

DS6 (11) de MATHEMATIQUES (TERM SPE)
2025

Nom et prénom: _____

Exercice1(10pts)

Sur une petite île de l'Océan Indien, une équipe de scientifiques étudie la population d'une bestiole nommée le " Magmar ".

Au début de l'étude il y avait 170 milliers de Magmars sur l'île. Chaque année le nombre de Magmars diminue de 5% et l'équipe en rajoute alors 17 milliers pour essayer de stabiliser la population de Magmar.

On note l'effectif de cette population en milliers après n années.

- (a) i. Donner la valeur de u_0 . (1/2 pts)

Solution:

D'après l'énoncé, au début de l'étude il y avait 170 Magmars. C'est la valeur de u_0 :

$$u_0 = 170$$

- ii. Déterminer le nombre de bestioles après 1 an. (1/2 pts)

Solution:

Au bout d'un an, le nombre de Magmars a diminué de 5%, il reste donc $170 \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 161.5$ milliers de Magmars.

On rajoute chaque année 17 Magmars ce qui donne finalement en milliers de Magmars:

$$u_1 = 161.5 + 17 = 178.5$$

- iii. Expliquer pourquoi pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 0.95u_n + 17$ (1 pts)

Solution:

En reprenant le raisonnement précédent, à l'année $(n + 1)$ le nombre de Magmars diminue de 5% par rapport à l'année (n) ,

il reste donc $u_n \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 0.95u_n$ milliers de Magmars.

On rajoute également 17 Magmars par rapport à l'année (n) , ce qui donne finalement

$$u_{n+1} = 0.95u_n + 17$$

- (b) i. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq 340$ (2 pts)

Solution:

Soit pour un entier naturel n , la proposition $\mathbb{P}_n: u_n \leq u_{n+1} \leq 340$.

Initialisation

$u_0 = 170$ et $u_1 = 178.5$.

On a bien $u_0 \leq u_1 \leq 340$.

Donc \mathbb{P}_0 est vraie.

Hérédité

Supposons \mathbb{P}_n vraie pour une valeur donnée de n .

\mathbb{P}_n vraie

$$\Leftrightarrow u_n \leq u_{n+1} \leq 340$$

$$\Leftrightarrow u_n \times 0.95 \leq u_{n+1} \times 0.95 \leq 340 \times 0.95$$

en multipliant chaque membre de l'inégalité par $0.95 > 0$

$$\Leftrightarrow u_n \times 0.95 + 17 \leq u_{n+1} \times 0.95 + 17 \leq 340 \times 0.95 + 17$$

en ajoutant 17 à chaque membre de l'inégalité

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 340$$

car d'une part $u_{n+1} = 0.95u_n + 17$ et $u_{n+2} = 0.95u_{n+1} + 17$ et d'autre part $340 \times 0.95 + 17 = 340$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}_{n+1} \text{ vraie.}$$

Conclusion

D'après le principe de récurrence, \mathbb{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ii. En déduire que la suite (u_n) est convergente. (1 pts)

Solution:

• D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

• Toujours d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 340$ donc la suite (u_n) est majorée par 340.

D'après le cours, la suite (u_n) étant **croissante et majorée** elle est convergente.

- (c) Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - 340$.
 i. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. (préciser sa raison et son premier terme). (2 pts)

Solution:

On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 340$, par définition de (v_n) d'où:

$$v_{n+1} = 0.95u_n + 17 - 340, \text{ par définition de } (u_n)$$

$$v_{n+1} = 0.95u_n - 323$$

$$v_{n+1} = 0.95 \left(u_n + \frac{-323}{0.95} \right), \text{ en factorisant par } 0.95$$

$$v_{n+1} = 0.95 (u_n - 340), \text{ puisque } \frac{-323}{0.95} = -340$$

$$v_{n+1} = 0.95v_n, \text{ par définition de } (v_n).$$

Donc v_n est bien une suite géométrique de raison 0.95 et de premier terme $v_0 = u_0 - 340 = 170 - 340 = -170$.

- ii. En déduire une expression explicite de v_n en fonction de n . (1 pts)

Solution:

D'après le cours une suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 et de raison q a pour expression explicite $v_n = v_0 \times q^n$.

$$\text{On a donc } v_n = -170 \times 0.95^n$$

- iii. En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n . (1 pts)

Solution:

$$v_n = u_n - 340$$

$$\Leftrightarrow -170 \times 0.95^n = u_n - 340, \text{ en utilisant la formule explicite de } v_n \text{ de la question précédente}$$

$$\Leftrightarrow u_n = -170 \times 0.95^n + 340$$

- iv. Calculer la limite de la suite (u_n) . Interpréter le résultat. (1 pts)

Solution:

D'après le cours,

$$\text{Si } -1 < q < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

$$\text{Si } q > 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} -170 \times 0.95^n + 340 = -170 \times 0 + 340 = 340.$$

Cela montre que par ce procédé (en rajoutant 17 Magmars chaque année) on parviendra à stabiliser la population autour de 340 individus.

Exercice2(10pts)

Calculer les limites de chacune des suites suivantes en JUSTIFIANT avec soin chaque réponse:

(a) $a_n = \frac{n+3}{n^2+n}$ (2 pts)

Solution:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \times \left(1 + \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1}$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{n^2+n} = '0 \times \frac{1}{1}' = 0$

(b) $b_n = n^3 + \sin(n)$ (2 pts)

Solution:

La suite $\sin(n)$ n'a pas de limite. On va utiliser les théorèmes d'encadrement.

On a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

d'où $n^3 - 1 \leq n^3 + \sin(n) \leq n^3 + 1$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 1 = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 + \sin(n) = +\infty$

(c) $c_n = 5 + \frac{\cos(n)}{n^3}$ (2 pts)

Solution:

La suite $\cos(n)$ n'a pas de limite. On va utiliser les théorèmes d'encadrement.

On a $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc $\frac{-1}{n^3} \leq \frac{\cos(n)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$

d'où $5 + \frac{-1}{n^3} \leq 5 + \frac{\cos(n)}{n^3} \leq 5 + \frac{1}{n^3}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + \frac{-1}{n^3} = 5 + \frac{1}{n^3} = 5$, on en déduit par le théorème des

gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + \frac{\cos(n)}{n^3} = 5$

(d) $d_n = 3^n \times n^3$ (2 pts)

Solution:

D'après le cours, si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$.

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$. (suite de référence)

On en déduit par opérations sur les limites que:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \times n^3 = '(+\infty) \times (+\infty)' = +\infty$.

(e) $e_n = 3^n - 7^n$ (2 pts)

Solution:

• Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

• Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7^n = +\infty$, donc on a une forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$.

On lève l'indétermination par factorisation:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n - 7^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} 7^n \times \left(\frac{3^n}{7^n} - 1 \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} 7^n \times \left[\left(\frac{3}{7} \right)^n - 1 \right]$$

$$= (+\infty) \times (0 - 1)$$

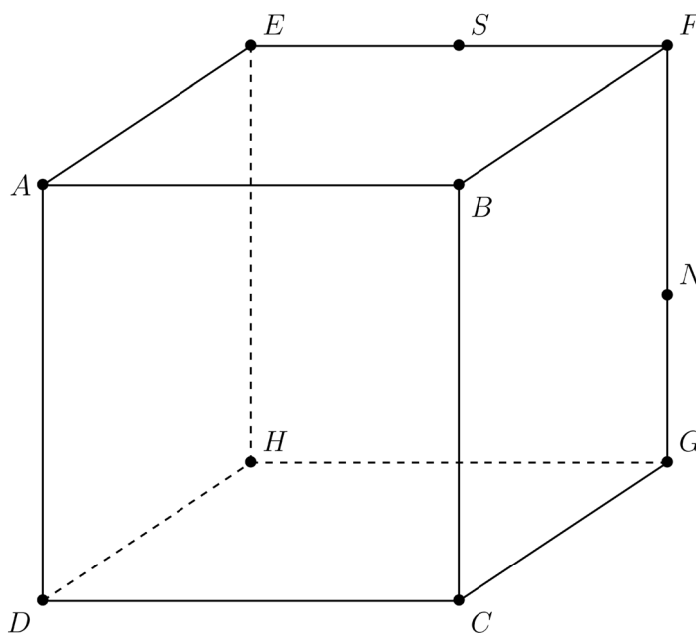
Car $0 < \frac{3}{7} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{7} \right)^n = 0$ et $7 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7^n = +\infty$

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n - 7^n = -\infty$

Exercice3(10pts)

Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous, on a placé les points N et S tels que :

$$\overrightarrow{FN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{FG} \text{ et } \overrightarrow{ES} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$$



On se placera dans le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$

- (a) Montrer que $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} + \frac{2}{5}\overrightarrow{DA}$. (2 pts)
 En déduire les coordonnées du point N dans le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$.

Solution:

On a d'après CHASLES:

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GN}$$

• Dans le cube ABCDEFGH on a $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$

• Pour le point N on a:

$$\overrightarrow{FN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{FG}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{FG} \text{ par CHASLES,}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FG}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} = (\frac{3}{5} - 1)\overrightarrow{FG} \text{ en regroupant}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} = -(\frac{3}{5} - 1)\overrightarrow{GF} \text{ car } \overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{GF}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{GF}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DA} \text{ car } \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DA}.$$

Finalement:

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GN}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} + \frac{2}{5}\overrightarrow{DA}$$

Cette égalité constitue une décomposition du vecteur \overrightarrow{DN} dans la base $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$.

On en déduit que dans le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$,

$$N(1; 1, \frac{2}{5})$$

- (b) Donner SANS JUSTIFICATION les coordonnées du point S et ceux du point L milieu du segment $[SF]$ (1 pts)

Solution:

On a: $S(\frac{1}{2}; 1; 1)$ et $L(\frac{3}{4}; 1; 1)$

JUSTIFICATION (non exigée):

• Pour le point S:

$$\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{ES}$$

$$= \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} \text{ car } \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{DA} \text{ et } \overrightarrow{ES} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$$

$$= \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \text{ car } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DA}$$

d'où $S(\frac{1}{2}; 1; 1)$.

• L est le milieu du segment $[SF]$ avec $S(\frac{1}{2}; 1; 1)$ et $F(1; 1; 1)$ donc les coordonnées de L sont:

$$x_L = \frac{x_S + x_F}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$y_L = \frac{y_S + y_F}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

$$z_L = \frac{z_S + z_F}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

- (c) Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (NS) est $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 1 \\ z = \frac{2}{5} + 6t \end{cases}$. (2 pts)

Solution:
 On reconnaît les coordonnées du point $N(1; 1; \frac{2}{5})$.
 Un vecteur directeur de la droite (NS) est $\overrightarrow{NS} = \begin{pmatrix} x_S - x_N \\ y_S - y_N \\ z_S - z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.
 Le vecteur $\vec{u} = 10 \overrightarrow{NS} = \begin{pmatrix} 10 \times -1 \\ 10 \times 0 \\ 10 \times \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un autre vecteur directeur de la droite (NS) .
 On en déduit qu'une représentation paramétrique de la droite (NS) est $\begin{cases} x = x_I + u_x t \\ y = y_I + u_y t \\ z = z_I + u_z t \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 1 \\ z = \frac{2}{5} + 6t \end{cases}$.

- (d) Montrer que le point $K(-24; 1; \frac{152}{5})$ appartient à la droite (NS) . (1 pts)

Solution:
 $K \in (NS) \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 1 - 5t \\ y_K = 1 \\ z_K = \frac{2}{5} + 6t \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} -24 = 1 - 5t \\ 1 = 1 \\ \frac{152}{5} = \frac{2}{5} + 6t \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ 1 = 1 \\ t = 5 \end{cases}$
 Le système est donc compatible et pour $t = 5$ dans la représentation paramétrique, on atteint le point $K: K \in (NS)$.

- (e) Montrer que le point $P(6; 1; \frac{62}{5})$ n'appartient pas à la droite (NS) . (2 pts)

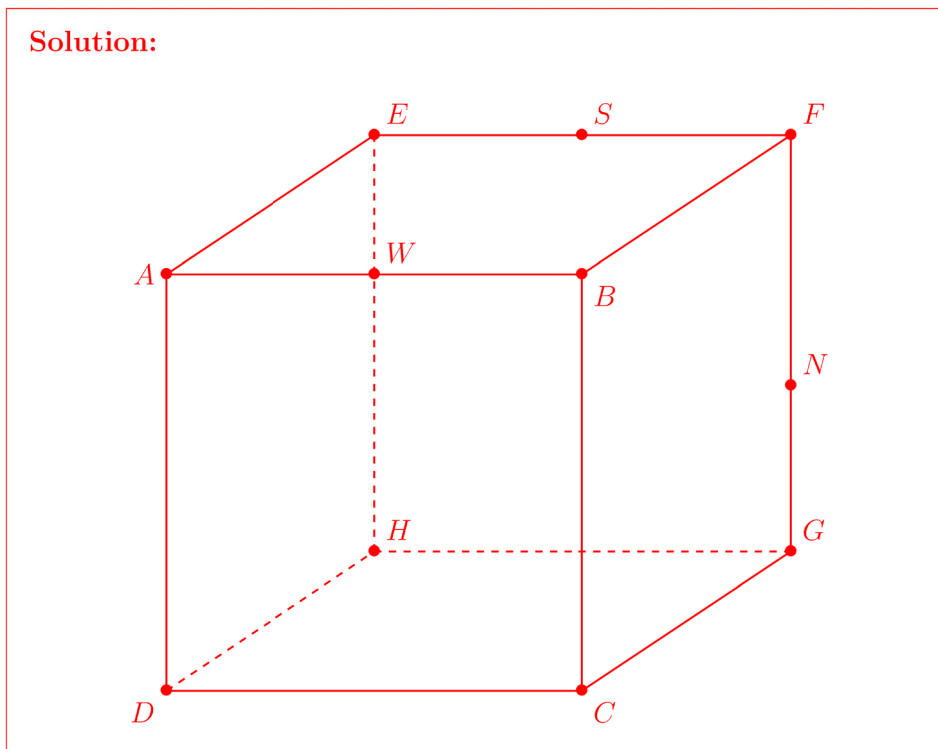
Solution:
 $P \in (NS) \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 1 - 5t \\ y_P = 1 \\ z_P = \frac{2}{5} + 6t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 1 - 5t \\ 1 = 1 \\ \frac{62}{5} = \frac{2}{5} + 6t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ 1 = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Le système est donc incompatible: $P \notin (IJ)$.

(f) Placer sur le dessin le point W tel que $\overrightarrow{HW} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ (2 pts)



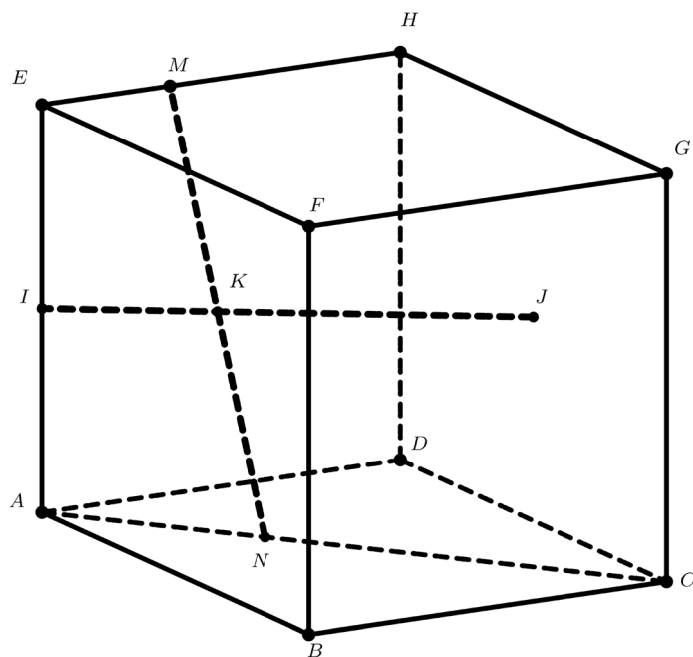
Exercice4(10pts)

Dans un cube ABCDEFGH on a placé le milieu I du segment $[AE]$ et le centre J de la face CDHG.

On a construit les points M et N tels que (dessin à main levée):

$$\overrightarrow{EM} = \frac{5}{9}\overrightarrow{EH} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$$

On construit enfin le point K milieu du segment $[MN]$



On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

- (a) Après avoir déterminé les coordonnées de I et J, donner une représentation paramétrique de la droite (IJ). (2 pts)

Solution: $I(0; 0; \frac{1}{2})$ et $J(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2})$ d'où $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(IJ) est la droite passant par I et de vecteur directeur \overrightarrow{IJ} donc une représentation paramétrique de (IJ) est :

$$(IJ) : \begin{cases} x = 0 + \frac{1}{2}t_0 \\ y = 0 + t_0 \\ z = \frac{1}{2} + 0t_0 \end{cases} \Leftrightarrow (IJ) : \begin{cases} x = \frac{1}{2}t_0 \\ y = t_0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- (b) Déterminer les coordonnées de M et N et en déduire les coordonnées de K. (4 pts)

Solution:

• $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AE} + \frac{5}{9}\overrightarrow{EH}$ En utilisant CHASLES puis la définition de M.

Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AD}$ car $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$.

On en déduit que $M(0; \frac{5}{9}; 1)$

• $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AC} = \frac{5}{9}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$ en utilisant la définition de N puis CHASLES.

Nom et prénom: _____

Donc $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AC} = \frac{5}{9}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = \frac{5}{9}\overrightarrow{AD} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AB}$ d'où $N\left(\frac{5}{9}; \frac{5}{9}; 0\right)$

• K étant le milieu du segment $[MN]$, $K\left(\frac{\frac{5}{9} + 0}{2}; \frac{\frac{5}{9} + \frac{5}{9}}{2}; \frac{0 + 1}{2}\right)$ soit $K\left(\frac{5}{18}; \frac{5}{9}; \frac{1}{2}\right)$

(c) Montrer que I, J et K sont alignés.

(4 pts)

Solution: Cela revient à montrer qu'il existe une valeur t_0 de la représentation paramétrique de la droite (IJ) qui fournisse les coordonnées du point K.

$$\begin{cases} \frac{5}{18} = \frac{1}{2}t_0 \\ \frac{5}{9} = t_0 \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = \frac{5}{18} \\ t_0 = \frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow t_0 = \frac{5}{9}$$

Pour $t_0 = \frac{5}{9}$ on atteint le point K qui appartient donc à la droite (IJ).

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	10	10	10	10	40
Score:					

Fin du devoir.