DS6 (5) de MATHEMATIQUES (TERM SPE) 2025

Nom et prénom: ____________________

Exercice1(10pts)

Sur une petite île de l'Océan Indien, une équipe de scientifiques étudie la population d'une bestiole nommée le " Magmar ".
Au début de l'étude il y avait 160 milliers de Magmars sur l'île. Chaque année le nombre de Magmars diminue de 25% et l'équipe en rajoute alors 90 milliers pour essayer de stabiliser la population de Magmar.
On note l'effectif de cette population en milliers après n années.

(a) i. Donner la valeur de u_0. (½ pts)

Solution:
D'après l'énoncé, au début de l'étude il y avait 160 Magmars. C'est la valeur de u_0:

$$u_0 = 160$$

ii. Déterminer le nombre de bestioles après 1 an. (½ pts)

Solution:
Au bout d'un an, le nombre de Magmars a diminué de 25%, il reste donc $160 \times \left(1 - \dfrac{25}{100}\right) = 120$ milliers de Magmars.
On rajoute chaque année 90 Magmars ce qui donne finalement en milliers de Magmars:

$$u_1 = 120 + 90 = 210$$

iii. Expliquer pourquoi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 0.75u_n + 90$ (1 pts)

Solution:
En reprenant le raisonnement précédent, à l'anné $(n+1)$ le nombre de Magmars diminue de 25% par rapport à l'année (n),
il reste donc $u_n \times \left(1 - \dfrac{25}{100}\right) = 0.75u_n$ milliers de Magmars.
On rajoute également 90 Magmars par rapport à l'année (n), ce qui donne finalement

$$u_{n+1} = 0.75u_n + 90$$

(b) i. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 360$ (2 pts)

Solution:
Soit pour un entier naturel n, la proposition $\mathbb{P}_n$: $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 360$.

Initialisation
$u_0 = 160$ et $u_1 = 210$.

On a bien $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 360$.
Donc $\mathbb{P}_0$ est vraie.

Hérédité
Supposons $\mathbb{P}_n$ vraie pour une valeur donnée de n.

$\mathbb{P}_n$ vraie
$\Leftrightarrow u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 360$

$\Leftrightarrow u_n \times 0.75 \leqslant u_{n+1} \times 0.75 \leqslant 360 \times 0.75$
en multipliant chaque membre de l'inégalité par $0.75 > 0$

$\Leftrightarrow u_n \times 0.75 + 90 \leqslant u_{n+1} \times 0.75 + 90 \leqslant 360 \times 0.75 + 90$
en ajoutant 90 à chaque membre de l'inégalité

$\Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 360$
car d'une part $u_{n+1} = 0.75u_n + 90$ et $u_{n+2} = 0.75u_{n+1} + 90$ et d'autre part $360 \times 0.75 + 90 = 360$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}_{n+1}$ vraie.

Conclusion
D'après le principe de récurrence, $\mathbb{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii. En déduire que la suite (u_n) est convergente. (1 pts)

Solution:
• D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
• Toujours d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant 360$ donc la suite (u_n) est majorée par 360.
D'après le cours, la suite (u_n) étant **croissante et majorée** elle est convergente.

(c) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 360$.

i. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. (préciser sa raison et son premier terme). (2 pts)

Solution:
On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 360$, par définition de (v_n) d'où:

$v_{n+1} = 0.75u_n + 90 - 360$, par définition de (u_n)

$v_{n+1} = 0.75u_n - 270$

$v_{n+1} = 0.75\left(u_n + \dfrac{-270}{0.75}\right)$, en factorisant par 0.75

$v_{n+1} = 0.75\,(u_n - 360)$, puisque $\dfrac{-270}{0.75} = -360$

$v_{n+1} = 0.75v_n$, par définition de (v_n).

Donc v_n est bien une suite géométrique de raison 0.75 et de premier terme $v_0 = u_0 - 360 = 160 - 360 = -200$.

ii. En déduire une expression explicite de v_n en fonction de n. (1 pts)

Solution:
D'après le cours une suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 et de raison q a pour expression explicite $v_n = v_0 \times q^n$.
On a donc $v_n = -200 \times 0.75^n$

iii. En déduire une expression explicite de v_n en fonction de n. (1 pts)

Solution:
$v_n = u_n - 360$

$\Leftrightarrow -200 \times 0.75^n = u_n - 360$, en utilisant la formule explicite de v_n de la question précédente

$\Leftrightarrow u_n = -200 \times 0.75^n + 360$

iv. Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter le résultat. (1 pts)

Solution:
D'après le cours,
Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} -200 \times 0.75^n + 360 = " - 200 \times 0 + 360 = 360"$.
Celà montre que par ce procédé (en rajoutant 90 Magmars chaque année) on parviendra à stabiliser la population autour de 360 individus.

Exercice2(10pts)

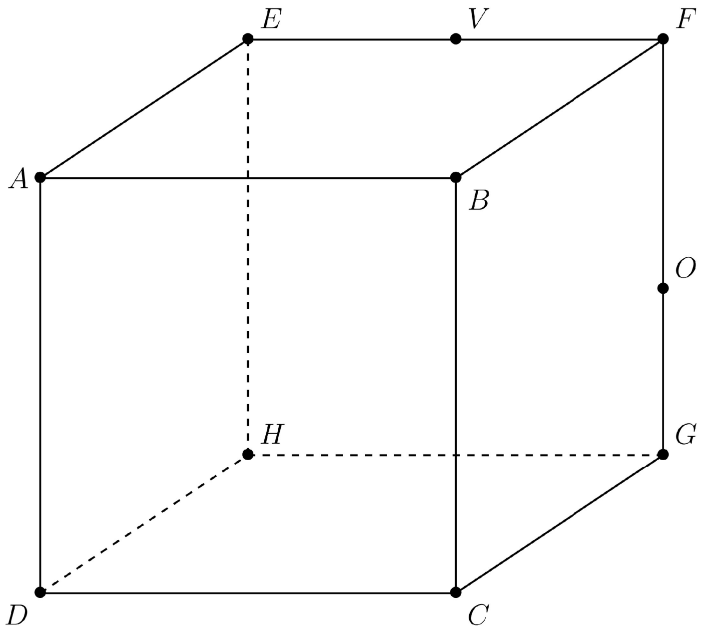
Exercice non préparé sur les limites de suites (fonctions rationnelles, sin(n) et cos(n), théorème des gendarmes, théorème de comparaison, q^n)

Exercice3(10pts)

Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous, on a placé les points O et V tels que :

$$\overrightarrow{FO} = \tfrac{3}{5}\overrightarrow{FG} \text{ et } \overrightarrow{EV} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{EF}$$

Nom et prénom: ____________________



On se placera dans le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$

(a) Montrer que $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} + \frac{2}{5}\overrightarrow{DA}$. (2 pts)
En déduire les coordonnées du point O dans le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$.

Solution:
On a d'après CHASLES:
$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GO}$
• Dans le cube ABCDEFGH on a $= \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$
• Pout le point O on a:
$\overrightarrow{FO} = \frac{3}{5}\overrightarrow{FG}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GO} = \frac{3}{5}\overrightarrow{FG}$ par CHASLES,
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GO} = \frac{3}{5}\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FG}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GO} = (\frac{3}{5} - 1)\overrightarrow{FG}$ en regroupant
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GO} = -(\frac{3}{5} - 1)\overrightarrow{GF}$ car $\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{GF}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GO} = \frac{2}{5}\overrightarrow{GF}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GO} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DA}$ car $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DA}$.
Finalement:
$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GO}$
$\boxed{\Leftrightarrow \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} + \frac{2}{5}\overrightarrow{DA}}$
Cette égalité constitue une décomposition du vecteur $\overrightarrow{DO}$ dans la base $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$.
On en déduit que dans le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$,

$\boxed{O(1;1,\frac{2}{5})}$

(b) Donner SANS JUSTIFICATION les coordonnées du point V et ceux du point L milieu du segment $[VF]$ (1 pts)

Solution:
On a: $V(\frac{1}{2};1;1)$ et $L(\frac{3}{4};1;1)$
JUSTIFICATION (non exigée):
• Pour le point V:
$\overrightarrow{DV}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EV}$
$=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ car $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{EV}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$
$=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ car $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DC}$
$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DA}$
d'où $V(\frac{1}{2};1;1)$.
• L est le milieu du segment $[VF]$ avec $V(\frac{1}{2};1;1)$ et $F(1;1;1)$ donc les coordonnées de L sont:
$x_L=\dfrac{x_V+x_F}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4}$
$y_L=\dfrac{y_V+y_F}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1$
$z_L=\dfrac{z_V+z_F}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1$

(c) Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (OV) est $\begin{cases} x=1-5t \\ y=1 \\ z=\frac{2}{5}+6t \end{cases}$. (2 pts)

Solution:
On reconnait les coordonnées du point $O(1;1;\frac{2}{5})$.
Un vecteur directeur de la droite (OV) est $\overrightarrow{OV}\begin{pmatrix} x_V-x_V \\ y_V-y_V \\ z_V-z_V \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.
Le vecteur $\overrightarrow{u}=10\ \overrightarrow{IJ}=\begin{pmatrix} 10\times\frac{-1}{2} \\ 10\times 0 \\ 10\times\frac{3}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un autre vecteur directeur de la droite (OV).
On en déduit qu'une représentation paramétrique de la droite (OV) est
$\begin{cases} x=x_I+u_xt \\ y=y_I+u_yt \\ z=z_I+u_zt \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=1-5t \\ y=1 \\ z=\frac{2}{5}+6t \end{cases}$.

(d) Montrer que le point $K(26;1;\frac{-148}{5})$ appartient à la droite (OV) (1 pts)

Solution:

$K \in (IJ) \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 1 - 5t \\ y_K = 1 \\ z_K = \frac{2}{5} + 6t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 26 = 1 - 5t \\ 1 = 1 \\ \frac{-148}{5} = \frac{2}{5} + 6t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ 1 = 1 \\ t = -5 \end{cases}$

Le système est donc compatible et pour $t = -5$ dans la représentation paramétrique, on atteint le point K: $K \in (IJ)$.

(e) Montrer que le point $P(-19; 1; \frac{32}{5})$ n'appartient pas à la droite (OV) (2 pts)

Solution:

$P \in (IJ) \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 1 - 5t \\ y_P = 1 \\ z_P = \frac{2}{5} + 6t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -19 = 1 - 5t \\ 1 = 1 \\ \frac{32}{5} = \frac{2}{5} + 6t \end{cases}$

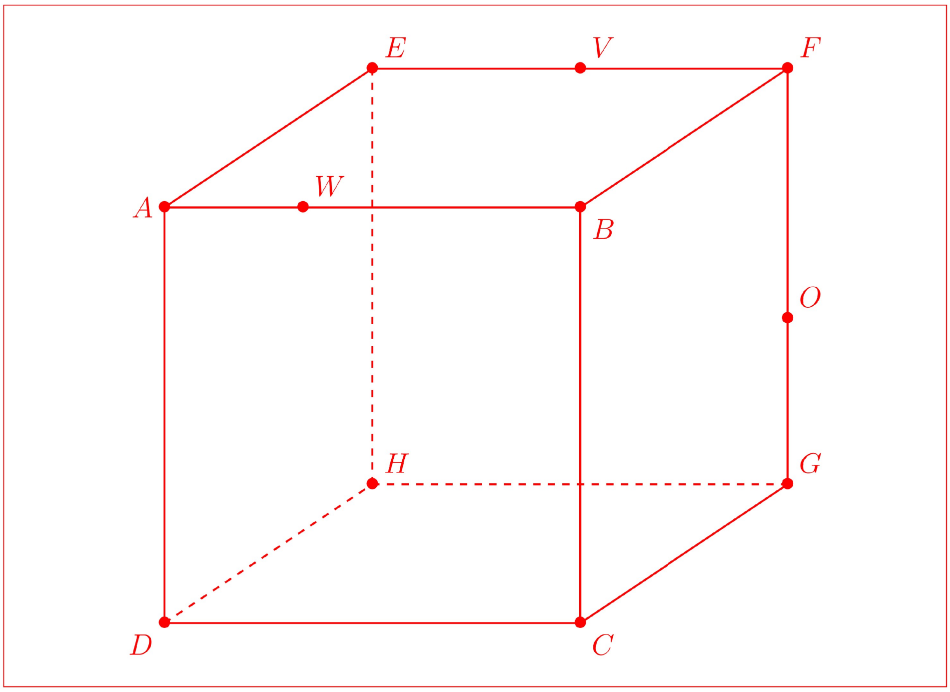
$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ 1 = 1 \\ t = 1 \end{cases}$

Le système est donc incompatible: $P \notin (IJ)$.

(f) Placer sur le dessin le point W tel que $\overrightarrow{HW} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ (2 pts)

Solution:

Nom et prénom: ____________________



Exercice4(10pts)

Exercice non préparé sur la géométrie dans l'espace.

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	10	10	10	10	40
Score:					

Fin du devoir.