DM JANVIER (REF–1) de MATHEMATIQUES (TERM)
Objectif: préparer le DS7 (rentrée)

Nom et prénom: ______________________________

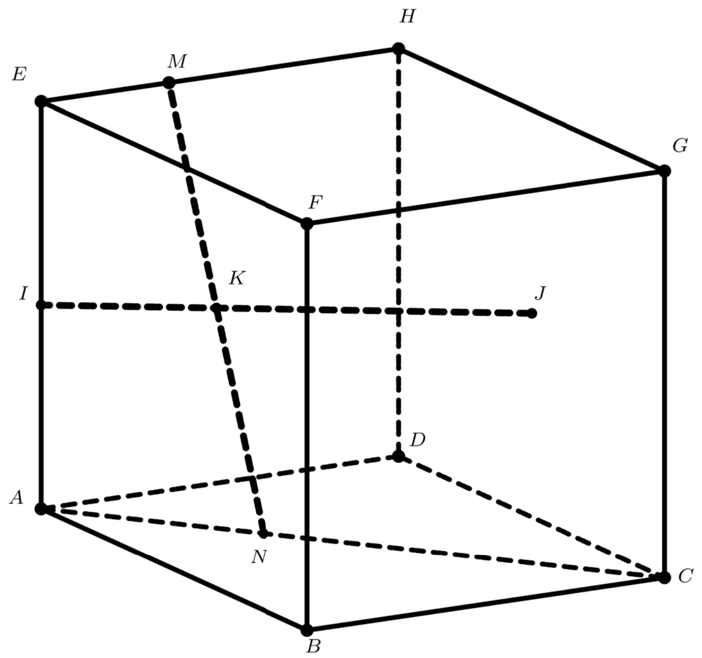
Conseil: commencer à travailler 10 jours seulement avant la rentrée. Lire les fiches du livre pages 474 et suivantes correspondant à chacun des exercices et les imprimer ou les recopier pour les conserver

Exercice1(10pts)

Dans un cube ABCDEFGH on a placé le milieu I du segment $[AE]$ et le centre J de la face CDHG.
On a construit les points M et N tels que (dessin à main levée):

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

On construit enfin le point K milieu du segment $[MN]$



On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

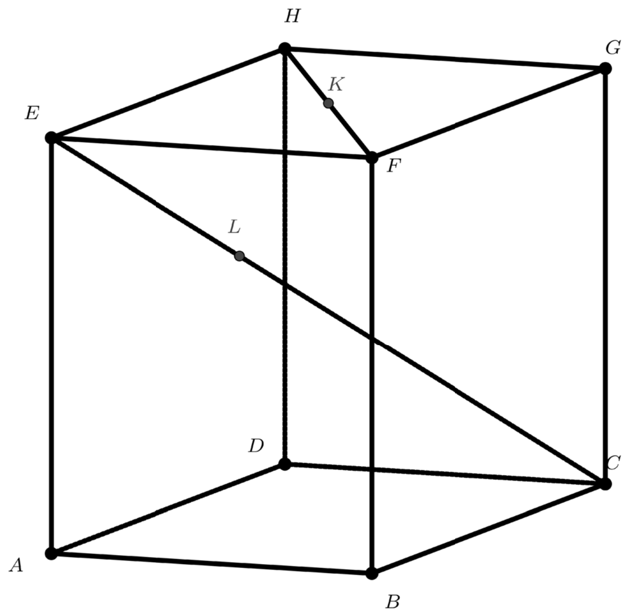
(a) Après avoir déterminé les coordonnées de I et J, donner une représentation paramétrique de la droite (IJ). (2 pts)

(b) Déterminer les coordonnées de M et N et en déduire les coordonnées de K. (4 pts)

(c) Montrer que I,J et K sont alignés. (4 pts)

Exercice2(10pts)

Soit le cube $ABCDEFGH$ de côté 1. K est le milieu du segment $[FH]$ et L est le point tel que $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$.



(a) Déterminer l'intersection des plans (EKL) et (ABC). (On pourra la tracer sur la figure ci-dessus ou l'expliciter par écrit.) (1 pts)

(b) Démontrer que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$. (1 pts)

(c) On travaille désormais dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. (1 pts)
Déduire les coordonnées du point L dans ce repère.

(d) Donner sans justification les coordonnées des points C, E et K. (1 pts)

(e) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CE). (1 pts)

(f) Démontrer que la droite (AK) a pour représentation paramétrique (1 pts)
$$\begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 2s \end{cases} \quad (\text{avec } s \in \mathbb{R}) \ .$$

(g) Vérifier que les droites (AK) et (CE) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. (2 pts)

(h) Que peut-on conclure pour le point L ? (1 pts)

(i) Le triangle KLE est-il isocèle en L ? (1 pts)

Exercice3(2pts)

Variation de la composée de deux fonctions.

On considère deux fonctions continues g et u dont les tableaux de variations sont donnés ci-après:

x	-11		-5		3		9		$+\infty$
Variations de u	6	↘	-1	↘	-8	↗	-1	↗	11

x	-8		-1		6		11
Variations de g	-5	↗	-3	↘	-4	↘	-9

(a) Calculer $g \circ u(-11)$, $g \circ u(-5)$, $g \circ u(3)$, $g \circ u(9)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g \circ u(x)$. (1 pts)

(b) Dresser le tableau de variation COMPLET de la fonction $g \circ u$. Justifier. (1 pts)

Exercice4(24pts)

Evolution d'une population: récurrence et inégalités

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île.

PARTIE A

Au début de l'année 2000 on comptait dans cette population 400 individus.
Une étude a permis de modéliser la population de tortues par la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0.4 \\ u_{n+1} = 0.8u_n\,(1 - u_n) \end{cases}$
où pour tout entier n, u_n modélise le nombre d'individus de la population de tortues , en milliers au début de l'année 2000+n.

(a) Déterminer le nombre d'individus de la population de tortues en 2001. (2 pts)

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0; 1]$ (2 pts)

(c) Montrer alors que pour tout entier naturel n, (2 pts)
$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.8u_n$
(Indication: aucune récurrence n'est nécéssaire)

(d) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, (2 pts)
$0 \leqslant u_n \leqslant 0.4 \times 0.8^n$

(e) En déduire la limite de u_n. Conclure sur l'évolution de la population de tortues. (2 pts)

(f) Recopier et complèter le programme python ci-dessous pour répondre au problème suivant:
La population de tortues sera considérée comme en voie de disparition si le nombre d'individus descend en dessous du seuil critique de 22.
On souhaite que le programme python affiche **l'année** à partir de laquelle l'espèce sera considérée comme en voie de disparition. (2 pts)

```
u=0.4
n=0
while (...):
        n = ...
        u = ...
print(...)
```

PARTIE B

Au début de l'année 2008 il ne reste plus que 22 individus dans la population de tortues.
Une action de repeuplement est décidé et on constate que la nouvelle modélisation de l'évolution de la population de tortues est donnée par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_8 = 0.022 \\ v_{n+1} = 1.04 v_n (1 - v_n) \end{cases}$$

(a) Calculer v_9 arrondi au millième. (2 pts)

(b) Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto 1.04x(1-x)$. (2 pts)
Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

(c) En utilisant la croissance de f, (2 pts)
montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2}$

(d) Toujours en utilisant la croissance de f, (2 pts)
montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1}$.

(e) Rappeler le théorème du point fixe (2 pts)
En utilisant ce théorème, montrer que la suite (v_n) est convergente et que sa limite L vérifie $L = 1.04L(1-L)$.

(f) La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction? (2 pts)
Vers quelle valeur va se stabiliser le nombre d'individus?

Nom et prénom: ____________________

Exercice5(4pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \frac{5}{6}x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 35x - 10$$

(a) Calculer la dérivée de la fonction f et en déduire le tableau de variation COMPLET de f.
On justifiera le signe de la dérivée. (2 pts)

(b) Calculer la dérivée seconde de f et étudier la convexité de la fonction f. (2 pts)

Exercice6(10pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (-4x - 5)e^{-3x}$$

(a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en indiquant clairement chaque théorème utilisé. (2 pts)

(b) Calculer de même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en indiquant clairement chaque théorème utilisé. (2 pts)

(c) Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = (12x + 11)e^{-3x}$ puis en déduire son tableau de variation COMPLET. (2 pts)

(d) Montrer que la dérivée seconde de f est $f''(x) = (-36x - 21)e^{-3x}$ puis montrer que la courbe de représentative de $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion. On donnera la valeur exacte de l'abscisse de ce point d'inflexion. (2 pts)

(e) Indiquer l'intervalle où la fonction est convexe et celui ou elle est concave. (2 pts)

Exercice7(14pts)

On considère la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{-4x}{5x^2 - 5}$.

(a) Donner le domaine de définition D_f de la fonction f. (2 pts)

(b) Justifier la dérivabilité de f sur D_f et calculer $f'(x)$ (2 pts)

(c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (4 pts)

(d) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$ (4 pts)

(e) Dresser le tableau de variation complet de la fonction f. (2 pts)

Exercice8(4pts)

Divergence d'une suite.

On considère la suite définie par $u_n = n^2 - 16n + 2964$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u(n) = +\infty$ (2 pts)

(b) Déterminer par le calcul le rang à partir duquel $u_n > 3000$ (2 pts)

Exercice9(4pts)

Convergence d'une suite.

On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{3n}{5n+8}$

(a) Montrer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{3}{5}$ (2 pts)

(b) Montrer qu'un rang à partir duquel tous les termes de la suite u_n appartiennentà l'intervalle $]\dfrac{3}{5} - 0.01; \dfrac{3}{5} + 0.01[$ est $n_0 = 95$ (2 pts)

Exercice10(20pts)

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 83 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton qui modéliser avec une suite.

Pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 83$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité:

$$T_{n+1} - T_n = k\,(T_n - M)$$

où k est une constante réelle qui dépend entre autres du type de matériaux qui constituent la tasse.

Dans la suite, on choisit $M = 21$ et $k = -0.3$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0.3\,(T_n - 21)$.

(a) Montrer que $T_1 = 64.4$ et interpréter le résultat. (2 pts)

(b) Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0.7T_n + 6.3$ (2 pts)

(c) On pose, pour tout entier naturel n: $u_n = T_n - 21$. (3 pts)
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(d) En déduire une expression du terme T_n en fonction n. (2 pts)

(e) Déterminer la limite de la suite (T_n) et interpréter le résultat. (3 pts)

(f) D'après le contexte (température dans une tasse de café), (4 pts)
peut-on conjecturer le sens de variations de la suite? Démontrer ce résultat à partir de l'expression de T_n trouvée précédemment. (T_n) ?

(g) On considère l'algorithme sous **Python** suivant :

```
T=83
n=0
while(T>=23):
    T=0.7*T + 6.3
    n=n+1
```

i. Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme? (2 pts)
(on pourra par exemple utiliser une table de valeurs sur la calculatrice).

ii. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice. (2 pts)