DS6 (10) de MATHEMATIQUES (TERM SPE)
2025

Nom et prénom: ____

Exercice1(10pts)

Sur une petite île de l'Océan Indien, une équipe de scientifiques étudie la population d'une bestiole nommée le " Magmar ".
Au début de l'étude il y avait 150 milliers de Magmars sur l'île. Chaque année le nombre de Magmars diminue de 30% et l'équipe en rajoute alors 105 milliers pour essayer de stabiliser la population de Magmar.
On note l'effectif de cette population en milliers après n années.

(a) i. Donner la valeur de u_0. (½ pts)

> **Solution:**
> D'après l'énoncé, au début de l'étude il y avait 150 Magmars. C'est la valeur de u_0:
> $$u_0 = 150$$

ii. Déterminer le nombre de bestioles après 1 an. (½ pts)

> **Solution:**
> Au bout d'un an, le nombre de Magmars a diminué de 30%, il reste donc $150 \times \left(1 - \dfrac{30}{100}\right) = 105$ milliers de Magmars.
> On rajoute chaque année 105 Magmars ce qui donne finalement en milliers de Magmars:
> $$u_1 = 105 + 105 = 210$$

iii. Expliquer pourquoi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 0.7u_n + 105$ (1 pts)

> **Solution:**
> En reprenant le raisonnement précédent, à l'anné $(n+1)$ le nombre de Magmars diminue de 30% par rapport à l'année (n),
> il reste donc $u_n \times \left(1 - \dfrac{30}{100}\right) = 0.7u_n$ milliers de Magmars.
> On rajoute également 105 Magmars par rapport à l'année (n), ce qui donne finalement
> $$u_{n+1} = 0.7u_n + 105$$

(b) i. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 350$ (2 pts)

> **Solution:**
> Soit pour un entier naturel n, la proposition $\mathbb{P}_n$: $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 350$.

Initialisation
$u_0 = 150$ et $u_1 = 210$.
On a bien $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 350$.
Donc $\mathbb{P}_0$ est vraie.

Hérédité
Supposons $\mathbb{P}_n$ vraie pour une valeur donnée de n.

$\mathbb{P}_n$ vraie
$\Leftrightarrow u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 350$

$\Leftrightarrow u_n \times 0.7 \leqslant u_{n+1} \times 0.7 \leqslant 350 \times 0.7$
en multipliant chaque membre de l'inégalité par $0.7 > 0$

$\Leftrightarrow u_n \times 0.7 + 105 \leqslant u_{n+1} \times 0.7 + 105 \leqslant 350 \times 0.7 + 105$
en ajoutant 105 à chaque membre de l'inégalité

$\Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 350$
car d'une part $u_{n+1} = 0.7u_n + 105$ et $u_{n+2} = 0.7u_{n+1} + 105$ et d'autre part $350 \times 0.7 + 105 = 350$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}_{n+1}$ vraie.

Conclusion
D'après le principe de récurrence, $\mathbb{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii. En déduire que la suite (u_n) est convergente. (1 pts)

Solution:
• D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
• Toujours d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant 350$ donc la suite (u_n) est majorée par 350.
D'après le cours, la suite (u_n) étant **croissante et majorée** elle est convergente.

(c) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 350$.

i. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. (préciser sa raison et son premier terme). (2 pts)

Solution:
On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 350$, par définition de (v_n) d'où:

$v_{n+1} = 0.7u_n + 105 - 350$, par définition de (u_n)

$v_{n+1} = 0.7u_n - 245$

$v_{n+1} = 0.7\left(u_n + \dfrac{-245}{0.7}\right)$, en factorisant par 0.7

$v_{n+1} = 0.7\,(u_n - 350)$, puisque $\dfrac{-245}{0.7} = -350$

$v_{n+1} = 0.7v_n$, par définition de (v_n).

Donc v_n est bien une suite géométrique de raison 0.7 et de premier terme $v_0 = u_0 - 350 = 150 - 350 = -200$.

ii. En déduire une expression explicite de v_n en fonction de n. (1 pts)

Solution:
D'après le cours une suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 et de raison q a pour expression explicite $v_n = v_0 \times q^n$.
On a donc $v_n = -200 \times 0.7^n$

iii. En déduire une expression explicite de v_n en fonction de n. (1 pts)

Solution:
$v_n = u_n - 350$

$\Leftrightarrow\ -200 \times 0.7^n = u_n - 350$, en utilisant la formule explicite de v_n de la question précédente

$\Leftrightarrow u_n = -200 \times 0.7^n + 350$

iv. Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter le résultat. (1 pts)

Solution:
D'après le cours,
Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} -200 \times 0.7^n + 350 = " - 200 \times 0 + 350 = 350"$.
Celà montre que par ce procédé (en rajoutant 105 Magmars chaque année) on parviendra à stabiliser la population autour de 350 individus.

Exercice2(10pts)

Calculer les limites de chacune des suites suivantes en JUSTIFIANT avec soin chaque réponse:

(a) $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+2}$ (2 pts)

Nom et prénom: ____________________

Solution:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n \times \left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+2\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1+\frac{1}{n}}{1+2\frac{1}{n^2}}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2+2} = '0 \times \frac{1}{1}' = 0$

(b) $b_n = n^5 + \cos(n)$ (2 pts)

Solution:
La suite $\cos(n)$ n'a pas de limite. On va utiliser les théorèmes d'encadrement.
On a $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$
d'où $n^5 - 1 \leqslant n^5 + \cos(n) \leqslant n^5 + 1$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} n^5 - 1 = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} n^5 + \cos(n) = +\infty$

(c) $c_n = -5 + \frac{\cos(n)}{n^2}$ (2 pts)

Solution:
La suite $\cos(n)$ n'a pas de limite. On va utiliser les théorèmes d'encadrement.
On a $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ donc $\frac{-1}{n^2} \leqslant \frac{\cos(n)}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$
d'où $-5 + \frac{-1}{n^2} \leqslant -5 + \frac{\cos(n)}{n^2} \leqslant -5 + \frac{1}{n^2}$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} -5 + \frac{-1}{n^2} = -5 + \frac{1}{n^2} = -5$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} -5 + \frac{\cos(n)}{n^2} = -5$

(d) $d_n = 5^n \times n^3$ (2 pts)

Solution:
D'après le cours, si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
Donc $\lim_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$.
De plus $\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$. (suite de référence)
On en déduit par opérations sur les limites que:
$\lim_{n\to+\infty} 5^n \times n^3 =' (+\infty) \times (+\infty)' = +\infty$.

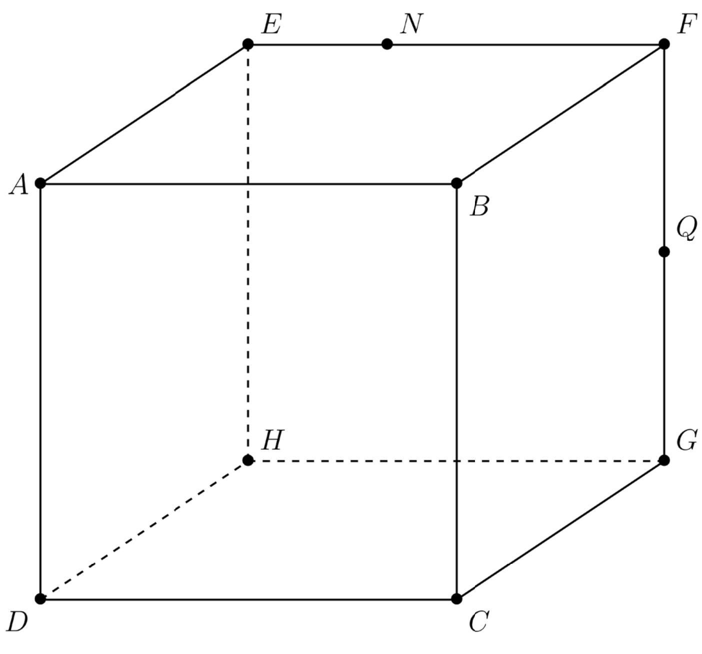
(e) $e_n = 6^n - 9^n$ (2 pts)

Solution:
• Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
• Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 6^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 9^n = +\infty$, donc on a une forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$.
On lève l'indétermination par factorisation:
$\lim\limits_{n\to+\infty} 6^n - 9^n$
$= \lim_{n\to+\infty} 9^n \times \left(\dfrac{6^n}{9^n} - 1\right)$
$= \lim_{n\to+\infty} 9^n \times \left[\left(\dfrac{6}{9}\right)^n - 1\right]$
$= (+\infty) \times (0 - 1)$
Car $0 < \dfrac{6}{9} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{6}{9}\right)^n = 0$ et $9 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 9^n = +\infty$
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} 6^n - 9^n = -\infty$

Exercice3(10pts)

Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous, on a placé les points Q et N tels que :

$$\overrightarrow{FQ} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{FG} \text{ et } \overrightarrow{EN} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{EF}$$



On se placera dans le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$

(a) Montrer que $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$. (2 pts)
En déduire les coordonnées du point Q dans le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$.

Solution:
On a d'après CHASLES:
$\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GQ}$
• Dans le cube ABCDEFGH on a $= \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$
• Pout le point Q on a:
$\overrightarrow{FQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$ par CHASLES,
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FG}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GQ} = (\frac{1}{2} - 1)\overrightarrow{FG}$ en regroupant
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GQ} = -(\frac{1}{2} - 1)\overrightarrow{GF}$ car $\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{GF}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ car $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DA}$.
Finalement:
$\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GQ}$
$\boxed{\Leftrightarrow \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}}$
Cette égalité constitue une décomposition du vecteur $\overrightarrow{DQ}$ dans la base $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$.
On en déduit que dans le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$,
$\boxed{Q(1; 1, \frac{1}{2})}$

(b) Donner SANS JUSTIFICATION les coordonnées du point N et ceux du point L milieu du segment $[NF]$ (1 pts)

Solution:
On a: $N(\frac{1}{3}; 1; 1)$ et $L(\frac{2}{3}; 1; 1)$
JUSTIFICATION (non exigée):
• Pour le point N:
$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EN}$
$= \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ car $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{EN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$
$= \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ car $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$
$= \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DA}$
d'où $N(\frac{1}{3}; 1; 1)$.
• L est le milieu du segment $[NF]$ avec $N(\frac{1}{3}; 1; 1)$ et $F(1; 1; 1)$ donc les coordonnées de L sont:
$x_L = \dfrac{x_N + x_F}{2} = \dfrac{\frac{1}{3} + 1}{2} = \frac{2}{3}$
$y_L = \dfrac{y_N + y_F}{2} = \dfrac{1 + 1}{2} = 1$

$$z_L = \frac{z_N + z_F}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

(c) Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (QN) (2 pts)
est $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} + 3t \end{cases}$.

Solution:
On reconnait les coordonnées du point $Q(1; 1; \frac{1}{2})$.
Un vecteur directeur de la droite (QN) est $\overrightarrow{QN} \begin{pmatrix} x_N - x_N \\ y_N - y_N \\ z_N - z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Le vecteur $\overrightarrow{u} = 6\ \overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 6 \times \frac{-2}{3} \\ 6 \times 0 \\ 6 \times \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un autre vecteur directeur de la droite (QN).
On en déduit qu'une représentation paramétrique de la droite (QN) est
$\begin{cases} x = x_I + u_x t \\ y = y_I + u_y t \\ z = z_I + u_z t \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} + 3t \end{cases}$.

(d) Montrer que le point $K(-19; 1; \frac{31}{2})$ appartient à la droite (QN) (1 pts)

Solution:
$K \in (IJ) \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 1 - 4t \\ y_K = 1 \\ z_K = \frac{1}{2} + 3t \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} -19 = 1 - 4t \\ 1 = 1 \\ \frac{31}{2} = \frac{1}{2} + 3t \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ 1 = 1 \\ t = 5 \end{cases}$
Le système est donc compatible et pour $t = 5$ dans la représentation paramétrique, on atteint le point K: $K \in (IJ)$.

(e) Montrer que le point $P(-11; 1; \frac{13}{2})$ n'appartient pas à la droite (QN) (2 pts)

Solution:
$P \in (IJ) \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 1 - 4t \\ y_P = 1 \\ z_P = \frac{1}{2} + 3t \end{cases}$

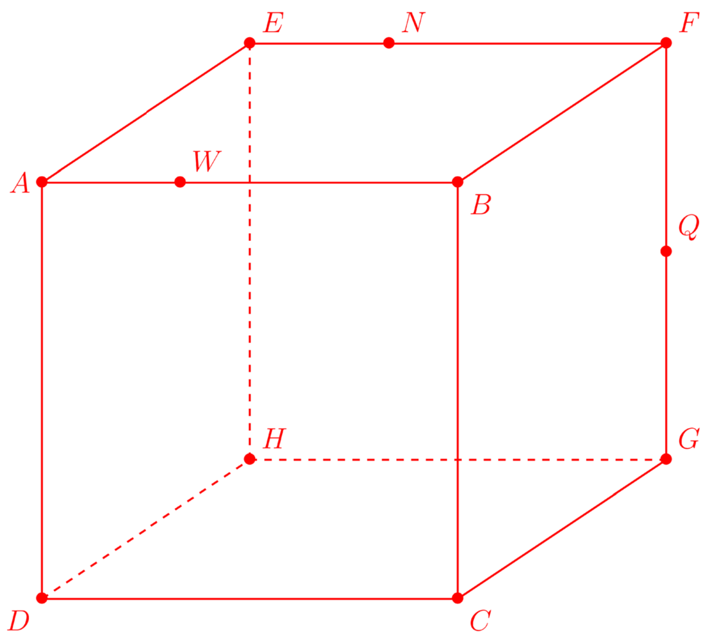
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -11 = 1 - 4t \\ 1 = 1 \\ \frac{13}{2} = \frac{1}{2} + 3t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ 1 = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Le système est donc incompatible: $P \notin (IJ)$.

(f) Placer sur le dessin le point W tel que $\overrightarrow{HW} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ (2 pts)

Solution:



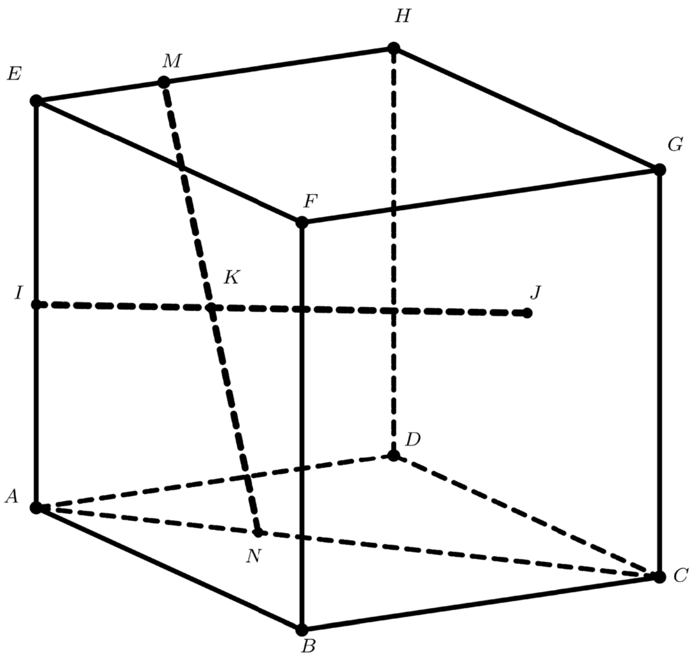
Exercice4(10pts)

Dans un cube ABCDEFGH on a placé le milieu I du segment $[AE]$ et le centre J de la face CDHG.

On a construit les points M et N tels que (dessin à main levée):

$$\overrightarrow{EM} = \frac{23}{45}\overrightarrow{EH} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{23}{45}\overrightarrow{AC}$$

On construit enfin le point K milieu du segment $[MN]$



On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

(a) Après avoir déterminé les coordonnées de I et J, donner une représentation paramétrique de la droite (IJ). (2 pts)

Solution: $I\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$ d'où $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$.

(IJ) est la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}$ donc une représentation paramétrique de (IJ) est :

$(IJ) : \begin{cases} x = 0 + \frac{1}{2}t_0 \\ y = 0 + t_0 \\ z = \frac{1}{2} + 0t_0 \end{cases} \Leftrightarrow (IJ) : \begin{cases} x = \frac{1}{2}t_0 \\ y = t_0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

(b) Déterminer les coordonnées de M et N et en déduire les coordonnées de K. (4 pts)

Solution:
• $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AE} + \frac{23}{45}\overrightarrow{EH}$ En utilisant CHASLES puis la définition de M.
Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \frac{23}{45}\overrightarrow{AD}$ car $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$.
On en déduit que $M\left(0; \frac{23}{45}; 1\right)$

• $\overrightarrow{AN} = \frac{23}{45}\overrightarrow{AC} = \frac{23}{45}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right)$ en utilisant la définition de N puis CHASLES.

Donc $\overrightarrow{AN} = \frac{23}{45}\overrightarrow{AC} = \frac{23}{45}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{23}{45}\overrightarrow{AD} + \frac{23}{45}\overrightarrow{AB}$ d'où $N\left(\frac{23}{45}; \frac{23}{45}; 0\right)$

• K étant le milieu du segment $[MN]$, $K\left(\dfrac{\frac{23}{45}+0}{2}; \dfrac{\frac{23}{45}+\frac{23}{45}}{2}; \dfrac{0+1}{2}\right)$ soit $K\left(\frac{23}{90}; \frac{23}{45}; \frac{1}{2}\right)$

(c) Montrer que I,J et K sont alignés. (4 pts)

Solution: Celà revient à montrer qu'il existe une valeur t_0 de la représentation paramétrique de la droite (IJ) qui fournisse les coordonnées du point K.

$\begin{cases} \frac{23}{90} = \frac{1}{2}t_0 \\ \frac{23}{45} = t_0 \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = \frac{\frac{23}{90}}{\frac{1}{2}} \\ t_0 = \frac{23}{45} \end{cases} \Leftrightarrow t_0 = \frac{23}{45}$

Pour $t_0 = \frac{23}{45}$ on atteint le point K qui appartient donc à la droite (IJ).

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	10	10	10	10	40
Score:					

Fin du devoir.