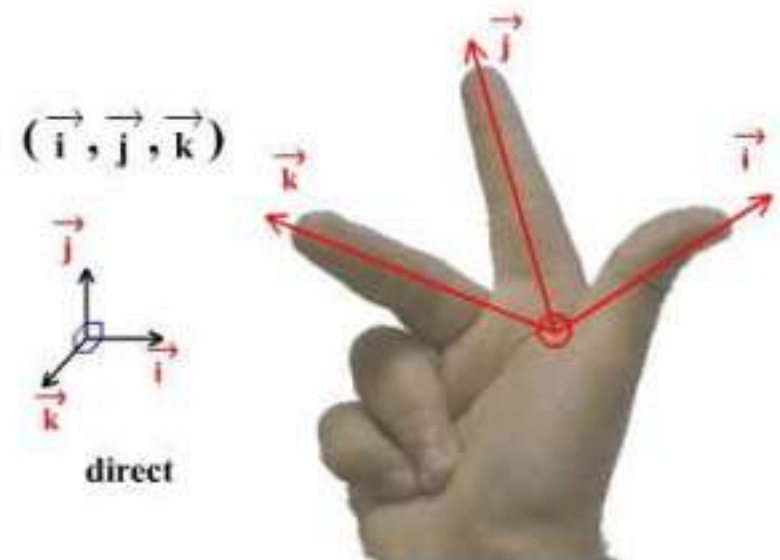
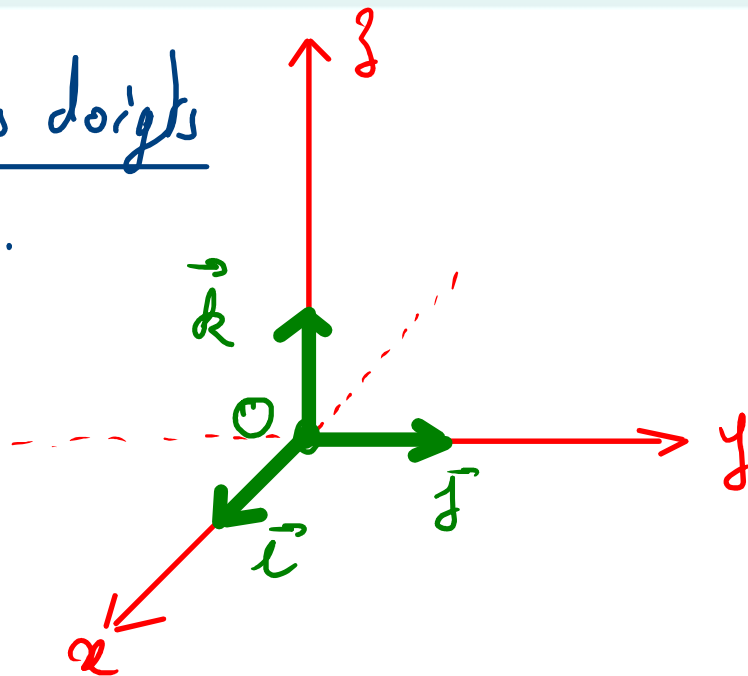


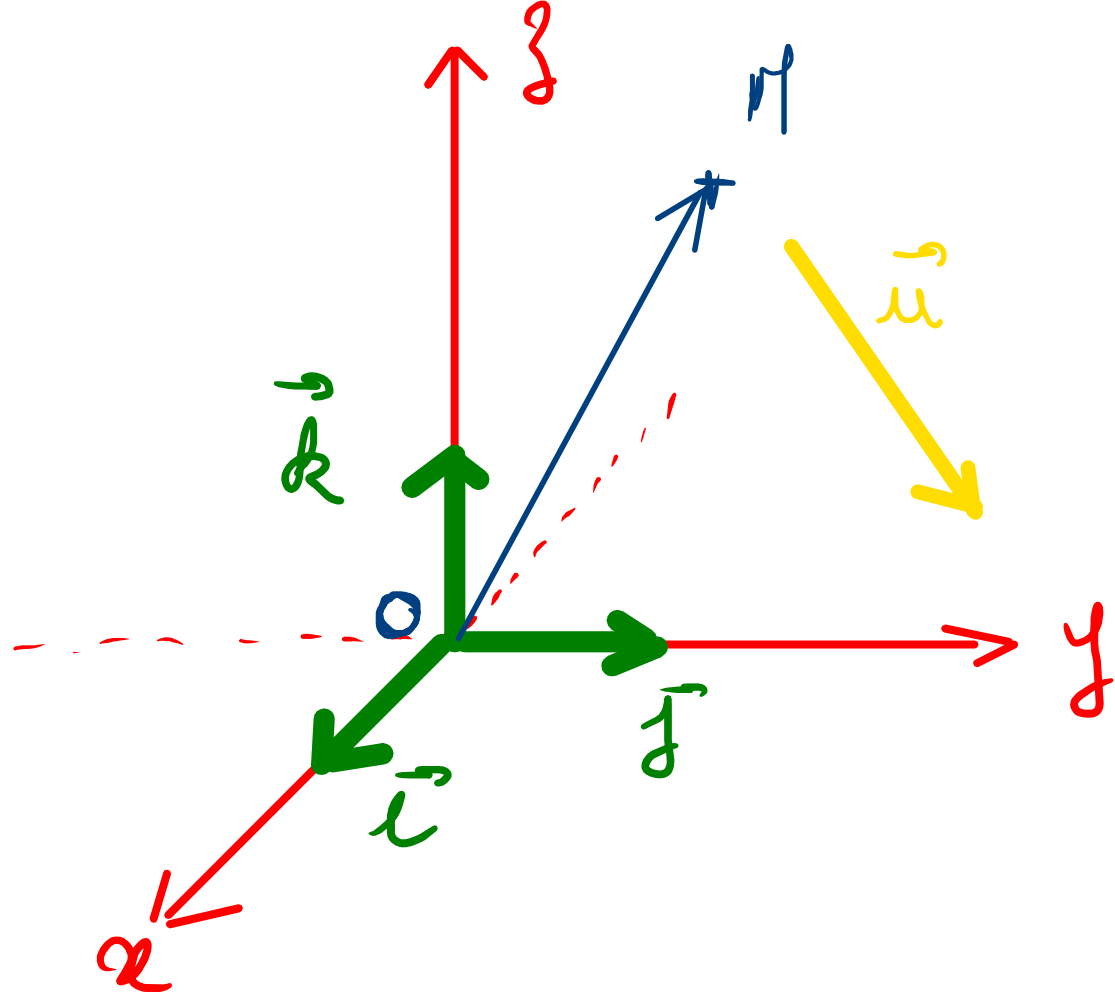
4 Répérage dans l'espace

Propriété Repère

On appelle repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace le quadruplet où O est un point de l'espace appelé **origine** et où le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une **base** de l'espace.

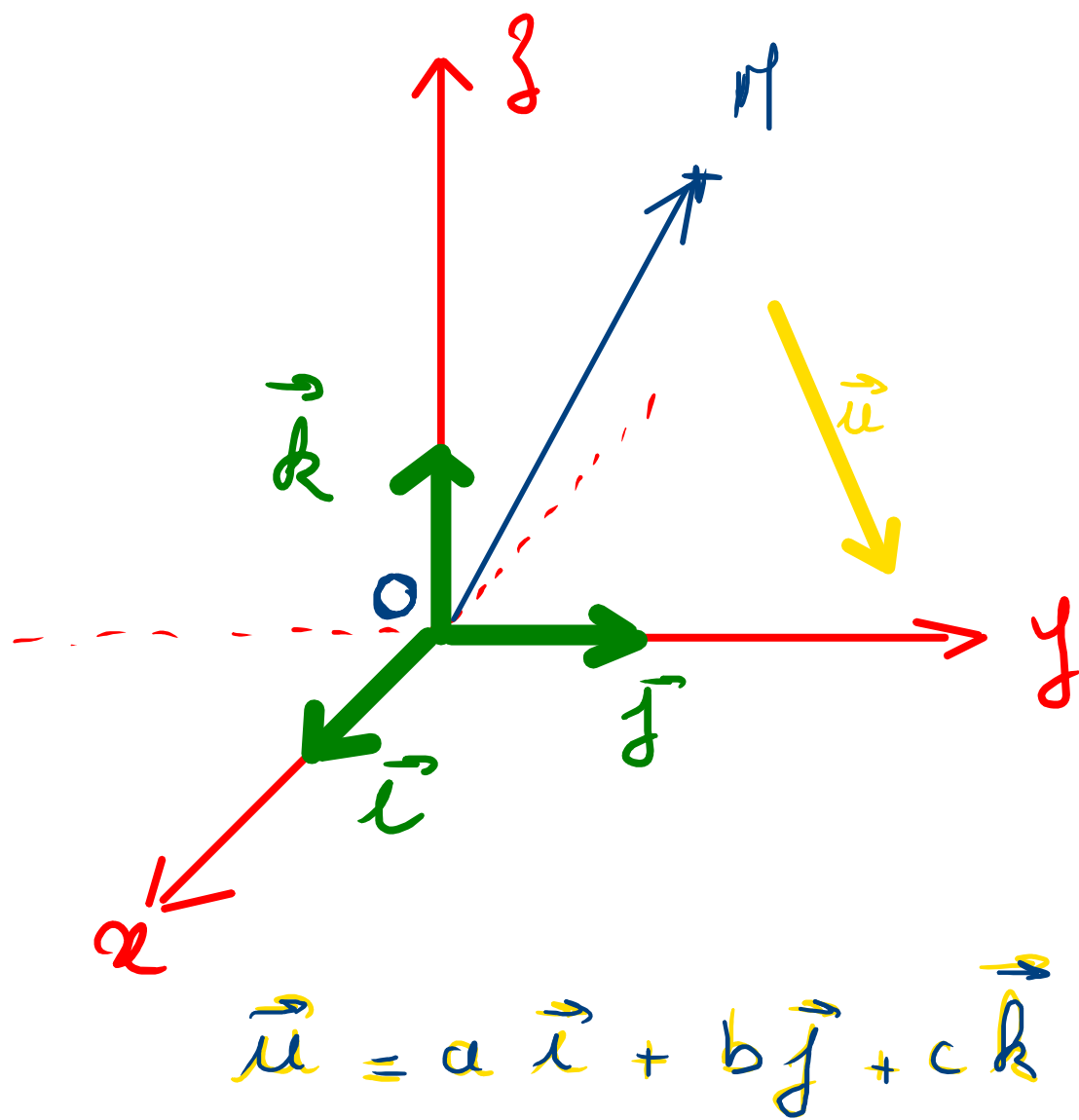
Règle des trois doigts
↳ direct.





$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: BASE

$(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: REPERE

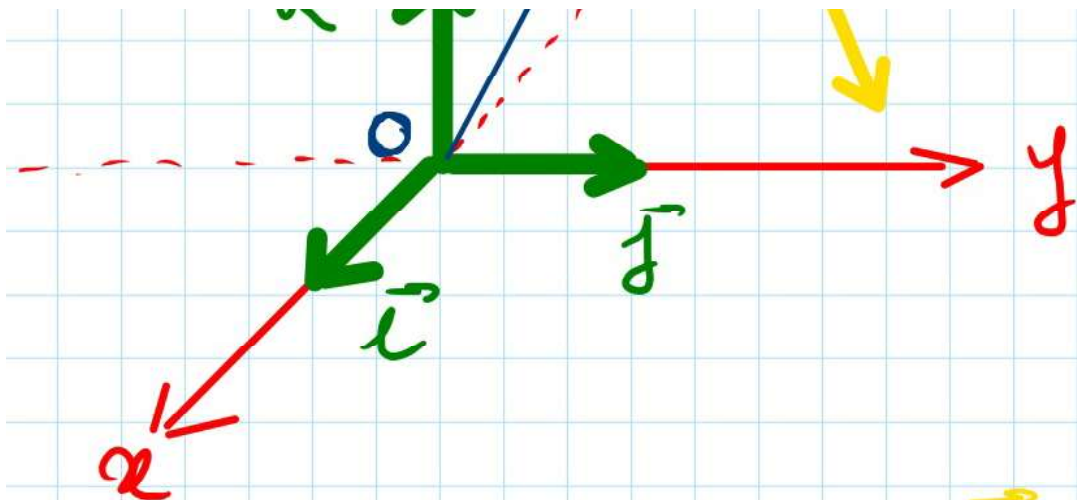


$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: BASE

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: REPERE

$$\vec{O\vec{M}} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

Coordonnées
de M ($x; y; z$)



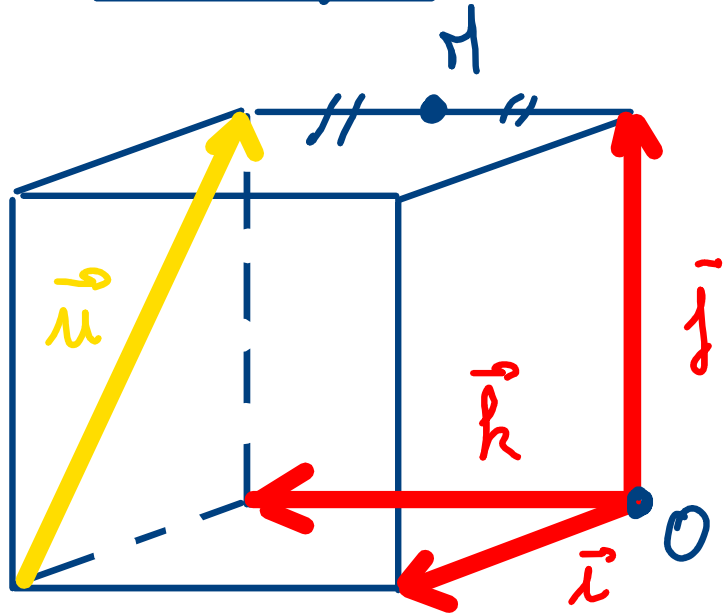
$$\vec{u} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$$

Coordonnées de
 $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

Coordonnées
de $M(x; y; z)$

Exemple:



$(0; \hat{i}; \hat{j}; \hat{k})$
Base
Repère

① Coordonnées de $\vec{u}$

$$\vec{u} = -1\hat{i} + 1\hat{j} + 0\hat{k}$$

Les coordonnées sont $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

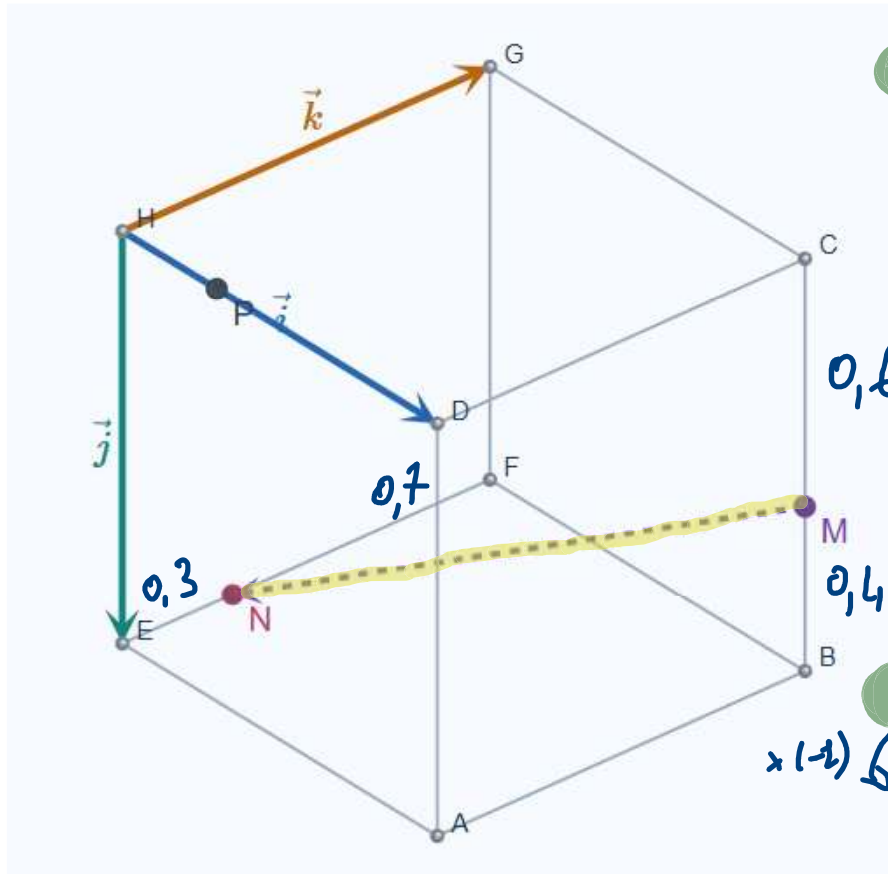
② Coordonnées de $\vec{M}$

$$\vec{OM} = 0\hat{i} + 1\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k}$$

Les coordonnées sont $M(0; 1; \frac{1}{2})$

Exercice 1

Pour tous les exercices qui suivent, cube d'arête 1
et base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$



● $\overrightarrow{BM} = 0,4\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{FN} = 0,7\overrightarrow{FE}$ $\overrightarrow{DP} = 0,7\overrightarrow{DH}$

Coordonnées de $\overrightarrow{MN}$.

0,6 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FN}$

$= 0,4\vec{j} + (-1)\vec{i} + (-0,7)\vec{k}$

$\overrightarrow{FN} = 0,7\overrightarrow{FE}$
 $= 0,7 \times (-1)\vec{k}$

● $\overrightarrow{BM} = 0,4\overrightarrow{BC}$
 $\times (-1) \downarrow$
 $\overrightarrow{MB} = 0,4\overrightarrow{CB}$
 $\overrightarrow{MB} = 0,4\vec{j}$

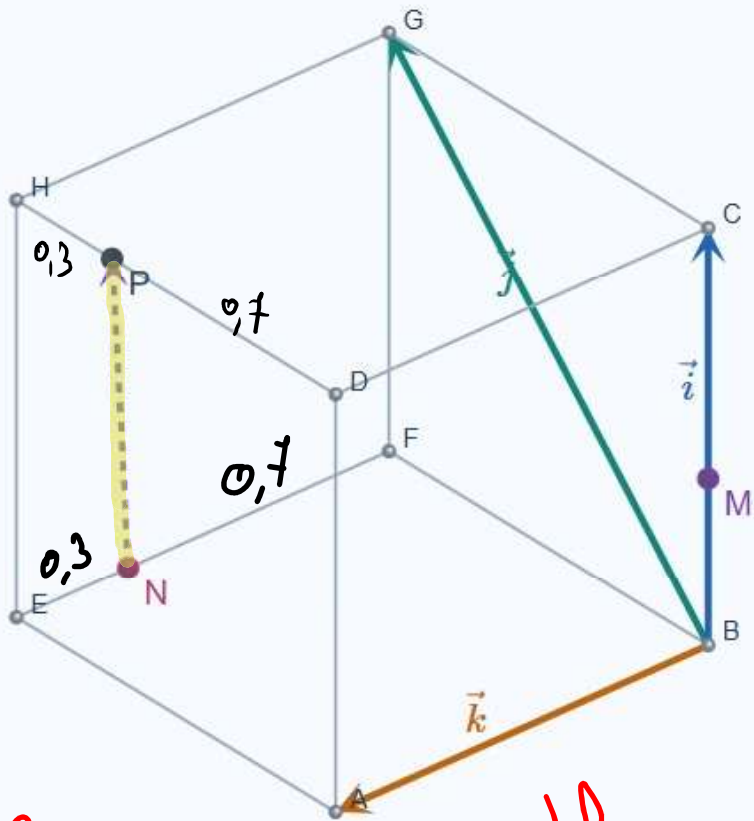
$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -1 \\ 0,4 \\ -0,7 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{CM} = 0,7\overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{BN} = 0,4\overrightarrow{BF} \quad \overrightarrow{HP} = 0,8\overrightarrow{HE}$$

$$\begin{aligned}\vec{CP} &= \vec{CO} + \vec{OH} + \vec{HP} \\ &= \vec{i} + \vec{k} + 0,8\vec{j}\end{aligned}$$

$$P(\vec{1}; 0,8; \vec{1})$$

Exercice 3



Regime non orthornorme.

$$\overrightarrow{BM} = 0,4\overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{FN} = 0,7\overrightarrow{FE} \quad \overrightarrow{DP} = 0,7\overrightarrow{DH}$$

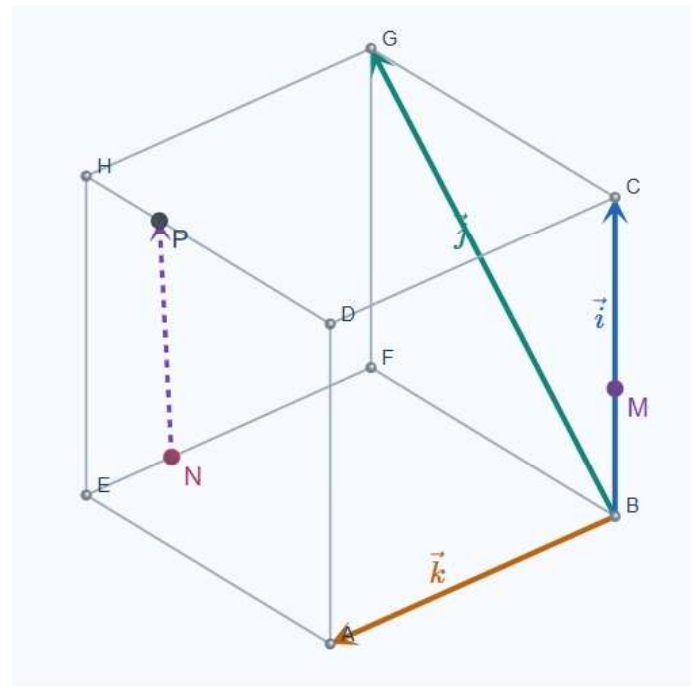
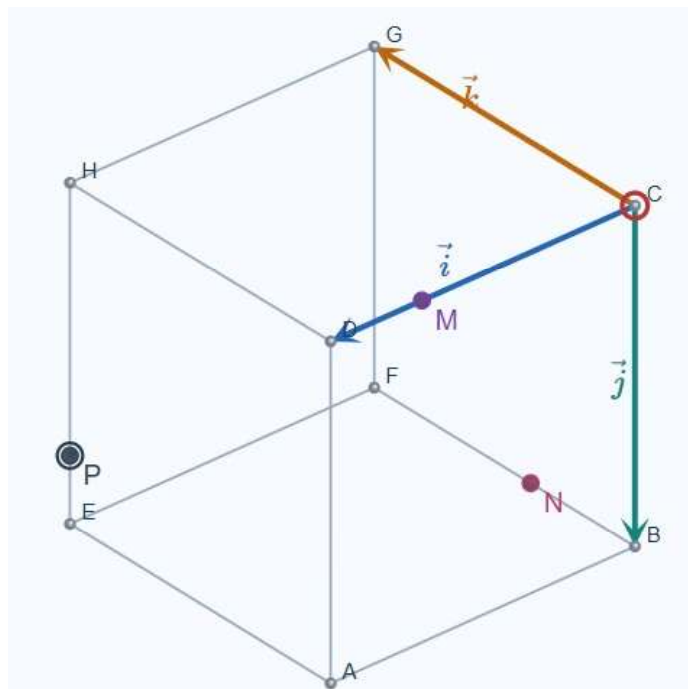
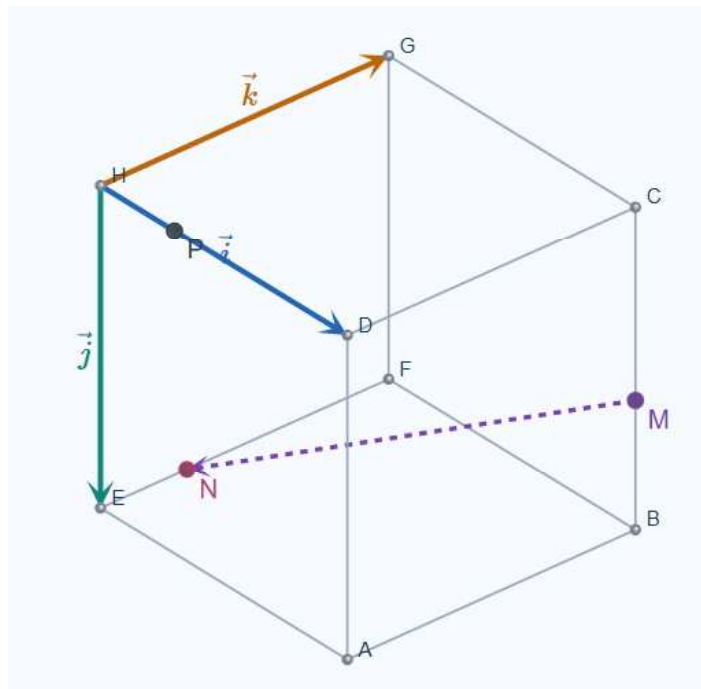
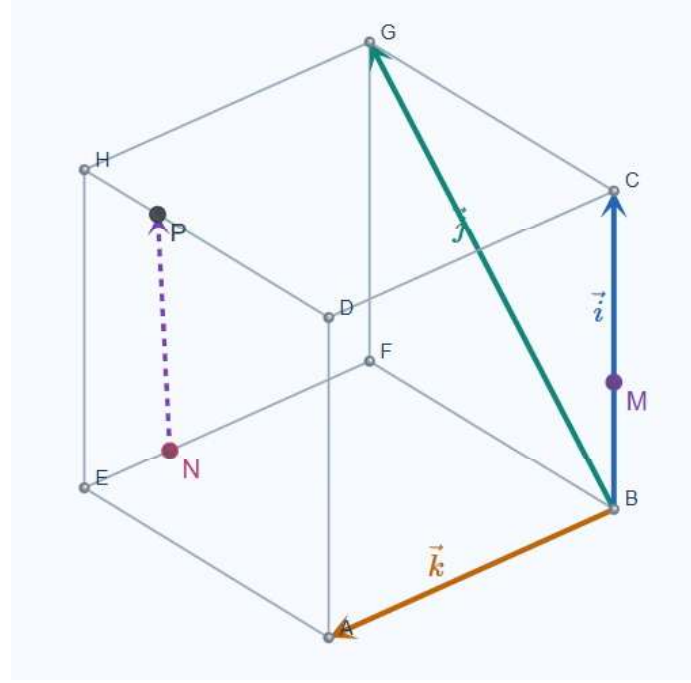
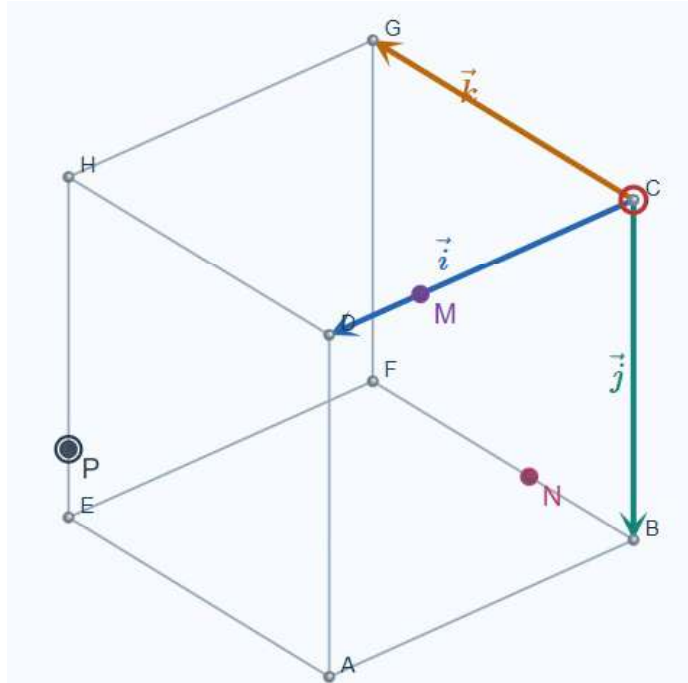
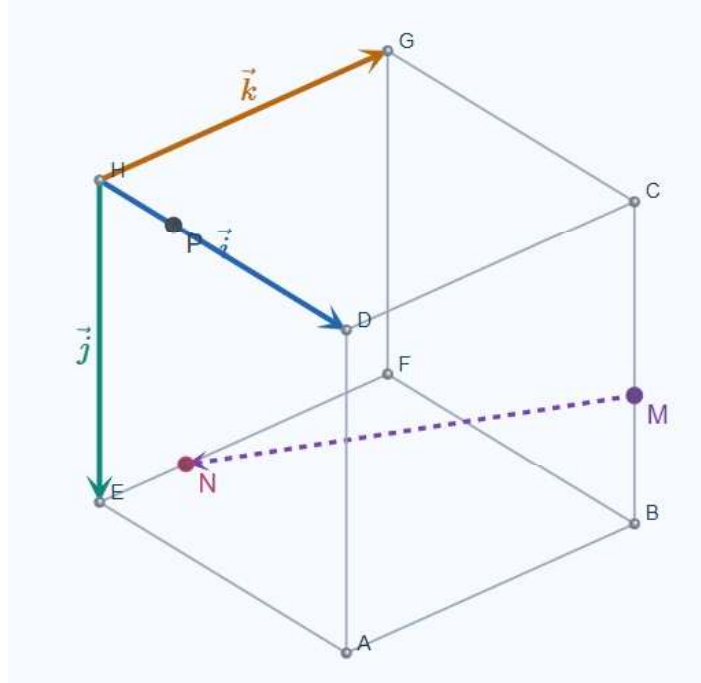
Coordonnées de $\vec{NP}$

$$\begin{aligned}\vec{NP} &= \vec{VE} + \vec{EH} + \vec{HP} \\ &= 0,3 \vec{h} + \vec{i} + 0,3 \vec{HD} \\ &= 0,3 \vec{h} + \vec{i} + 0,3 \vec{GC} \\ &= 0,3 \vec{h} + \vec{i} + 0,3 (\vec{GB} + \vec{BC}) \\ &= 0,3 \vec{h} + \vec{i} + 0,3 (-\vec{j}) + 0,3 \vec{i} \\ &= 1,3 \vec{i} + (-0,3) \vec{j} + 0,3 \vec{h}\end{aligned}$$

$$\vec{NP} = \begin{pmatrix} 1,3 \\ -0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

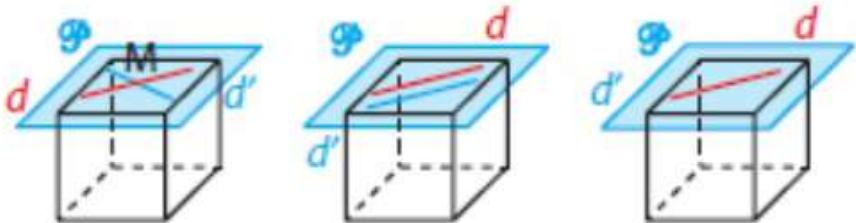
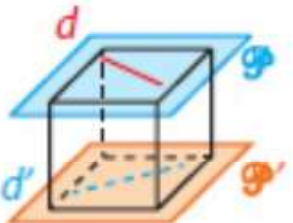
$$\vec{x} + 0,3 \vec{x}$$
$$(1 + 0,3) \vec{x}$$

COORDONNEES_BASES_REPERES_CUBE1



Propriété Positions relatives de deux droites

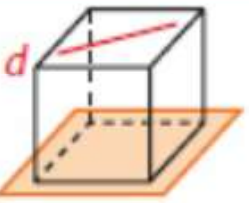
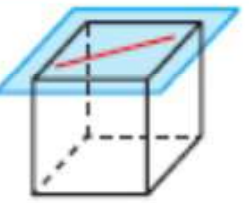
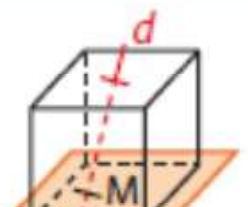
Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (c'est-à-dire incluses dans un même plan) soit non coplanaires.

d et d' sont coplanaires et sécantes en M ou strictement parallèles ou confondues	d et d' sont non coplanaires
	

Exemple Dans le cube ABCDEFGH les droites (AB) et (CE) ne sont pas coplanaires.

Propriété Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit d une droite et $\mathcal{P}$ un plan. Il existe trois configurations pour les positions relatives de d et de $\mathcal{P}$.

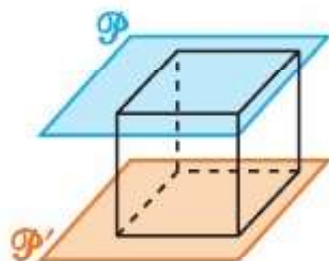
① d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$	② d est incluse dans $\mathcal{P}$	③ d est sécante à $\mathcal{P}$
		

Propriété

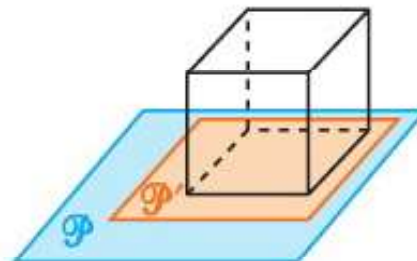
Positions relatives de deux plans

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans .
Il existe trois configurations pour les positions relatives de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$.

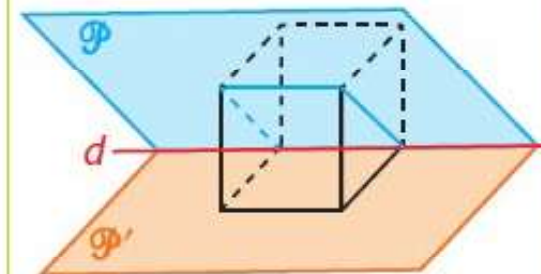
① $\mathcal{P}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}'$



② $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus



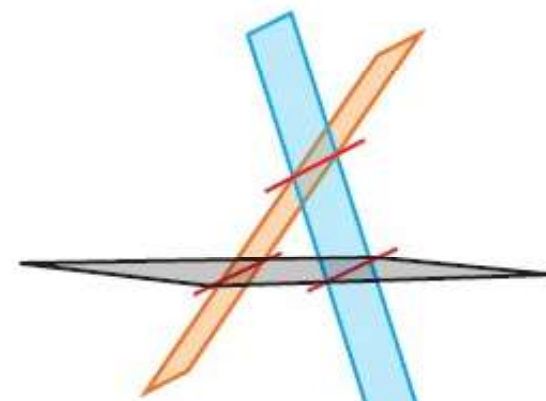
③ $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants en d



Théorème

Théorème du toit

Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ contiennent respectivement deux droites d et d' parallèles entre elles alors leur intersection d'' est parallèle à ces deux droites.



droite

$A(2; 4; 4)$

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$, (d)

$M(x; y; z) \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t \vec{u}$

 $(\overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires})$

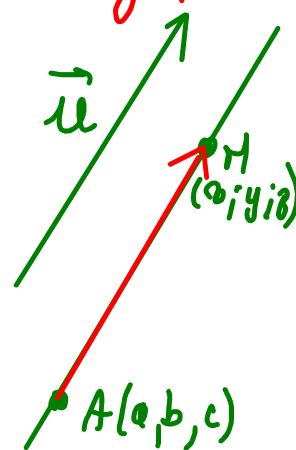
$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z-4 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = t \times 1 \\ y-4 = t \times 2 \\ z-4 = t \times (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

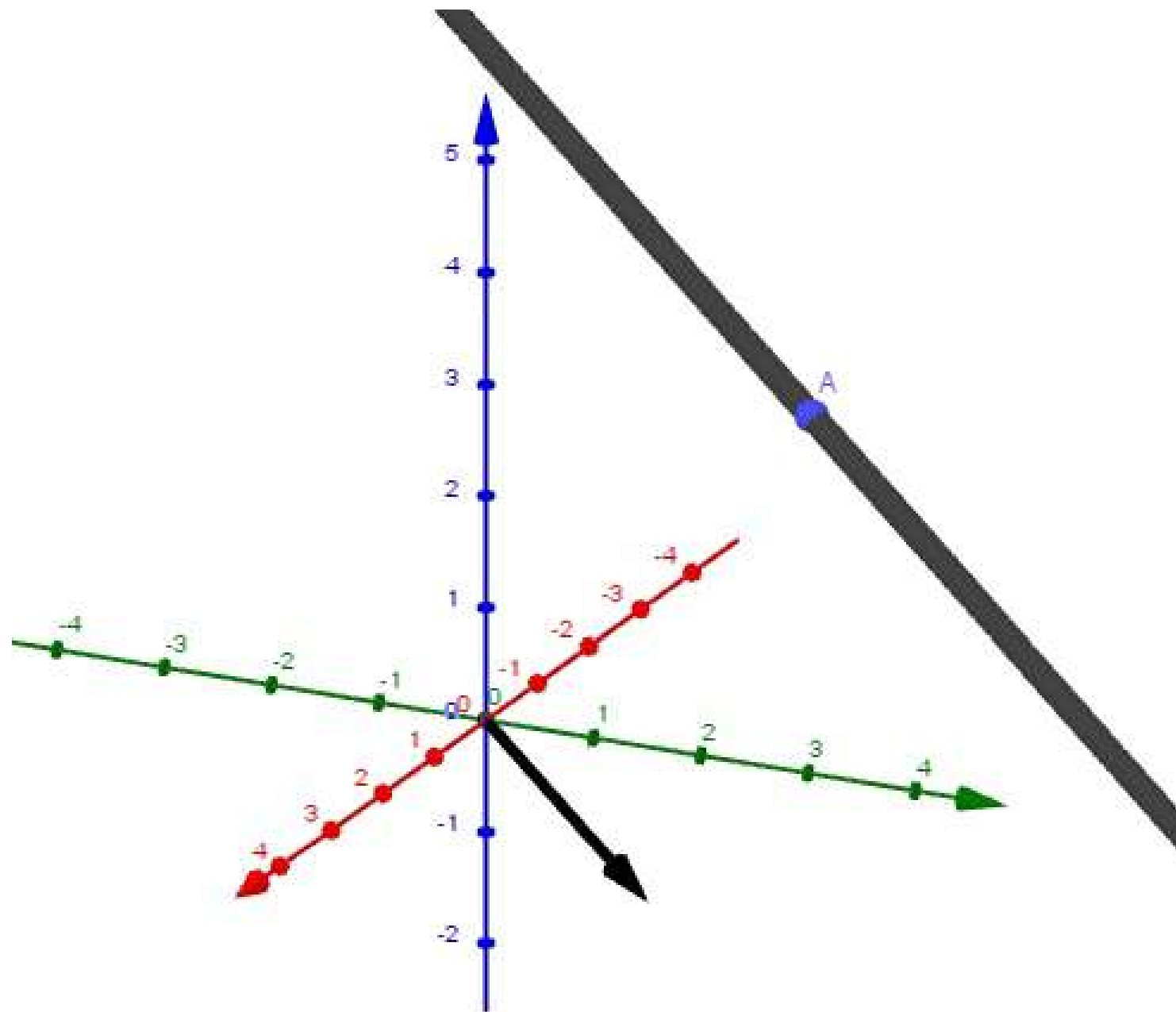
représentation paramétrique (1 paramètre qui est t)

$M(2+t; 4+2t; 4-t)$

(d) passe par A et dirigée par $\vec{u}$ 

$$\overrightarrow{AM} = t \vec{u}$$

colinéarité



droite

$$A(2; 4; 4)$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Droite par A et dirigée par $\vec{u}$, (d)

$$\forall (x; y; z) \in (d) \Leftrightarrow \vec{AP} = t \vec{u}$$

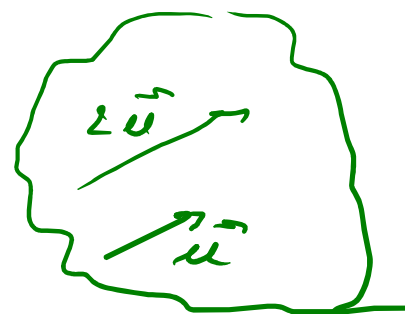
($\vec{AP}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = t \times 1 \\ y - 4 = t \times 2 \\ z - 4 = t \times (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

$$\forall (2+t; 4+2t; 4-t)$$

Représentation paramétrique (1 paramètre qui est t)



Propriété

Représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet comme représentation paramétrique le système $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$ où k est un réel.

k est appelé paramètre de la représentation

Applications Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère deux droites

(d_1) passant par $A(3; -1; 0)$ et
de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Applications Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}; \vec{k})$

On considère deux droites

(d_1) passant par $A(9; -1; 0)$ et
de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(d_2) passant par $B(0; 2; -1)$
de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

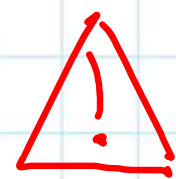
① Représentations paramétriques ?

(d_2) passant par $B(0; 2; -1)$

de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

⑩ Représentation paramétrique

$$(d_1) : \begin{cases} x = 9 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3t \end{cases}$$



paramètres
 $\neq$

$$(d_2) : \begin{cases} x = r \\ y = 2 - r \\ z = -1 + r \end{cases}$$

② Appartenance à l'une des deux droites?

a) $P(6, -7; 9)$ appartient-il à (d_1) ?

$$P \in (d_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 9 + t_0 \\ y_P = -1 + 2t_0 \\ z_P = -3t_0 \end{cases} \quad \text{avec } t_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 9 + t_0 \\ -7 = -1 + 2t_0 \\ 9 = -3t_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = -3 \\ t_0 = -3 \\ t_0 = -3 \end{cases}$$

...
système compatible

Donc pour $t_0 = -3$, on atteint le point P .
Donc $P \in (d_1)$

Donc pour $t_0 = -3$, on
atteint le point P.

Donc $P \in (d_1)$

$$(d_1): \begin{cases} x = 9 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3t \end{cases}$$

$$(d_2): \begin{cases} x = r \\ y = 2 - r \\ z = -1 + r \end{cases}$$

b) $P(6; -7; 9)$ appartient-il à (d_2) ?

$$P \in (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = r_0 \\ y_P = 2 - r_0 \\ z_P = -1 + r_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = r_0 \\ -7 = 2 - r_0 \\ 9 = -1 + r_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_0 = 6 \\ r_0 = 9 \\ r_0 = 10 \end{cases}$$

Le système est INCOMPATIBLE
donc $P \notin (d_2)$

Application du cours

Soit (d) la droite passant par le point A de coordonnées A(? ; -2 ; 2) et de vecteur directeur : $\vec{u}$

$$\begin{pmatrix} \text{?} \\ \text{?} \\ 3 \end{pmatrix}$$

La droite (d) admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x &= 1-3t \\ y &= \text{?} -2t \\ z &= \text{?} + \text{?} t \end{cases}$$

Le point P de coordonnées P(? ; ? ; 11) appartient à la droite (d).
paramètre t= ?

$$A(x_A; y_A; z_A)$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_A + a t \\ y = y_A + b t \\ z = z_A + c t \end{cases}$$

REPRESENTATION_PARAMETRIQUE1
REPRESENTATION_PARAMETRIQUE2a
REPRESENTATION_PARAMETRIQUE2b

