DM JANVIER (REF–1) de MATHEMATIQUES (TERM)
Objectif: préparer le DS7 (rentrée)

Nom et prénom: ______________________________

Conseil: commencer à travailler 10 jours seulement avant la rentrée. Lire les fiches du livre pages 474 et suivantes correspondant à chacun des exercices et les imprimer ou les recopier pour les conserver

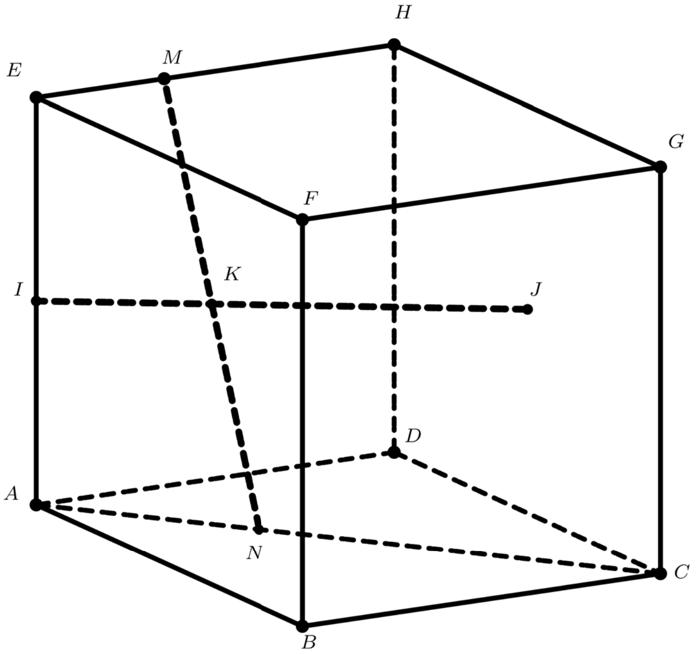
Exercice1(10pts)

Dans un cube ABCDEFGH on a placé le milieu I du segment $[AE]$ et le centre J de la face CDHG.

On a construit les points M et N tels que (dessin à main levée):

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

On construit enfin le point K milieu du segment $[MN]$



On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

(a) Après avoir déterminé les coordonnées de I et J, donner une représentation paramétrique de la droite (IJ). (2 pts)

Solution: $I\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$ d'où $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(IJ) est la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}$ donc une représentation paramétrique de (IJ) est :

$$(IJ):\begin{cases} x = 0+\frac{1}{2}t_0 \\ y = 0+t_0 \\ z = \frac{1}{2}+0t_0 \end{cases} \Leftrightarrow (IJ):\begin{cases} x = \frac{1}{2}t_0 \\ y = t_0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(b) Déterminer les coordonnées de M et N et en déduire les coordonnées de K. (4 pts)

Solution:
• $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ En utilisant CHASLES puis la définition de M.
Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ car $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$.
On en déduit que $M\left(0; \frac{1}{3}; 1\right)$

• $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right)$ en utilisant la définition de N puis CHASLES.
Donc $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ d'où $N\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$

• K étant le milieu du segment $[MN]$, $K\left(\dfrac{\frac{1}{3}+0}{2}; \dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{2}; \dfrac{0+1}{2}\right)$ soit $K\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

(c) Montrer que I,J et K sont alignés. (4 pts)

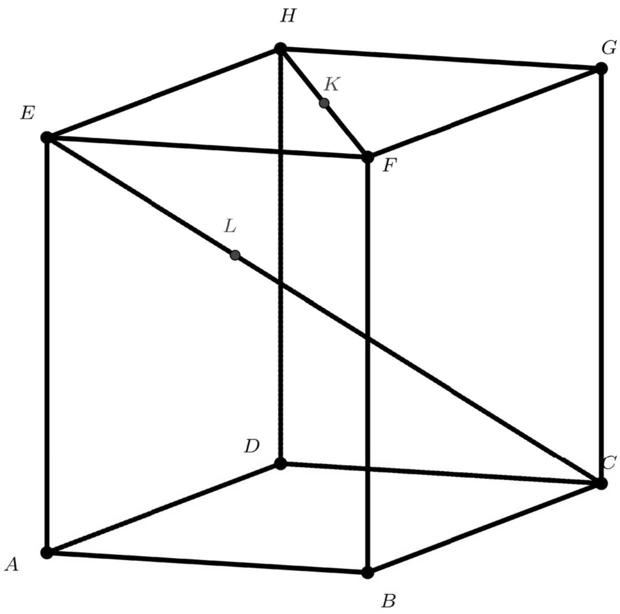
Solution: Celà revient à montrer qu'il existe une valeur t_0 de la représentation paramétrique de la droite (IJ) qui fournisse les coordonnées du point K.

$$\begin{cases} \frac{1}{6} = \frac{1}{2}t_0 \\ \frac{1}{3} = t_0 \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} \\ t_0 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{3}$$

Pour $t_0 = \frac{1}{3}$ on atteint le point K qui appartient donc à la droite (IJ).

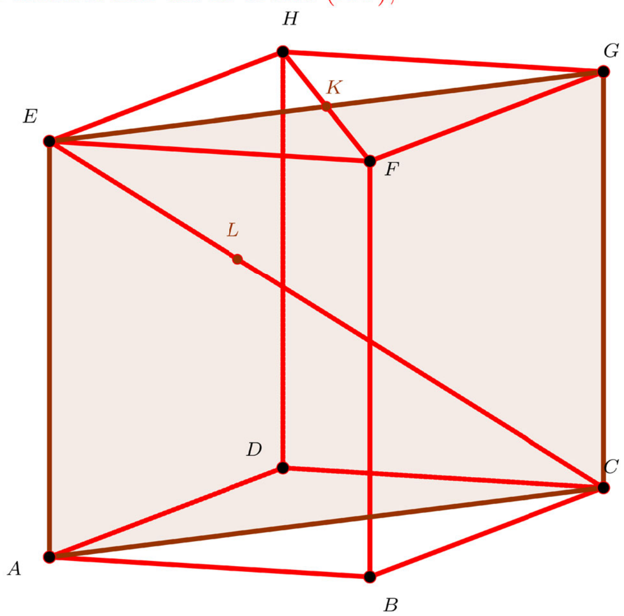
Exercice2(10pts)

Soit le cube $ABCDEFGH$ de côté 1. K est le milieu du segment $[FH]$ et L est le point tel que $\overrightarrow{CL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CE}$.



(a) Déterminer l'intersection des plans (EKL) et (ABC). (On pourra la tracer sur la figure ci-dessus ou l'expliciter par écrit.) (1 pts)

Solution:
L'intersection est la droite (AC);



(b) Démontrer que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$. (1 pts)

Solution:
En utilisant la relation de CHASLES:
$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{2}{3}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE})$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{2}{3}(-\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE} =$
$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

(c) On travaille désormais dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. (1 pts)
Déduire les coordonnées du point L dans ce repère.

Solution:
$\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ donc $L(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3})$

(d) Donner sans justification les coordonnées des points C, E et K. (1 pts)

Solution: $C(1, 1, 0)$, $E(0, 0, 1)$ et $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

(e) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CE). (1 pts)

Solution:
La droite (CE) est la droite passant par $C(1; 1; 0)$ et
de vecteur directeur $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} x_E - x_C \\ y_E - y_C \\ z_E - z_C \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Une représentation paramétrique de la droite (CE) est:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

(f) Démontrer que la droite (AK) a pour représentation paramétrique (1 pts)
$\begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 2s \end{cases}$ (avec $s \in \mathbb{R}$) .

Solution:
La droite (AK) est la droite passant par $A(0; 0; 0)$ et $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$
de vecteur directeur $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} x_K - x_A \\ y_K - y_A \\ z_K - z_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.
Une représentation paramétrique de la droite (AK) est:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}r \\ y = \frac{1}{2}r \\ z = r \end{cases}$$

Soit en posant comme nouveau paramètre $s = \frac{1}{2}r$:

$$\begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 2s \end{cases} \quad (\text{avec } s \in \mathbb{R}) \ .$$

Remarque: on peut aussi montrer que les points A et K appartiennent la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 2s \end{cases} \quad (\text{avec } s \in \mathbb{R})$:

- $A \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = s \\ 0 = s \\ 0 = 2s \end{cases} \quad (\text{avec } s \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow s = 0$, le système est bien compatible.
- $K \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 = s \\ 1/2 = s \\ 1 = 2s \end{cases} \quad (\text{avec } s \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow s = \frac{1}{2}$, le système est bien compatible.

(g) Vérifier que les droites (AK) et (CE) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. (2 pts)

Solution:
Un point M(x;y;z) appartient aux droites (AK) et (CE) si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = \frac{1}{2}r \\ y = \frac{1}{2}r \\ z = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}r = 1 - t \\ \frac{1}{2}r = 1 - t \\ r = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{2}{3} \\ r = t \end{cases} .$$

(Le système est compatible)

On a alors pour $s = r = \dfrac{2}{3}$:

$$\begin{cases} x = 1 - t = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = 1 - t = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = \dfrac{2}{3} \end{cases} .$$

Les droites (AK) et (CE) sont donc sécantes et les coordonnées de leur point d'intersection sont $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3})$.

(h) Que peut-on conclure pour le point L ? (1 pts)

Solution:
D'après ce qui précède et la question 3), L est le point d'intersection des

droites (AK) et (CE).

(i) Le triangle KLE est-il isocèle en L ? (1 pts)

Solution:
$L(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ et $E(0; 0; 1)$.
$LE = \sqrt{(0-\frac{1}{3})^2 + (0-\frac{1}{3})^2 + (1-\frac{2}{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$LK = \sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{2}-\frac{2}{3})^2 + (1-\frac{2}{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.
Le triangle KLE n'est pas isocèle en L

Exercice3(2pts)

Variation de la composée de deux fonctions.

On considère deux fonctions continues g et u dont les tableaux de variations sont donnés ci-après:

x	-11		-5		3		9		$+\infty$
Variations de u	6	$\searrow$	-1	$\searrow$	-8	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	11

x	-8		-1		6		11
Variations de g	-5	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\searrow$	-9

(a) Calculer $g \circ u(-11)$, $g \circ u(-5)$, $g \circ u(3)$, $g \circ u(9)$ et $\lim_{x \to +\infty} g \circ u(x)$. (1 pts)

Solution:
$g \circ u(-11) = g(6) = -4$,
$g \circ u(-5) = g(-1) = -3$,
$g \circ u(3) = g(-8) = -5$,
$g \circ u(9) = g(-1) = -3$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} g \circ u(x) = g(11) = -9$.

(b) Dresser le tableau de variation COMPLET de la fonction $g \circ u$. Justifier. (1 pts)

Solution:
Détaillons le comportement de la fonction $g \circ u$ sur les intervalles suivants:

• Sur $[-11; -5]$
Si $x \in [-11; -5]$ alors $u(x) \in [-1; 6]$
La fonction u est décroissante sur $[-11; -5]$ et la fonction g est décroissante sur $[-1; 6]$. La fonction $g \circ u$ est donc croissante sur $[-11; -5]$.

• $[-5; 3]$
Si $x \in [-5; 3]$ alors $u(x) \in [-8; -1]$
La fonction u est décroissante sur $[-5; 3]$ et la fonction g est croissante sur $[-8; -1]$. La fonction $g \circ u$ est donc décroissante sur $[-5; 3]$.

• $[3; 9]$
Si $x \in [3; 9]$ alors $u(x) \in [-8; -1]$
La fonction u est croissante sur $[3; 9]$ et la fonction g est croissante sur $[-8; -1]$. La fonction $g \circ u$ est donc croissante sur $[3; 9]$.

• $[9; +\infty[$
Si $x \in [9; +\infty[$ alors $u(x) \in [-1; 11[$
La fonction u est croissante sur $[9; +\infty[$ et la fonction g est décroissante sur $[-1; 11[$. La fonction $g \circ u$ est donc décroissante sur $[9; +\infty[$.

D'où le tableau de variation de $g \circ u$:

x	-11		-5		3		9		$+\infty$
Variations de f	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-9

Exercice4(24pts)

Evolution d'une population: récurrence et inégalités

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île.

PARTIE A

Au début de l'année 2000 on comptait dans cette population 400 individus.
Une étude a permis de modéliser la population de tortues par la suite (u_n)

définie par $\begin{cases} u_0 = 0.4 \\ u_{n+1} = 0.8u_n(1-u_n) \end{cases}$
où pour tout entier n, u_n modélise le nombre d'individus de la population de tortues , en milliers au début de l'année 2000+n.

(a) Déterminer le nombre d'individus de la population de tortues en 2001. (2 pts)

Solution: $u_1 = 0.8 \times 0.4 \times (1-0.4) = 0.192$
On a donc 192 individus en 2011.

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0;1]$ (2 pts)

Solution: Soit pour un entier naturel n, la proposition $\mathbb{P}_n$: $0 \leqslant u_n \leqslant 1$
.
Initialisation
$u_0 = 0.4 \in [0;1]$
Donc $\mathbb{P}_0$ est vraie.
Hérédité
On suppose $\mathbb{P}_n$ vraie pour un n donné.

On a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$
$\Rightarrow 0.8 \times 0 \leqslant 0.8 \times u_n \leqslant 0.8 \times 1$
(en multipliant par 0.8 les trois membres de l'inégalité).

$\Rightarrow 0 \leqslant 0.8 \times u_n \leqslant 0.8$
$\Rightarrow 0 \times (1-u_n) \leqslant 0.8 \times u_n \times (1-u_n) \leqslant 0.8 \times (1-u_n)$
(En multipliant les trois membres de l'inégalité par $(1-u_n)$ qui est positif car: $0 \leqslant u_n \leqslant 1 \Rightarrow 0 \times (-1) \geqslant u_n \times (-1) \geqslant 1 \times (-1)$
$\Rightarrow 0 \geqslant -u_n \geqslant -1$
$\Rightarrow 1+0 \geqslant 1-u_n \geqslant 1-1$
$\Rightarrow 1 \geqslant 1-u_n \geqslant 0$
$\Rightarrow (1-u_n) \in [0;1]$).

$\Rightarrow 0 \leqslant 0.8 \times u_n \times (1-u_n) \leqslant 0.8$
(car $(1-u_n) \leqslant 1 \Rightarrow 0.8 \times (1-u_n) \leqslant 0.8$).

Soit finalement $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.8 \leqslant 1$

Donc $\mathbb{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion
D'après le principe de récurrence, $\mathbb{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

(c) Montrer alors que pour tout entier naturel n, (2 pts)
$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.8u_n$
(Indication: aucune récurrence n'est nécéssaire)

Solution:
Par définition $u_{n+1} = 0.8u_n(1-u_n)$. D'après la question précédente, $(1-u_n) \in [0;1]$ soit $0 \leqslant 1-u_n \leqslant 1$
donc $0 \leqslant 0.8u_n(1-u_n) \leqslant 0.8u_n$ en multipliant chaque membre de l'inégalité par $0.8u_n$

(d) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0.4 \times 0.8^n$ (2 pts)

Solution: Soit $\mathbb{P}_n$ la proposition $0 \leqslant u_n \leqslant 0.4 \times 0.8^n$.
Initialisation
$u_0 = 0.4$ et $0.8^0 = 1$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 0.4 \times 0.8^0$
Hérédité
On suppose $\mathbb{P}_n$ vraie pour un entier naturel n donné.
On a alors
$0 \leqslant u_n \leqslant 0.4 \times 0.8^n$
$\Rightarrow 0.8 \times (1-u_n) \times 0 \leqslant 0.8 \times (1-u_n) \times u_n \leqslant 0.8 \times (1-u_n) \times 0.4 \times 0.8^n$
(En multipliant les membres de l'inégalité par $0.8 \times (1-u_n)$)

Soit $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant (1-u_n) \times 0.4 \times 0.8^{n+1}$

Comme $(1-u_n) < 1$, on a $(1-u_n) \times 0.4 \times 0.8^{n+1} \leqslant 0.4 \times 0.8^{n+1}$
D'où $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.4 \times 0.8^{n+1}$.

Donc $\mathbb{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion
D'après le principe de récurrence, $\mathbb{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

(e) En déduire la limite de u_n. Conclure sur l'évolution de la population de tortues. (2 pts)

Solution: $0 \leqslant u_n \leqslant 0.4 \times 0.8^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0.8^n = 0$ car $0 < 0.8 < 1$.
D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
Cette espèce est donc menacée.

(f) Recopier et complèter le programme python ci-dessous pour répondre au problème suivant: (2 pts)
La population de tortues sera considérée comme en voie de disparition si le nombre d'individus descend en dessous du seuil critique de 22.
On souhaite que le programme python affiche **l'année** à partir de laquelle l'espèce sera considérée comme en voie de disparition.

```
u=0.4
n=0
while (...):
        n = ...
        u = ...
print(...)
```

Solution:

```
u=0.4
n=0
while (u * 1000 > 22):
        n = n + 1
        u = 0.8 * u * (1 - u)
print(2000+n)
```

PARTIE B

Au début de l'année 2008 il ne reste plus que 22 individus dans la population de tortues.
Une action de repeuplement est décidé et on constate que la nouvelle modélisation de l'évolution de la population de tortues est donnée par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_8 = 0.022 \\ v_{n+1} = 1.04 v_n (1 - v_n) \end{cases}$$

(a) Calculer v_9 arrondi au millième. (2 pts)

Solution: $v_9 \approx 0.022$

(b) Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto 1.04x(1-x)$. (2 pts)
Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

Solution:
f est une fonction polynôme de degré 2 donc dérivable sur $\mathbb{R}$:
$f(x) = -1.04x^2 + 1.04x \Rightarrow f'(x) = -2 \times 1.04 \times x + 1.04$
Soit en factorisant par 1.04 : $f'(x) = 1.04 \times (-2x + 1)$
Etude du signe de f':
f' est du même signe que la fonction affine $x \mapsto -2x + 1$.
$-2x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow -2x \geqslant -1 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{2}$ (On change le sens de l'inégalité car on a divisé par $-2 < 0$).
On en déduit le tableau de variation suivant sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$:

x	0		$\frac{1}{2}$
Signe de f'(x)		$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1.04}{4}$

f est donc croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Remarque: on peut aussi trouver ce résultat par des considérations graphiques. La courbe de f est une parabole. La forme factorisée permet de trouver immédiatement les racines 0 et 1 de f et d'en déduire les coordonnées du sommet de la parabole ($S_x = \frac{1}{2}$).

(c) En utilisant la croissance de f, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ (2 pts)

Solution: Rappel de cours:
Si f est croissante sur I, $a \in I$ et $b \in I$ alors $a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$ (On dit aussi que f conserve le sens des inégalité).
Notons $\mathbb{P}_n$ la proposition "$0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2}$" pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 8

<u>Initialisation</u>
$v_8 = 0.022$ donc $0 \leqslant v_8 \leqslant \dfrac{1}{2}$ c'est à dire $\mathbb{P}_0$ vraie.
<u>Hérédité</u>
Supposons $\mathbb{P}_n$ vraie pour un entier naturel n donné supérieur ou égal à 8
On a alors
$0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(0) \leqslant f(v_n) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ car f est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$,
$\Rightarrow 0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1.04}{4}$.
Comme $\dfrac{1.04}{4} \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ c'est à dire $\mathbb{P}_{n+1}$ vraie.
<u>Conclusion</u>
D'après le principe de récurrence, $\mathbb{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 8.

(d) Toujours en utilisant la croissance de f, (2 pts) montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1}$.

Solution: Notons $\mathbb{P}_n$ la proposition "$v_n \leqslant v_{n+1}$" pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 8.

Initialisation

$v_8 = 0.022$ et $v_9 = 0.022$ donc $v_8 \leqslant v_9$ c'est à dire $\mathbb{P}_0$ vraie.

Hérédité

Supposons $\mathbb{P}_n$ vraie pour un entier naturel n donné supérieur ou égal à 8

On a donc $v_n \leqslant v_{n+1}$ avec $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2}$ et $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ et f est croissante d'où:

$f(v_n) \leqslant f(v_{n+1})$ soit $v_{n+1} \leqslant v_{n+2}$ c'est à dire $\mathbb{P}_{n+1}$ vraie.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, $\mathbb{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 8.

(e) Rappeler le théorème du point fixe (2 pts)

En utilisant ce théorème, montrer que la suite (v_n) est convergente et que sa limite L vérifie $L = 1.04L\,(1 - L)$.

Solution:

Théorème du point fixe:

Si une suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f **fonction continue** dont on sait qu'elle converge vers L, alors L est solution de l'équation $f(L) = L$.

• La fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

• (v_n) est une suite croissante majorée par $\frac{1}{2}$ donc d'après le cours, cette suite sera convergente vers une limite L.

D'après le théorème du point fixe, $f(l) = l$ soit $L = 1.04L\,(1 - L)$

(f) La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction? (2 pts)

Vers quelle valeur va se stabiliser le nombre d'individus?

Solution:

$L = 1.04L\,(1 - L) \Leftrightarrow -1.04L^2 + 0.04L = 0 \Leftrightarrow L(-1.04L + 0.04) = 0$

$\Leftrightarrow L = 0$ ou $L = \frac{0.04}{1.04} \approx 0.0385$.

D'après la question précédente, la suite (u_n) converge soit vers 0 soit vers $\frac{0.04}{1.04}$. Pour déterminer laquelle de ces deux limites est la bonne, on peut noter que $v_8 = 0.022$ et que la suite (v_n) est croissante. Donc sa limite L vérifie $L \geqslant 0.022$. On en déduit que L ne peut être nul et donc que $L = \frac{0.04}{1.04} \approx 0.0385$.

Celà veut dire que la population va se stabiliser autour de 39 individus:

la population n'est plus en voie de disparition.

Exercice5(4pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \frac{5}{6}x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 35x - 10$$

(a) Calculer la dérivée de la fonction f et en déduire le tableau de variation COMPLET de f. (2 pts)
On justifiera le signe de la dérivée.

Solution:

• La fonction f est polynomiale donc dérivable et:
$f'(x) = \frac{5}{6} \times 3x^2 - \frac{15}{2} \times 2x + -35$
$f'(x) = \frac{5}{2}x^2 - 15x + -35.$

• $f'(x) = \frac{5}{2}x^2 - 15x + -35$ est une fonction polynomiale de degré 2 dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 15^2 - 4 \times \frac{5}{2} \times -35 = 16$,
et les racines $x_1 = \frac{11}{5}$ et $x_2 = \frac{19}{5}$.

• Comme on a $\frac{5}{2} > 0$, on une parabole orientée vers le haut qui coupe l'axe des abscisse en $x_1 = \frac{11}{5}$ et $x_2 = \frac{19}{5}$, d'où le tableau de variation de f:

x	$-\infty$		$\frac{11}{5}$		$\frac{19}{5}$		$+\infty$
Signe de f'(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\frac{11}{5})$	$\searrow$	$f(\frac{19}{5})$	$\nearrow$	$+\infty$

• Concernant les limites de $f(x) = \frac{5}{6}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + -35x - 10$ en $+\infty$ et $-\infty$ on remarque que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{6}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + -35x - 10 =$ "$(+\infty) - (+\infty) + (+\infty) - 10$" et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{6}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + -35x - 10 =$ "$(-\infty) - (+\infty) + (-\infty) - 10$" qui sont des Formes Indéterminées.
Pour lever l'indétermination on factorise:
$f(x) = \frac{5}{6}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + -35x - 10 = x^3 \left(\frac{5}{6} - \frac{\frac{15}{2}}{x} + \frac{-35}{x^2} + \frac{-10}{x^3} \right).$

On alors:
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{5}{6} - \frac{\frac{15}{2}}{x} + \frac{-35}{x^2} + \frac{-10}{x^3}\right) = (+\infty)*(\frac{5}{6}+0+0+0) = +\infty$

et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{5}{6} - \frac{\frac{15}{2}}{x} + \frac{-35}{x^2} + \frac{-10}{x^3}\right) = (-\infty)*(\frac{5}{6}+0+0+0) = -\infty$

(b) Calculer la dérivée seconde de f et étudier la convexité de la fonction f. (2 pts)

Solution:
$f'(x) = \frac{5}{2}x^2 - 15x + \frac{-35}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
et $f''(x) = \left[\frac{5}{2}x^2 - 15x + \frac{-35}{2}\right]' = \frac{5}{2} \times 2x - 15 = 5x - 15.$
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 5x - 15 > 0 \Leftrightarrow x > 3.$
On a donc le tableau de signe de f'':

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de f''(x)		$-$	0	$+$	

La fonction f admet un point d'inflexion au point $R(3; f(3))$.
Elle est concave sur $]-\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$.

Exercice6(10pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (-4x - 5)e^{-3x}$$

(a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ en indiquant clairement chaque théorème utilisé. (2 pts)

Solution:
- $\lim_{x\to+\infty} (-4x - 5) = -\infty$ (fonction affine)
- $\lim_{x\to+\infty} -3x = -\infty$ et $\lim_{a\to-\infty} e^a = 0$ donc par le théorème de composition

des limites $\lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$
On a la forme indéterminée $(+\infty) \times 0$.
Par théorème de croissance comparée de la fonction exponentielle:
$\lim_{x\to+\infty} (-4x - 5)e^{-3x} = 0$

(b) Calculer de même $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ en indiquant clairement chaque théorème utilisé. (2 pts)

Solution:
- $\lim_{x\to-\infty} (-4x - 5) = +\infty$ (fonction affine)

• $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x = +\infty$ et $\lim\limits_{a\to+\infty} e^a = +\infty$ donc par le théorème de composition des limites $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-3x} = +\infty$
Finalement $\lim\limits_{x\to-\infty} (-4x-5)e^{-3x} = (+\infty)\times(+\infty) = +\infty$ par les théorèmes d'opération sur les limites

(c) Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = (12x + 11)e^{-3x}$ puis en déduire son tableau de variation COMPLET. (2 pts)

Solution:
$f(x) = (-4x - 5)e^{-3x}$
• f est dérivable et on a $f'(x) = [uv]' = u'v + uv'$
avec $u(x) = -4x - 5 \Rightarrow u'(x) = -4$ et $v(x) = e^{-3x} \Rightarrow v'(x) = -3e^{-3x}$.
D'où $f'(x) = -4 \times e^{-3x} + (-4x - 5) \times 1e^{-3x})$
$f'(x) = (12x + 11)e^{-3x}$ en factorisant par e^{-3x}.
• Comme $e^a > 0$ pour tout a réel, le signe de f' ne dépend que du signe de la fonction affine $g(x) = 12x + 11$.
$g(x) > 0 \Leftrightarrow 12x + 11 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{-11}{12}$

x	$-\infty$		$\frac{-11}{12}$		$+\infty$
Signe de f'(x)		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\frac{-11}{12})$	$\nearrow$	0

(d) Montrer que la dérivée seconde de f est $f''(x) = (-36x - 21)e^{-3x}$ puis montrer que la courbe de représentative de $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion. On donnera la valeur exacte de l'abscisse de ce point d'inflexion. (2 pts)

Solution:
$f'(x) = (12x + 11)e^{-3x}$,
$f''(x) = [rs]' = r's + rs'$ avec
$r(x) = 12x + 11 \Rightarrow r'(x) = 12$ et $s(x) = e^{-3x} \Rightarrow s'(x) = -3e^{-3x}$
$f''(x) = 12e^{-3x} + (12x + 11) \times 1e^{-3x}$,
$f''(x) = (-36x - 21)e^{-3x}$.
Comme $e^a > 0$ pour tout a réel, le signe de f'' ne dépend que du signe de la fonction affine $g(x) = -36x - 21$.
$g(x) > 0 \Leftrightarrow -36x - 21 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{-7}{12}$ d'où le tableau de signe:

x	$-\infty$		$\frac{-7}{12}$		$+\infty$
Signe de f”(x)		$+$	0	$-$	

La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = \frac{-7}{12}$.

(e) Indiquer l'intervalle où la fonction est convexe et celui ou elle est concave. (2 pts)

Solution:
Daprès le tableau précédent:

x	$-\infty$		$\frac{-7}{12}$		$+\infty$
Signe de f”(x)		$+$	0	$-$	

la fonction f est:
- CONVEXE sur $]-\infty; \frac{-7}{12}]$,
- CONCAVE sur $[\frac{-7}{12}; +\infty[$.

On peut vérifier sur un graphique avec la calculatrice mais en réglant correctement l'échelle.

Exercice7(14pts)

On considère la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{-4x}{5x^2 - 5}$.

(a) Donner le domaine de définition D_f de la fonction f. (2 pts)

Solution: f est une fonction rationnelle.
Elle est calculable si et seulement si
$5x^2 - 5 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq \dfrac{5}{5} \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 1$
D'où $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[= \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$.

(b) Justifier la dérivabilité de f sur D_f et calculer $f'(x)$ (2 pts)

Solution:
f est un quotient de polynômes défini sur D_f donc dérivable sur D_f,
$f'(x) = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
avec $u(x) = -4x \Rightarrow u'(x) = -4$
et $v(x) = 5x^2 - 5 \Rightarrow v'(x) = 10x$

D'où $f'(x) = \dfrac{-4 \times (5x^2 - 5) - (-4x \times 10x)}{(5x^2 - 5)^2}$

$$f'(x) = \frac{20x^2+20}{(5x^2-5)^2}$$

(c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (4 pts)

Solution: $f(x) = \dfrac{x}{x^2} \times \dfrac{-4}{5-\dfrac{5}{x^2}} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{-4}{5-\dfrac{5}{x^2}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{5-\dfrac{5}{x^2}} = \dfrac{-4}{5}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

De même on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(d) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)$ (4 pts)

Solution:
On a $\lim\limits_{x\to1} 5x^2-5 = 5(1)^2-5 = 0$ et $\lim\limits_{x\to-1} 5x^2-5 = 5(-1)^2-5 = 0$: d'après les théorèmes d'opérations sur les limites du type $\dfrac{l}{0}$, celles-ci dépendent du fait que le dénominateur soit positif ou négatif.

Avant de calculer ces limites, on a besoin de connaitre le signe de $5x^2-5$. La fonction $g : x \mapsto 5x^2-5$ est polynômiale de degré 2 et de racines -1 et 1, dont la parabole représentative est orientée vers le haut ($5>0$) et dont le sommet a pour abscisse $x=0$ d'où le tableau de signes:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de g(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc:

- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \dfrac{-4\times1}{0^+} = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \dfrac{-4\times1}{0^-} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = \dfrac{-4\times(-1)}{0^-} = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = \dfrac{-4\times(-1)}{0^+} = +\infty$

(e) Dresser le tableau de variation complet de la fonction f. (2 pts)

Solution: On commence par déterminer le signe de f':
$20x^2 + 20 \geqslant 0$ et $(5x^2 - 5)^2 \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$ sur D_f.
On a donc le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$ -1	-1 1	1 $+\infty$
Signe de f'(x)	$+$	$+$	$+$
Variations de f	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$

Exercice8(4pts)

Divergence d'une suite.

On considère la suite définie par $u_n = n^2 - 16n + 2964$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n) = +\infty$ (2 pts)

Solution:
$u_n = n^2 \times 1 + n^2 \times \dfrac{-16}{n} + n^2 \times \dfrac{2964}{n^2} = n^2\left(1 + \dfrac{-16}{n} + \dfrac{2964}{n^2}\right)$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{-16}{n} + \dfrac{2964}{n^2}\right) = "1+0+0" = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.
D'après les théorèmes d'opérations sur les limites:
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = "+\infty" \times 1 = +\infty$.

(b) Déterminer par le calcul le rang à partir duquel $u_n > 3000$ (2 pts)

Solution:
Méthode 1, la plus facile
On utilise une table de valeurs sur la calculatrice et on trouve que $u_n > 3000$ à partir de $n_0 = 19$.
Méthode2: la plus intelligente...
$u_n > 3000 \Leftrightarrow u_n = n^2 - 16n + 2964 > 3000 \Leftrightarrow n^2 - 16n - 36 > 0$.
Le problème revient donc à étudier le signe du polynôme du second degré $P(x) = x^2 - 16x - 36$.
Son discriminant est $\Delta = (-16)^2 + 4 \times 1 \times 36 = 400$, et ses racines sont $x_0 = \dfrac{-(-16) - \sqrt{400}}{2 \times 1} = -2$ et $x_1 = \dfrac{-(-16) + \sqrt{400}}{2 \times 1} = 18$.

n étant un entier naturel, donc positif, on en déduit qu'à partir de $n_0 = 19$ les termes de la suite (u_n) sont strictement supérieurs à 3000.

Exercice9(4pts)

Convergence d'une suite.

On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{3n}{5n+8}$

(a) Montrer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{5}$ (2 pts)

Solution:
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n}{5n+8} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\times 3}{n\times\left(5+\frac{8}{n}\right)}$
$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{5+\frac{8}{n}} = \dfrac{3}{5+0} = \dfrac{3}{5}$

(b) Montrer qu'un rang à partir duquel tous les termes de la suite u_n appartiennentà l'intervalle $]\dfrac{3}{5}-0.01; \dfrac{3}{5}+0.01[$ est $n_0 = 95$ (2 pts)

Solution:
Étudions l'inégalité $\dfrac{3}{5}-0.01 < u_n < \dfrac{3}{5}+0.01$
soit $\begin{cases} \frac{3}{5}-0.01 < u_n \\ u_n < \frac{3}{5}+0.01 \end{cases}$
On a donc deux inégalités à vérifier.

• $u_n > \dfrac{3}{5}-0.01 \Leftrightarrow \dfrac{3n}{5n+8} > \dfrac{3}{5}-0.01$
$\Leftrightarrow 3n > (\dfrac{3}{5}-0.01)(5n+8)$
$\Leftrightarrow 3n > \left(\dfrac{3}{5}-0.01\right)5n + \left(\dfrac{3}{5}+0.01\right)\times 8$
$\Leftrightarrow 3n - \left(\dfrac{3}{5}+0.01\right)\times 5n > 8\left(\dfrac{3}{5}+0.01\right)$
$\Leftrightarrow 5\times 0.01n > 8\left(\dfrac{3}{5}+0.01\right)$
$\Leftrightarrow n > \dfrac{8(\frac{3}{5}-0.01)}{5\times 0.01}$
$\Leftrightarrow n \geqslant 95$ car $\dfrac{8(\frac{3}{5}-0.01)}{5\times 0.01} \approx 94.4$

• $u_n < \frac{3}{5} + 0.01$

$\Leftrightarrow \dfrac{3n}{5n+8} < \dfrac{3}{5} + 0.01 \Leftrightarrow 3n < \left(\dfrac{3}{5} + 0.01\right) \times (5n+8)$

... en reprenant les calculs précédents.

$\Leftrightarrow n > \dfrac{8(\frac{3}{5} + 0.01)}{-5 \times 0.01}$. (On inverse l'inégalité car on divise par un nombre négatif).

Or $\dfrac{8(\frac{3}{5} + 0.01)}{-5 \times 0.01} < 0$ donc cette inégalité est toujours vérifiée car $n \geqslant 0$ et n'apporte donc aucune information supplémentaire sur n_0.

On conclut que les termes de la suite u_n appartiennent à

l'intervalle $]\dfrac{3}{5} - 0.01; \dfrac{3}{5} + 0.01[$ à partir du rang $n_0 = 95$

Exercice10(20pts)

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 83 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton qui modéliser avec une suite.

Pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 83$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité:

$$T_{n+1} - T_n = k\,(T_n - M)$$

où k est une constante réelle qui dépend entre autres du type de matériaux qui constituent la tasse.

Dans la suite, on choisit $M = 21$ et $k = -0.3$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0.3\,(T_n - 21)$.

(a) Montrer que $T_1 = 64.4$ et interpréter le résultat. (2 pts)

Solution:
On a $T_{n+1} - T_n = k\,(T_n - M)$, soit $T_{n+1} - T_n = -0.3\,(T_n - 21)$.
On en déduit $T_{0+1} - T_0 = -0.3\,(T_0 - 21)$, soit $T_1 - 83 = -0.3\,(83 - 21)$, d'où $T_1 = 83 - 0.3 \times (83 - 21) = 64.4$.
Au bout d'une minute, la température du café est descendu à 64.4 ° Celsius.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0.7T_n + 6.3$ (2 pts)

Solution:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$T_{n+1} - T_n = -0.3\,(T_n - 21)$
$\Leftrightarrow T_{n+1} = T_n - 0.3\,(T_n - 21)$
$\Leftrightarrow T_{n+1} = (1 - 0.3)\,T_n + 0.3 \times 21$
$\Leftrightarrow T_{n+1} = 0.7T_n + 6.3$.

(c) On pose, pour tout entier naturel n: $u_n = T_n - 21$. (3 pts)
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Solution:
Pour tout n,
$u_{n+1} = T_{n+1} - 21 = (0.7T_n + 6.3) - 21 = 0.7T_n - 14.7 = 0.7\left(T_n - \dfrac{14.7}{0.7}\right)$
Soit $u_n = 0.7\,(T_n - 21) = 0.7u_n$
donc $u_{n+1} = 0.7u_n$.
La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $q = 0.7$
et de premier terme $u_0 = T_0 - 21 = 83 - 21 = 62$.

(d) En déduire une expression du terme T_n en fonction n. (2 pts)

Solution:
D'après le cours, pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n = 62 \times 0.7^n$
donc, comme $u_n = T_n - 21 \Leftrightarrow T_n = u_n + 21$,
on a donc $T_n = 62 \times 0.7^n + 21$.

(e) Déterminer la limite de la suite (T_n) et interpréter le résultat. (3 pts)

Solution: $-1 < 0.7 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.7^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 62 \times 0.7^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 21$.

Dans le temps, la température du café va se rapprocher de celle du milieu, ce qui est conforme à l'intuition.

(f) D'après le contexte (température dans une tasse de café), peut-on conjecturer le sens de variations de la suite? Démontrer ce résultat à partir de l'expression de T_n trouvée précédemment. (T_n) ? (4 pts)

Solution:
Suivant l'intuition, la tempèrature dans la tasse va baisser.
On doit donc montrer que la suite (T_n) est décroissante.
Méthode 1
Pour tout entier n, étudions le signe de $T_{n+1} - T_n$:
$T_{n+1} - T_n = (62 \times 0.7^{n+1} + 21) - (62 \times 0.7^n + 21)$
$= 62 \times (0.7^{n+1} - 0.7^n)$
Soit $T_{n+1} - T_n = 62 \times (0.7^n \times 0.7 - 0.7^n \times 1) = 62 \times 0.7^n \times (0.7 - 1)$
$= 62 \times 0.7^n \times (-0.3)$
On en déduit que $T_{n+1} - T_n$ est négatif pour tout entier n.
Donc la suite (T_n) est décroissante.

Méthode 2
On peut montrer par récurrence que la proposition $P_n : T_{n+1} \leqslant T_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

(g) On considère l'algorithme sous **Python** suivant :

```
T=83
n=0
while(T>=23):
    T=0.7*T + 6.3
    n=n+1
```

i. Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme? (2 pts)
(on pourra par exemple utiliser une table de valeurs sur la calculatrice).

Solution:

Cet algorithme détermine la première valeur n_0 pour laquelle si $n > n_0$ alors $T_n < 23$
En saisissant la suite T_n sur la calculatrice, on obtient les valeurs suivantes
...
$T_9 = 23.501923633999999628$
$T_{10} = 22.75134654379999969$
...

Donc, à la fin de l'algorithme, n vaut donc 10.

ii. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice. (2 pts)

Solution: Cela signifie que la température du café dans la tasse passera sous le seuil de 23 °Celsius àprès 10 minutes.