Limites : méthodes et exemples corrigés

29 exemples : 17 avec FI et 12 sans FI

Mode d'emploi. Cherche d'abord la limite et décide s'il y a une forme indéterminée (FI), puis consulte le corrigé. Chaque exemple renvoie au paragraphe correspondant de ton cours. Clique sur une entrée ci-dessous ou utilise les signets du lecteur PDF ; le pied de page ramène au sommaire.

Sommaire cliquable

Repères du cours et méthode de travail **3**

Deux résultats utiles pour les corrigés **4**

A. Quotients de forme 0/0 **5**
A1. Factoriser puis simplifier . . . 5
A2. Utiliser l'expression conjuguée . . . 6
A3. Reconnaître un taux d'accroissement . . . 7
A4. Simplifier et tenir compte du signe . . . 8

B. Quotients de forme infini/infini **9**
B1. Quotient de polynômes . . . 9
B2. Factoriser par une exponentielle . . . 10
B3. Composition et croissance comparée . . . 11
B4. Racine carrée et signe de la variable . . . 12

C. Produits de forme zéro fois infini **13**
C1. Factoriser et simplifier un produit . . . 13
C2. Passer au quotient et comparer les croissances . . . 14
C3. Faire apparaître un taux d'accroissement . . . 15
C4. Utiliser la conjuguée dans un produit . . . 16

D. Différences de forme infini moins infini **17**
D1. Développer ou factoriser . . . 17
D2. Factoriser et comparer les croissances . . . 18
D3. Utiliser l'expression conjuguée . . . 19
D4. Mettre au même dénominateur . . . 20

E. Complément : théorème de comparaison **21**
E1. Complément : conclure par comparaison . . . 21

Sommaire (suite)

F. Limites sans forme indéterminée **22**
F1. Un quotient de deux limites finies . . . 22
F2. Un numérateur qui tend vers zéro . . . 23
F3. Un quotient qui tend vers zéro . . . 24
F4. Un numérateur qui tend vers un infini . . . 25
F5. Un dénominateur qui tend vers zéro . . . 26
F6. Un quotient de type infini sur zéro . . . 27
F7. Un produit dont un facteur tend vers zéro . . . 28
F8. Un facteur de limite strictement négative . . . 29
F9. Deux facteurs qui tendent vers plus l'infini . . . 30
F10. Additionner deux termes de limite plus l'infini . . . 31
F11. Soustraire un terme qui tend vers moins l'infini . . . 32
F12. Une limite par composition . . . 33

Nouveaux modèles : les exemples F1 à F12 sont construits pour distinguer les calculs sans FI des situations A1 à E1.

Périmètre : polynômes, quotients, racines et exponentielles ; sans logarithme ni trigonométrie. Les corrections utilisent les résultats du cours et l'encadrement, sans invoquer la continuité.

Repères du cours et méthode de travail

Les numéros ci-dessous sont ceux de ton cours. Les liens conduisent aux exemples de cette fiche ; ils ne remplacent pas les énoncés complets des théorèmes du cours.

§ 3. Fonctions de référence	Limites de l'inverse, des puissances, de l'exponentielle et de la racine. Elles fournissent les limites élémentaires utilisées dans les calculs.
§ 4. Opérations sur les limites	A1, A4, B1, B2, C1, D1, D4. Transformer si une FI apparaît. Calculs sans FI : F1 à F11.
§ 5. Comparaison et encadrement	Comparaison : E1. Croissances comparées : C2, D2, puis B3. Encadrement : résultat sur la racine, puis B4, A2, C4, D3, F3, F7.
§ 6. Composition de limites	B3, F12, puis A3 et C3. Également utile pour réutiliser la limite de la racine en 1.
§ 7. Limites et dérivée	A3, C3. Reconnaître un taux d'accroissement de l'exponentielle en 0.

1. Reconnaître la situation

Calculer séparément les limites des termes ou des facteurs. Repérer la forme éventuelle $0/0$, ∞/∞, $0\times\infty$ ou $\infty-\infty$. Ces écritures décrivent une situation ; ce ne sont pas des calculs sur des nombres.

2. Choisir la méthode adaptée

Sans FI : appliquer les théorèmes d'opérations ou de composition ; une réécriture peut faciliter le calcul. **Avec FI :** transformer l'expression (factorisation, développement, conjuguée, dénominateur commun, croissance comparée ou taux d'accroissement). Plusieurs démarches peuvent être valables.

3. Justifier la limite et conclure

Écrire les limites intermédiaires, puis nommer le résultat utilisé : théorèmes d'opérations, comparaison, encadrement, composition ou taux d'accroissement. Une simplification s'effectue seulement là où le facteur supprimé est non nul.

À retenir. Pour conclure à une limite infinie dans un quotient dont le dénominateur tend vers 0, étudier le signe des deux termes. Sous une racine, $\sqrt{t^2}=|t|$, donc $\sqrt{t^2}=-t$ lorsque $t<0$.

Deux résultats utiles pour les corrigés

Racine carrée : une limite obtenue par encadrement

Renvoi : § 5 du cours, théorème d'encadrement ; § 6 du cours, composition. Pour h proche de 0, on a :

$$\begin{cases} 1 \leq \sqrt{1+h} \leq 1+h, & \text{si } h \geq 0, \\ 1+h \leq \sqrt{1+h} \leq 1, & \text{si } -1 < h \leq 0. \end{cases}$$

En effet, pour $u \geq 1$, $1 \leq \sqrt{u} \leq u$; pour $0 \leq u \leq 1$, $u \leq \sqrt{u} \leq 1$. On peut le vérifier en comparant les carrés de quantités positives.

Dans chaque cas, les deux bornes tendent vers 1. Par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \sqrt{1+h} = 1.}$$

On peut donc réutiliser ce résultat si h est remplacé par une expression tendant vers 0, en vérifiant que la racine est définie. Cela justifie les étapes avec racine de A2, B4, C4, D3, F3 et F7.

Exponentielle : reconnaître un taux d'accroissement

Renvoi : § 7 du cours, puis § 4 du cours et § 6 du cours. La fonction $f : u \mapsto e^u$ est dérivable en 0, avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. Par définition du nombre dérivé :

$$\boxed{\lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1.}$$

Pour $u \neq 0$, on peut également écrire

$$e^u = 1 + u\,\frac{e^u - 1}{u}.$$

Les théorèmes d'opérations donnent alors $e^u \to 1$ lorsque $u \to 0$. Cette justification permet de reconnaître les FI de A3 et C3, sans invoquer la continuité.

À retenir. Le taux d'accroissement traite la forme $0/0$ dans ce cas précis. Les théorèmes d'opérations ne permettent pas de calculer directement ce quotient avant sa transformation.

A. Quotients de forme 0/0

A1. Factoriser puis simplifier

À revoir dans le cours : § 4 du cours : théorèmes d'opérations.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

L'expression est définie pour $x \neq 2$. Lorsque $x \to 2$, les théorèmes d'opérations donnent

$$x^2-4 \longrightarrow 2^2-4=0 \qquad \text{et} \qquad x-2 \longrightarrow 0.$$

Nous rencontrons donc la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

2. Transformer l'expression

L'identité remarquable $x^2-4=(x-2)(x+2)$ permet de faire apparaître un facteur commun. Pour $x \neq 2$,

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2.$$

La simplification est valable près de 2, même si l'expression initiale n'est pas définie en 2.

3. Calculer les limites et conclure

Comme $x \to 2$, les théorèmes d'opérations donnent $x+2 \to 4$. L'expression transformée a la même limite que l'expression initiale.

Conclusion

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

A2. Utiliser l'expression conjuguée

À revoir dans le cours : § 5 du cours : encadrement ; § 4 du cours : opérations.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t}$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

Au voisinage de 0, nous travaillons avec $t > -1$ et $t \neq 0$. D'après le résultat sur la racine, $\sqrt{1+t} \to 1$. Ainsi,

$$\sqrt{1+t}-1 \longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad t \longrightarrow 0.$$

Nous rencontrons la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

2. Transformer l'expression

Nous multiplions le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{1+t}+1$, qui est strictement positif :

$$\frac{\sqrt{1+t}-1}{t} = \frac{(1+t)-1}{t(\sqrt{1+t}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+t}+1}.$$

La simplification par t est autorisée puisque $t \neq 0$.

3. Calculer les limites et conclure

Le résultat sur la racine donne $\sqrt{1+t} \to 1$, donc $\sqrt{1+t}+1 \to 2$. Cette limite est non nulle : les théorèmes d'opérations s'appliquent au quotient transformé.

Conclusion

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t} = \frac{1}{2}$$

A3. Reconnaître un taux d'accroissement

À revoir dans le cours : § 7 du cours : limites et dérivée ; § 6 du cours : composition ; § 4 du cours : opérations.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

L'expression est définie pour $x \neq 0$. Le §7 donne $\frac{e^u-1}{u} \to 1$ lorsque $u \to 0$. Pour $u \neq 0$, nous en déduisons

$$e^u - 1 = u\,\frac{e^u-1}{u} \longrightarrow 0 \times 1 = 0.$$

Avec $u = 2x \to 0$, le numérateur tend donc vers 0. Le dénominateur x tend aussi vers 0 : la forme est $\frac{0}{0}$.

2. Transformer l'expression

Pour faire apparaître le même accroissement au numérateur et au dénominateur, nous écrivons

$$\frac{e^{2x}-1}{x} = 2\,\frac{e^{2x}-1}{2x}.$$

3. Calculer les limites et conclure

Posons $u = 2x$. Alors $u \to 0$ et

$$\frac{e^u-1}{u} \longrightarrow \exp'(0) = 1.$$

Par composition, $\frac{e^{2x}-1}{2x} \to 1$. Les théorèmes d'opérations donnent ensuite $2 \times 1 = 2$.

Conclusion

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2$$

Référence : Bac S, Antilles-Guyane, juin 2003, problème, partie C, question 1. Corrigé APMEP, page 4.

A4. Simplifier et tenir compte du signe

À revoir dans le cours : § 4 du cours : théorèmes d'opérations.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2}$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

L'expression est définie pour $x \neq 1$. Puisque nous étudions la limite en 1^+, nous considérons $x > 1$. Lorsque $x \to 1^+$,

$$x^2 - 1 \longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad (x-1)^2 \longrightarrow 0.$$

Il s'agit d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$, malgré le signe positif du dénominateur.

2. Transformer l'expression

Pour $x \neq 1$, nous factorisons puis simplifions un facteur $x - 1$:

$$\frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}.$$

3. Calculer les limites et conclure

Le numérateur $x + 1$ tend vers $2 > 0$. Comme $x > 1$, le dénominateur $x - 1$ est positif et tend vers 0, ce que nous notons $x - 1 \to 0^+$. Les théorèmes d'opérations donnent une limite égale à $+\infty$. Le côté d'approche est essentiel.

Conclusion

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} = +\infty$$

B. Quotients de forme infini/infini

B1. Quotient de polynômes

À revoir dans le cours : § 3 du cours : limites de référence ; § 4 du cours.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 5}$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

L'expression est définie sur $\mathbb{R}$, car $2x^2 + 5 > 0$. Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$, comme le justifient les factorisations ci-dessous : le quotient présente une forme ∞/∞.

2. Transformer l'expression

Pour $x \neq 0$, factorisons par x^2 au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 5} = \frac{x^2\left(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2 + \frac{5}{x^2}\right)} = \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{5}{x^2}}.$$

3. Calculer les limites intermédiaires

Les limites de référence donnent $1/x \to 0$ et $1/x^2 \to 0$. Par les théorèmes d'opérations,

$$3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \longrightarrow 3, \qquad 2 + \frac{5}{x^2} \longrightarrow 2.$$

Avec $x^2 \to +\infty$, les deux factorisations justifient aussi le diagnostic initial. Le nouveau dénominateur tendant vers $2 \neq 0$, on applique les théorèmes d'opérations.

Conclusion

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 5} = \frac{3}{2}$$

B2. Factoriser par une exponentielle

À revoir dans le cours : § 3 du cours : limites de référence ; § 4 du cours.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{2e^t+1}{e^t+3}$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

Le dénominateur e^t+3 est strictement positif pour tout réel t. Comme $e^t \to +\infty$, les théorèmes d'opérations donnent

$$2e^t+1 \longrightarrow +\infty, \qquad e^t+3 \longrightarrow +\infty.$$

On reconnaît donc une forme ∞/∞.

2. Transformer l'expression

Factorisons par e^t, qui n'est jamais nul :

$$\frac{2e^t+1}{e^t+3} = \frac{e^t(2+e^{-t})}{e^t(1+3e^{-t})} = \frac{2+e^{-t}}{1+3e^{-t}}.$$

Cette égalité est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Calculer les limites intermédiaires

D'après les limites de référence, $e^{-t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. Par les théorèmes d'opérations,

$$2+e^{-t} \longrightarrow 2, \qquad 1+3e^{-t} \longrightarrow 1.$$

Le dénominateur tend vers un réel non nul : les théorèmes d'opérations permettent maintenant de conclure.

Conclusion

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{2e^t+1}{e^t+3} = 2$$

B3. Composition et croissance comparée

À revoir dans le cours : § 3 du cours : limites de référence ; § 5 du cours (croissances comparées) et § 6 du cours.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

On travaille sur $]0;+\infty[$. La limite de référence $\sqrt{x} \to +\infty$, puis la composition avec l'exponentielle, donnent

$$e^{\sqrt{x}} \longrightarrow +\infty, \qquad 2\sqrt{x} \longrightarrow +\infty.$$

Le quotient présente donc une forme ∞/∞.

2. Transformer l'expression

Posons $u = \sqrt{x}$. Lorsque $x \to +\infty$, on a $u \to +\infty$, et

$$\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\frac{e^u}{u}.$$

L'exposant et la puissance du dénominateur portent maintenant sur la même variable.

3. Calculer les limites intermédiaires

La croissance comparée du cours, appliquée avec $n = 1$, donne

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty.$$

Par composition des limites, ce résultat s'applique à $u = \sqrt{x}$. Enfin, par les théorèmes d'opérations, multiplier par $1/2 > 0$ conserve la limite $+\infty$.

Conclusion

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

Référence : Bac spécialité, Asie, 11 juin 2025, jour 1, exercice 4, question 3.a. Sujet APMEP, page 21 du recueil.

B4. Racine carrée et signe de la variable

À revoir dans le cours : § 3 du cours : limites de référence ; § 4 du cours et § 5 du cours (comparaison et encadrement).

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

L'expression est définie pour $t \neq 0$. Pour $t < 0$, on a $\sqrt{t^2+1} \geq \sqrt{t^2} = |t| = -t$. Comme $-t \to +\infty$ lorsque $t \to -\infty$, le théorème de comparaison donne $\sqrt{t^2+1} \to +\infty$. Le quotient présente une forme $(+\infty)/(-\infty)$, donc une forme indéterminée.

2. Transformer l'expression

Pour $t < 0$, on utilise $\sqrt{t^2} = |t| = -t$:

$$\frac{\sqrt{t^2+1}}{t} = \frac{|t|\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{t} = -\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}.$$

3. Calculer les limites intermédiaires

Reprenons l'encadrement de la racine :

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} \leq 1+\frac{1}{t^2}.$$

Comme $1/t^2 \to 0$, les deux bornes tendent vers 1. Par le théorème d'encadrement, $\sqrt{1+1/t^2} \to 1$. Les théorèmes d'opérations permettent de conclure après multiplication par -1. Le signe négatif provient de $|t|/t = -1$ pour $t < 0$.

Conclusion

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} = -1$$

C. Produits de forme zéro fois infini

C1. Factoriser et simplifier un produit

À revoir dans le cours : § 3 du cours : limites de référence ; § 4 du cours : opérations.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{t\to+\infty} t\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

L'expression est définie pour $t \neq 0$. Au voisinage de $+\infty$, nous pouvons prendre $t > 0$. Les limites de référence et les théorèmes d'opérations donnent

$$\frac{1}{t} \longrightarrow 0, \qquad \frac{1}{t^2} \longrightarrow 0, \qquad \frac{1}{t}+\frac{1}{t^2} \longrightarrow 0.$$

Comme $t \to +\infty$, le produit présente la forme indéterminée $\infty \times 0$.

2. Transformer l'expression

Nous mettons $1/t$ en facteur dans la parenthèse. Pour $t \neq 0$,

$$t\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right) = t \times \frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{t}\right) = 1+\frac{1}{t}.$$

3. Calculer les limites et conclure

Puisque $1/t \to 0$, les théorèmes d'opérations donnent $1 + 1/t \to 1$. La simplification a fait disparaître le produit indéterminé.

Conclusion

$$\lim_{t\to+\infty} t\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right) = 1$$

C2. Passer au quotient et comparer les croissances

À revoir dans le cours : § 3 du cours : références ; § 5 du cours : croissances comparées ; § 4 du cours : opérations.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

La fonction est définie sur $\mathbb{R}$. D'après les limites de référence du §3,

$$x^2 \longrightarrow +\infty \qquad \text{et} \qquad e^{-x} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } x \to +\infty.$$

Le produit présente donc la forme indéterminée $\infty \times 0$. Les limites des deux facteurs ne permettent pas, à elles seules, de conclure.

2. Transformer l'expression

L'égalité $e^{-x} = 1/e^x$ permet de passer au quotient. Pour $x > 0$,

$$x^2e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} = \frac{1}{\dfrac{e^x}{x^2}}.$$

3. Calculer les limites et conclure

Le corollaire des croissances comparées du §5, avec $n = 2$, donne

$$\frac{e^x}{x^2} \longrightarrow +\infty.$$

Son inverse tend donc vers 0, par les théorèmes d'opérations. C'est cette croissance comparée qui permet de lever l'indétermination.

Conclusion

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$$

Référence : Cas $n = 2$ de $f_n(x) = x^ne^{-x}$. Bac spécialité, Polynésie, 17 juin 2025, jour 1, exercice 3, partie A, question 1.b. Corrigé APMEP.

C3. Faire apparaître un taux d'accroissement

À revoir dans le cours : § 7 du cours : dérivée ; § 6 du cours : composition ; § 3 du cours et § 4 du cours : références et opérations.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

Pour $x>0$, posons $u=1/x$. Lorsque $x\to+\infty$, nous avons $u\to 0^+$. Le §7 donne $\frac{e^u-1}{u}\to 1$, donc, par les théorèmes d'opérations,

$$e^u-1=u\,\frac{e^u-1}{u}\longrightarrow 0.$$

Par composition, $e^{1/x}-1\to 0$. Comme $x\to+\infty$, la forme du produit est $\infty\times 0$.

2. Transformer l'expression

Multiplier par x revient à diviser par $1/x$. Pour $x\neq 0$,

$$x\left(e^{1/x}-1\right)=\frac{e^{1/x}-1}{1/x}=\frac{e^u-1}{u}.$$

3. Calculer les limites et conclure

Puisque $u\to 0^+$, le quotient transformé tend vers $\exp'(0)=1$, d'après le §7. Le théorème de composition permet de revenir à la variable x.

Conclusion

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)=1$$

C4. Utiliser la conjuguée dans un produit

À revoir dans le cours : § 3 du cours : références ; § 5 du cours : encadrement ; § 4 du cours : opérations.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{t\to+\infty} t\left(\sqrt{1+\frac{1}{t}}-1\right)$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

Au voisinage de $+\infty$, prenons $t>0$: l'expression est alors bien définie. Comme $1/t\to 0^+$, le résultat sur la racine donne

$$\sqrt{1+\frac{1}{t}}\longrightarrow 1, \qquad \text{donc} \qquad \sqrt{1+\frac{1}{t}}-1\longrightarrow 0.$$

Le facteur t tend vers $+\infty$: nous rencontrons $\infty\times 0$.

2. Transformer l'expression

La multiplication par l'expression conjuguée fait apparaître une différence de carrés. Pour $t>0$,

$$t\left(\sqrt{1+\frac{1}{t}}-1\right)=t\,\frac{\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+1}.$$

3. Calculer les limites et conclure

Le résultat sur la racine donne $\sqrt{1+1/t}\to 1$. Le dénominateur transformé tend donc vers $2\neq 0$. Nous pouvons appliquer les théorèmes d'opérations au quotient.

Conclusion

$$\lim_{t\to+\infty} t\left(\sqrt{1+\frac{1}{t}}-1\right)=\frac{1}{2}$$

D. Différences de forme infini moins infini

D1. Développer ou factoriser

À revoir dans le cours : § 3 du cours : limites de référence ; § 4 du cours.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)^2-x^2\right)$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

La fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Lorsque $x \to +\infty$, on a $x+1 \to +\infty$, puis, par les théorèmes d'opérations,

$$(x+1)^2 \longrightarrow +\infty, \qquad x^2 \longrightarrow +\infty.$$

La différence présente une forme $\infty - \infty$.

2. Transformer l'expression

Une première méthode consiste à développer puis à réduire :

$$(x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1.$$

On peut également utiliser $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$(x+1)^2 - x^2 = ((x+1) - x)((x+1) + x) = 1(2x+1).$$

Les deux démarches conduisent à la même expression, pour tout réel x.

3. Calculer les limites intermédiaires

Comme $x \to +\infty$, la multiplication par $2 > 0$ donne $2x \to +\infty$. Par les théorèmes d'opérations, ajouter la constante 1 ne change pas cette limite : $2x + 1 \to +\infty$.

Conclusion

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)^2-x^2\right) = +\infty$$

D2. Factoriser et comparer les croissances

À revoir dans le cours : § 3 du cours : limites de référence ; § 4 du cours et § 5 du cours (croissances comparées).

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x - x)$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

L'expression est définie sur $\mathbb{R}$. Les limites de référence donnent $e^x \to +\infty$ et $x \to +\infty$. Leur différence présente donc une forme $\infty - \infty$: on ne peut pas soustraire directement ces limites.

2. Transformer l'expression

Factorisons par e^x, toujours strictement positif :

$$e^x - x = e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right).$$

Il reste à déterminer la limite de la parenthèse.

3. Calculer les limites intermédiaires

Le cours donne, par croissance comparée avec $n = 1$,

$$\frac{e^x}{x} \longrightarrow +\infty.$$

En prenant l'inverse pour $x > 0$, on obtient

$$\frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^x/x} \longrightarrow 0, \qquad 1 - \frac{x}{e^x} \longrightarrow 1.$$

Les théorèmes d'opérations s'appliquent désormais au produit d'une fonction tendant vers $+\infty$ et d'une fonction tendant vers $1 > 0$.

Conclusion

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x - x) = +\infty$$

Référence : Bac spécialité, Centres étrangers, 11 mai 2022, jour 1, exercice 3, partie A, question 1. Corrigé APMEP.

D3. Utiliser l'expression conjuguée

À revoir dans le cours : § 3 du cours : limites de référence ; § 4 du cours et § 5 du cours (comparaison et encadrement).

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+t}-t\right)$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

On travaille avec $t>0$, où l'expression est définie. Pour $t>0$, on a $\sqrt{t^2+t}\geq\sqrt{t^2}=t$. Comme $t\to+\infty$, le théorème de comparaison donne $\sqrt{t^2+t}\to+\infty$. Puisque $t\to+\infty$, la différence présente une forme $\infty-\infty$.

2. Transformer l'expression

Multiplions par l'expression conjuguée, puis factorisons $t>0$ au dénominateur :

$$\sqrt{t^2+t}-t=\frac{(t^2+t)-t^2}{\sqrt{t^2+t}+t}=\frac{t}{t\left(\sqrt{1+\frac{1}{t}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+1}.$$

3. Calculer les limites intermédiaires

On a $1/t\to0$, donc $1+1/t\to1$. En utilisant le résultat sur la racine, obtenu par encadrement,

$$\sqrt{1+\frac{1}{t}}\longrightarrow1,\qquad\sqrt{1+\frac{1}{t}}+1\longrightarrow2.$$

Le dénominateur tendant vers $2\neq0$, on applique les théorèmes d'opérations.

Conclusion

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+t}-t\right)=\frac{1}{2}$$

D4. Mettre au même dénominateur

À revoir dans le cours : § 3 du cours : limites de référence ; § 4 du cours.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x(1+x)}\right)$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

On travaille avec $x>0$, où les deux dénominateurs sont strictement positifs. Lorsque $x\to 0^+$, on a $1+x\to 1$, puis $x(1+x)\to 0^+$. Ainsi,

$$\frac{1}{x}\longrightarrow +\infty, \qquad \frac{1}{x(1+x)}\longrightarrow +\infty.$$

La différence présente une forme $\infty-\infty$.

2. Transformer l'expression

Mettons les deux fractions au même dénominateur :

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x(1+x)}=\frac{1+x}{x(1+x)}-\frac{1}{x(1+x)}=\frac{x}{x(1+x)}=\frac{1}{1+x}.$$

La simplification est légitime puisque $x>0$, donc $x\neq 0$.

3. Calculer les limites intermédiaires

Par les théorèmes d'opérations, $1+x\to 1$ lorsque $x\to 0^+$. Le nouveau dénominateur tend vers $1\neq 0$: on peut appliquer les théorèmes d'opérations et obtenir une limite finie.

Conclusion

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x(1+x)}\right)=1$$

E. Complément : théorème de comparaison

E1. Complément : conclure par comparaison

À revoir dans le cours : § 3 du cours : limites de référence ; § 4 du cours et § 5 du cours (comparaison).

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)$$

1. Reconnaître la forme indéterminée

La fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Lorsque $x \to +\infty$, les deux termes x^2 et x tendent vers $+\infty$. La différence présente une forme $\infty - \infty$. Nous choisissons ici le théorème de comparaison.

2. Établir une minoration utile

Pour $x \geq 2$, on a $x/2 \geq 1$. Comme x est positif, la multiplication par x conserve le sens de l'inégalité :

$$\frac{x^2}{2} \geq x.$$

En changeant de signe, puis en ajoutant x^2, on en déduit

$$x^2 - x \geq x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

3. Appliquer le théorème de comparaison

Les limites de référence et les théorèmes d'opérations donnent

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2} = +\infty.$$

Or $x^2 - x \geq x^2/2$ pour tout $x \geq 2$. Le théorème de comparaison impose donc la même limite $+\infty$ à $x^2 - x$.

Conclusion

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) = +\infty$$

F. Limites sans forme indéterminée

F1. Un quotient de deux limites finies

À revoir dans le cours : § 4 du cours : théorèmes d'opérations.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x+2}$$

1. Calculer les limites des termes

L'expression est définie pour $x \neq -2$, donc au voisinage de 1. Lorsque $x \to 1$, les théorèmes d'opérations donnent séparément

$$x^2+1 \longrightarrow 1^2+1=2 \qquad \text{et} \qquad x+2 \longrightarrow 1+2=3.$$

Le numérateur et le dénominateur ont ainsi chacun une limite finie.

2. Reconnaître une situation sans FI

La limite du dénominateur vaut 3 : elle est non nulle. Le quotient satisfait donc les conditions d'application des théorèmes d'opérations. Nous ne rencontrons aucune forme indéterminée.

3. Appliquer les théorèmes d'opérations

Par les théorèmes d'opérations, la limite du quotient est le quotient des deux limites, puisque celle du dénominateur est non nulle. La limite cherchée est donc 2/3. Le calcul porte ici sur deux limites déjà établies ; aucune transformation de l'expression n'est nécessaire.

Conclusion

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x+2} = \frac{2}{3}$$

F2. Un numérateur qui tend vers zéro

À revoir dans le cours : § 4 du cours : théorèmes d'opérations.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x+1}$$

1. Calculer les limites des termes

L'expression est définie pour $x \neq -1$, donc au voisinage de 2. Lorsque $x \to 2$, les théorèmes d'opérations donnent

$$x^2-4 \longrightarrow 2^2-4=0 \qquad \text{et} \qquad x+1 \longrightarrow 2+1=3.$$

Le numérateur tend vers 0, tandis que le dénominateur tend vers un nombre strictement positif.

2. Reconnaître une situation sans FI

La situation correspond à un quotient de limites $0/3$, et non à la forme indéterminée $0/0$. La limite nulle du numérateur ne constitue donc pas un obstacle au calcul.

3. Appliquer les théorèmes d'opérations

La limite du dénominateur étant non nulle, les théorèmes d'opérations s'appliquent directement et donnent $0/3 = 0$.

Conclusion

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x+1} = 0$$

À retenir. Dans A1, le même numérateur tendait vers 0, mais le dénominateur $x-2$ tendait aussi vers 0. Ici, le dénominateur $x+1$ tend vers 3 : il faut examiner les deux termes.

F3. Un quotient qui tend vers zéro

À revoir dans le cours : § 3 du cours : références ; § 5 du cours : encadrement ; § 6 du cours : composition ; § 4 du cours : opérations.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{t}}}{t+1}$$

1. Calculer les limites des termes

Au voisinage de $+\infty$, prenons $t > 0$. La racine est alors définie et $t+1 > 0$. La limite de référence donne $1/t \to 0^+$. Par le résultat sur la racine, puis par composition,

$$\sqrt{1+\frac{1}{t}} \longrightarrow 1.$$

Les théorèmes d'opérations donnent également $t+1 \to +\infty$.

2. Reconnaître une situation sans FI

Le numérateur tend vers un réel fini et le dénominateur vers $+\infty$. Cette situation ne présente aucune forme indéterminée : le numérateur ne diverge pas avec le dénominateur.

3. Appliquer les théorèmes d'opérations

Le numérateur ayant une limite finie et le dénominateur tendant vers un infini, les théorèmes d'opérations donnent une limite nulle.

Conclusion

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{t}}}{t+1} = 0$$

À retenir. $+\infty$ décrit ici le comportement du dénominateur. Ce n'est pas un nombre par lequel on effectuerait une division.

F4. Un numérateur qui tend vers un infini

À revoir dans le cours : § 3 du cours : limites de référence ; § 4 du cours : opérations.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{2+\frac{1}{x}}$$

1. Calculer les limites des termes

L'expression est définie pour $x \notin \{0, -\frac{1}{2}\}$. Lorsque $x \to -\infty$, les limites de référence donnent $x^2 \to +\infty$ et $1/x \to 0$. Par les théorèmes d'opérations,

$$x^2+1 \longrightarrow +\infty, \qquad 2+\frac{1}{x} \longrightarrow 2.$$

Pour $x < -1$, le dénominateur est strictement positif, car $-1 < 1/x < 0$.

2. Reconnaître une situation sans FI

Le numérateur tend vers $+\infty$, tandis que le dénominateur tend vers un réel strictement positif. Ce n'est pas une forme ∞/∞, puisque le dénominateur a une limite finie.

3. Appliquer les théorèmes d'opérations

Les théorèmes d'opérations donnent une limite égale à $+\infty$, le dénominateur tendant vers $2 > 0$.

Conclusion

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{2+\frac{1}{x}} = +\infty$$

À retenir. Lorsque $x \to -\infty$, son carré tend vers $+\infty$. Le signe de x ne suffit pas à déterminer celui du quotient.

F5. Un dénominateur qui tend vers zéro

À revoir dans le cours : § 4 du cours : théorèmes d'opérations et signe du dénominateur.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{t+2}{t-1}$$

1. Calculer les limites des termes

L'expression est définie pour $t \neq 1$. Lorsque $t \to 1^-$, nous considérons $t < 1$, donc $t - 1 < 0$. Ainsi,

$$t + 2 \longrightarrow 3 > 0 \qquad \text{et} \qquad t - 1 \longrightarrow 0^-.$$

La notation 0^- indique que le dénominateur tend vers 0 en restant négatif.

2. Reconnaître une situation sans FI

Le numérateur tend vers un réel non nul. Nous ne rencontrons donc pas la forme $0/0$. La situation parfois notée $3/0^-$ décrit deux limites et ne représente pas une division par zéro.

3. Appliquer les théorèmes d'opérations

Le numérateur tend vers $3 > 0$ et le dénominateur vers 0^-. Les théorèmes d'opérations donnent une limite égale à $-\infty$.

Conclusion

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{t+2}{t-1} = -\infty$$

À retenir. En 1^+, le dénominateur tend vers 0^+ et le quotient vers $+\infty$. Les deux limites étant différentes, la fonction n'a pas de limite bilatérale en 1.

F6. Un quotient de type infini sur zéro

À revoir dans le cours : § 3 du cours : fonction inverse ; § 4 du cours : théorèmes d'opérations.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\frac{1}{x}}{x}$$

1. Calculer les limites des termes

L'expression est définie pour $x \neq 0$. Puisque $x \to 0^+$, nous travaillons avec $x > 0$. La limite de référence donne

$$\frac{1}{x} \longrightarrow +\infty, \qquad \text{donc} \qquad 1+\frac{1}{x} \longrightarrow +\infty.$$

Le dénominateur x tend vers 0^+.

2. Reconnaître une situation sans FI

Le numérateur diverge vers $+\infty$, tandis que le dénominateur tend vers zéro en restant positif. La situation $+\infty/0^+$ n'est pas une forme indéterminée. Ces symboles décrivent des limites, et non des valeurs à diviser.

3. Appliquer les théorèmes d'opérations

Pour appliquer les théorèmes d'opérations, nous écrivons, pour $x > 0$,

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{x} = \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}.$$

Les deux facteurs tendent vers $+\infty$. Les théorèmes d'opérations donnent donc $+\infty$.

Conclusion

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\frac{1}{x}}{x} = +\infty$$

À retenir. La réécriture en produit sert à appliquer un théorème d'opérations ; elle ne lève aucune indétermination.

F7. Un produit dont un facteur tend vers zéro

À revoir dans le cours : § 3 du cours, § 4 du cours et § 5 du cours (encadrement).

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{t\to 0}(\sqrt{1+t}-1)(t+2)$$

1. Calculer les limites des termes

L'expression est définie pour $t \geq -1$, donc de part et d'autre de 0. Lorsque $t \to 0$, on a $1+t \to 1$. D'après le résultat sur la racine, démontré par encadrement,

$$\sqrt{1+t} \longrightarrow 1, \qquad \sqrt{1+t}-1 \longrightarrow 0.$$

Par les théorèmes d'opérations, $t+2 \to 2$.

2. Reconnaître une situation sans FI

Le premier facteur tend vers 0 et le second vers le réel 2. Nous rencontrons un produit de deux limites finies : il ne présente aucune forme indéterminée. La situation est 0×2 ; le second facteur ne tend pas vers l'infini.

3. Appliquer les théorèmes d'opérations

Les limites des deux facteurs étant connues, les théorèmes d'opérations s'appliquent directement :

$$(\sqrt{1+t}-1)(t+2) \longrightarrow 0 \times 2 = 0.$$

Le résultat sur la racine suffit ici : aucune multiplication par l'expression conjuguée n'est nécessaire.

Conclusion

$$\lim_{t\to 0}(\sqrt{1+t}-1)(t+2) = 0$$

F8. Un facteur de limite strictement négative

À revoir dans le cours : § 3 du cours et § 4 du cours.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-2+\frac{1}{t}\right)e^{t}$$

1. Calculer les limites des termes

L'expression est définie pour $t \neq 0$. Au voisinage de $+\infty$, nous pouvons prendre $t > 0$. Les limites de référence et les théorèmes d'opérations donnent

$$\frac{1}{t} \longrightarrow 0, \qquad -2+\frac{1}{t} \longrightarrow -2, \qquad e^{t} \longrightarrow +\infty.$$

2. Reconnaître une situation sans FI

Un facteur tend vers un réel strictement négatif, l'autre vers $+\infty$. Cette situation n'est pas indéterminée : le facteur de limite finie ne tend pas vers zéro. Il faut conserver son signe pour déterminer celui de la limite du produit.

3. Appliquer les théorèmes d'opérations

Les théorèmes d'opérations donnent une limite $-\infty$, car $-2 < 0$. Le signe se vérifie aussi directement : pour $t > 1$, on a $1/t < 1$, donc

$$-2+\frac{1}{t} < -1 < 0, \qquad e^{t} > 0.$$

Le produit est donc négatif pour les grandes valeurs de t, ce qui est cohérent avec la limite obtenue.

Conclusion

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-2+\frac{1}{t}\right)e^{t} = -\infty$$

F9. Deux facteurs qui tendent vers plus l'infini

À revoir dans le cours : § 3 du cours, § 4 du cours et § 6 du cours.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{t\to-\infty} t^2e^{-t}$$

1. Calculer les limites des termes

La fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Lorsque $t \to -\infty$, les limites de référence donnent $t^2 \to +\infty$. Pour l'exponentielle, posons $u = -t$. Alors $u \to +\infty$; par composition,

$$e^{-t} = e^u \longrightarrow +\infty.$$

Les deux facteurs tendent donc vers $+\infty$.

2. Reconnaître une situation sans FI

Le produit présente la situation $(+\infty) \times (+\infty)$, qui n'est pas indéterminée. Aucun des deux facteurs ne tend vers zéro. Le sens dans lequel la variable tend est essentiel pour établir ce diagnostic.

3. Appliquer les théorèmes d'opérations

Les théorèmes d'opérations sur le produit de deux fonctions tendant vers $+\infty$ donnent directement

$$t^2e^{-t} \longrightarrow +\infty.$$

Aucune croissance comparée n'est nécessaire ici. Dans l'exemple C2, la même expression est étudiée lorsque la variable tend vers $+\infty$: l'exponentielle tend alors vers 0, ce qui produit une forme indéterminée.

Conclusion

$$\lim_{t\to-\infty} t^2e^{-t} = +\infty$$

F10. Additionner deux termes de limite plus l'infini

À revoir dans le cours : § 3 du cours et § 4 du cours.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+e^x\right)$$

1. Calculer les limites des termes

La fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Lorsque $x \to +\infty$, les limites de référence donnent

$$x^2 \longrightarrow +\infty, \qquad e^x \longrightarrow +\infty.$$

Il s'agit d'une somme de deux fonctions, et leurs limites sont de même signe.

2. Reconnaître une situation sans FI

La situation $(+\infty)+(+\infty)$ n'est pas indéterminée. Les deux termes tendent chacun vers $+\infty$ et s'ajoutent ici. La présence de deux limites infinies ne suffit donc pas à reconnaître une forme indéterminée : il faut aussi examiner l'opération et les signes.

3. Appliquer les théorèmes d'opérations

Les théorèmes d'opérations permettent de conclure directement :

$$x^2+e^x \longrightarrow +\infty.$$

Il est inutile de chercher lequel des deux termes croît le plus vite. Les limites individuelles suffisent, sans factorisation ni recours aux croissances comparées.

Conclusion

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+e^x\right)=+\infty$$

F11. Soustraire un terme qui tend vers moins l'infini

À revoir dans le cours : § 3 du cours, § 4 du cours et § 6 du cours.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{t\to-\infty}\left(e^{-t}-t\right)$$

1. Calculer les limites des termes

La fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Lorsque $t \to -\infty$, on a $-t \to +\infty$. En posant $u = -t$, la limite de référence de l'exponentielle et le théorème de composition donnent

$$e^{-t} = e^{u} \longrightarrow +\infty.$$

Dans la différence initiale, le premier terme tend donc vers $+\infty$ et le terme soustrait vers $-\infty$.

2. Reconnaître une situation sans FI

La situation est $(+\infty) - (-\infty)$. Elle n'est pas indéterminée : soustraire t revient à ajouter $-t$, qui tend vers $+\infty$. Le signe du terme soustrait est donc décisif.

3. Appliquer les théorèmes d'opérations

Écrivons l'expression comme une somme :

$$e^{-t} - t = e^{-t} + (-t).$$

Les deux termes de cette somme tendent vers $+\infty$. Les théorèmes d'opérations s'appliquent directement et donnent une limite $+\infty$.

Conclusion

$$\lim_{t\to-\infty}\left(e^{-t}-t\right) = +\infty$$

F12. Une limite par composition

À revoir dans le cours : § 3 du cours, § 4 du cours et § 6 du cours.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2}$$

1. Calculer les limites des termes

La fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Commençons par l'exposant. Lorsque $x \to -\infty$, les limites de référence et la multiplication par -1 donnent

$$x^2 \longrightarrow +\infty, \qquad -x^2 \longrightarrow -\infty.$$

Posons alors $u = -x^2$. Nous avons $u \to -\infty$.

2. Reconnaître une situation sans FI

Nous étudions une fonction composée : l'exponentielle est appliquée à u. La limite de l'exposant est déterminée et la limite de référence de e^u en $-\infty$ est connue. Aucune opération indéterminée n'apparaît dans ce calcul.

3. Appliquer le théorème de composition

D'après le cours,

$$\lim_{u\to-\infty} e^u = 0.$$

Comme $u = -x^2 \to -\infty$, le théorème de composition permet de conclure que $e^{-x^2} \to 0$. Attention aux parenthèses : $e^{-x^2} = e^{-(x^2)}$ est toujours positif. Cette expression est différente de $-e^{x^2}$, dont le signe moins est placé devant l'exponentielle.

Conclusion

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$$