EVALUATION DS 2 (2) de MATHEMATIQUES (1 heure)
TERM SPE2025

La calculatrice est AUTORISEE

Nom et prénom: ____________________

Exercice1(2pts)

Revoir les suites arithmétiques.

Exercice2(16pts)

On s'intéresse à l'évolution du nombre d'abonnés d'un nouveau réseau social dont l'abonnement est payant annuellement.
À la fin 2020, le réseau compte exactement 600 personnes abonnées.
L'administrateur de la plateforme prévoit chaque année que 40% des anciens abonnés ne se réabonnent pas, et que 3600 nouvelles personnes s'abonnent.
On note u_n le nombre d'abonnés sur la plateforme en $2020 + n$.

(a) Combien y aura-t-il d'abonnés en 2021 ? (2 pts)

Solution:

Suivant ce modèle,
en 2021 on aura $600 \times (1 - \frac{40}{100}) + 3600 = 3960$ abonnés.

(b) Donner la valeur de u_0 et u_1. (2 pts)

Solution:
u_0 est le nombre d'abonnés en 2020: $u_0 = 600$
u_1 est le nombre d'abonnés en 2021: $u_1 = 3960$.

(c) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0.6u_n + 3600$. (2 pts)

Solution:
u_n est le nombre d'abonnés en $2020 + n$.
u_{n+1} est le nombre d'abonnés en $2020 + (n + 1)$.
Baisser de 40% revient à multiplier par $1 - \frac{40}{100} = 0.6$.
Donc le nombre d'abonnés baisse à $0.6u_n$.
De plus Il y a 3600 nouveaux abonnés ce qui revient à y ajouter 3600.
Finalement $u_{n+1} = 0.6u_n + 3600$.

(d) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 9000$. (2 pts)
Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Solution:
Pour montrer qu'une suite (v_n) est une suite géométrique il suffit de montrer que quelque soit n, il existe un nombre q (la raison) telle que $v_{n+1} = q \times v_n$.
Ici on a $v_n = u_n - 9000$.
D'où:
$v_{n+1} = u_{n+1} - 9000$ en utilisant la définition de $v_n = u_n - 9000$ et en remplaçant n par $n+1$
$v_{n+1} = 0.6u_n + 3600 - 9000$ en utilisant la définition de $u_{n+1} = 0.6u_n + 3600$
$v_{n+1} = 0.6u_n - 5400$
$v_{n+1} = 0.6\left(u_n - \dfrac{5400}{0.6}\right)$ en factorisant par 0.6
$v_{n+1} = 0.6\left(u_n - 9000\right)$
$v_{n+1} = 0.6v_n$
Donc v_n est bien une suite géométrique de raison 0.6.

(e) Déterminer la valeur de v_0. (2 pts)

Solution:
On utilise la définition de (v_n): $v_n = u_n - 9000$.
Le premier terme de la suite v_n est donc $v_0 = u_0 - 9000 = -8400$

(f) En déduire l'expression de v_n en fonction de n. (2 pts)

Solution:
D'après le cours si v_n est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0, alors on a l'expression explicite:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

D'où $v_n = -8400 \times 0.6^n$.

(g) En déduire l'expression de u_n en fonction de n. (2 pts)

Solution:
On a alors:
$v_n = u_n - 9000$
$\Leftrightarrow u_n = v_n + 9000$
$\Leftrightarrow u_n = -8400 \times 0.6^n + 9000$

(h) Combien d'abonnés l'administrateur prévoit-il en 2044 avec ce modèle? (2 pts)

Solution:
Entre 2020 et 2044, il s'agit de calculer u_{24}:

$u_{24} = -8400 \times 0.6^{24} + 9000$
$u_{24} \approx 9000$

Exercice3(8pts)

Le 1^{er} janvier 2020, On souhaite déposer 4 700 euros sur un compte en banque. On nous offre le choix entre deux propositions que l'on souhaite comparer.

(a) **Première proposition**

On propose un compte épargne avec des intérêts à taux fixe. Chaque année, le 31 décembre, la banque lui verserait 303 euros sur son compte épargne. On note u_n la somme sur le compte le 1^{er} janvier $2020 + n$.

i. Déterminer la valeur de u_0 et u_1. (1 pts)

Solution:
$u_0 = 4700$
$u_1 = u_0 + 303 = 4700 + 303 = 5003$

ii. Déterminer la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n en justifiant. (1 pts)

Solution:
(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4700$ et de raison $r = 303$.
D'après le cours $u_n = u_0 + n \times r$,
soit $u_n = 4700 + n \times 303$.

iii. Combien aurait-on sur son compte en banque en 2026 ? (1 pts)

Solution:
L'année $2026 = 2020 + 6$ on aura sur le compte:
$u_6 = 4700 + 6 \times 303 = 6\,518$ euros.

(b) **Deuxième proposition**

On lui propose un compte épargne avec des intérêts à taux composés.
Chaque année, le 31 décembre, la banque lui verserait sur son compte épargne 5% de la somme disponible sur le compte.
On note v_n la somme sur le compte le 1^{er} janvier $2020 + n$.

i. Déterminer la valeur de v_0 et v_1. (1 pts)

Solution:
$v_0 = 4700$.
$v_1 = 4700 \times (1 + \frac{5}{100}) = 4935$

ii. Déterminer la nature de la suite (v_n) puis exprimer v_n en fonction de n en justifiant. (1 pts)

Solution:
(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 4700$ et de raison $q = 1 + \frac{5}{100} = 1.05$
D'après le cours la formule explicite est $v_n = v_0 \times q^n$,
d'où $v_n = 4700 \times 1.05^n$

iii. Combien aurait-t-il sur son compte en banque en 2026 (arrondi en euros)? (1 pts)

Solution:
En $2026 = 2020 + 6$ on a:
$v_6 = 4700 \times 1.05^6 \approx 6298$

(c) À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'années il est plus intéressant de choisir l'offre avec des intérêts à taux composés ? (2 pts)

Solution:
Avec une table de valeurs des deux suites (u_n) et (v_n) on lit:
$u_1 \approx 5003$ et $v_1 \approx 4935$
$u_2 \approx 5306$ et $v_2 \approx 5182$
$u_3 \approx 5609$ et $v_3 \approx 5441$
$u_4 \approx 5912$ et $v_4 \approx 5713$
$u_5 \approx 6215$ et $v_5 \approx 5999$
$u_6 \approx 6518$ et $v_6 \approx 6298$
$u_7 \approx 6821$ et $v_7 \approx 6613$
$u_8 \approx 7124$ et $v_8 \approx 6944$
$u_9 \approx 7427$ et $v_9 \approx 7291$
$u_{10} \approx 7730$ et $v_{10} \approx 7656$
v dépasse u: $u_{11} \approx 8033$ et $v_{11} \approx 8039$
Il est donc plus intéressant de choisir l'offre avec des intérêts à taux composés
à partir de $2020 + 11$ soit 2031.

Question:	1	2	3	Total
Points:	2	16	8	26
Score:				

Fin du devoir.