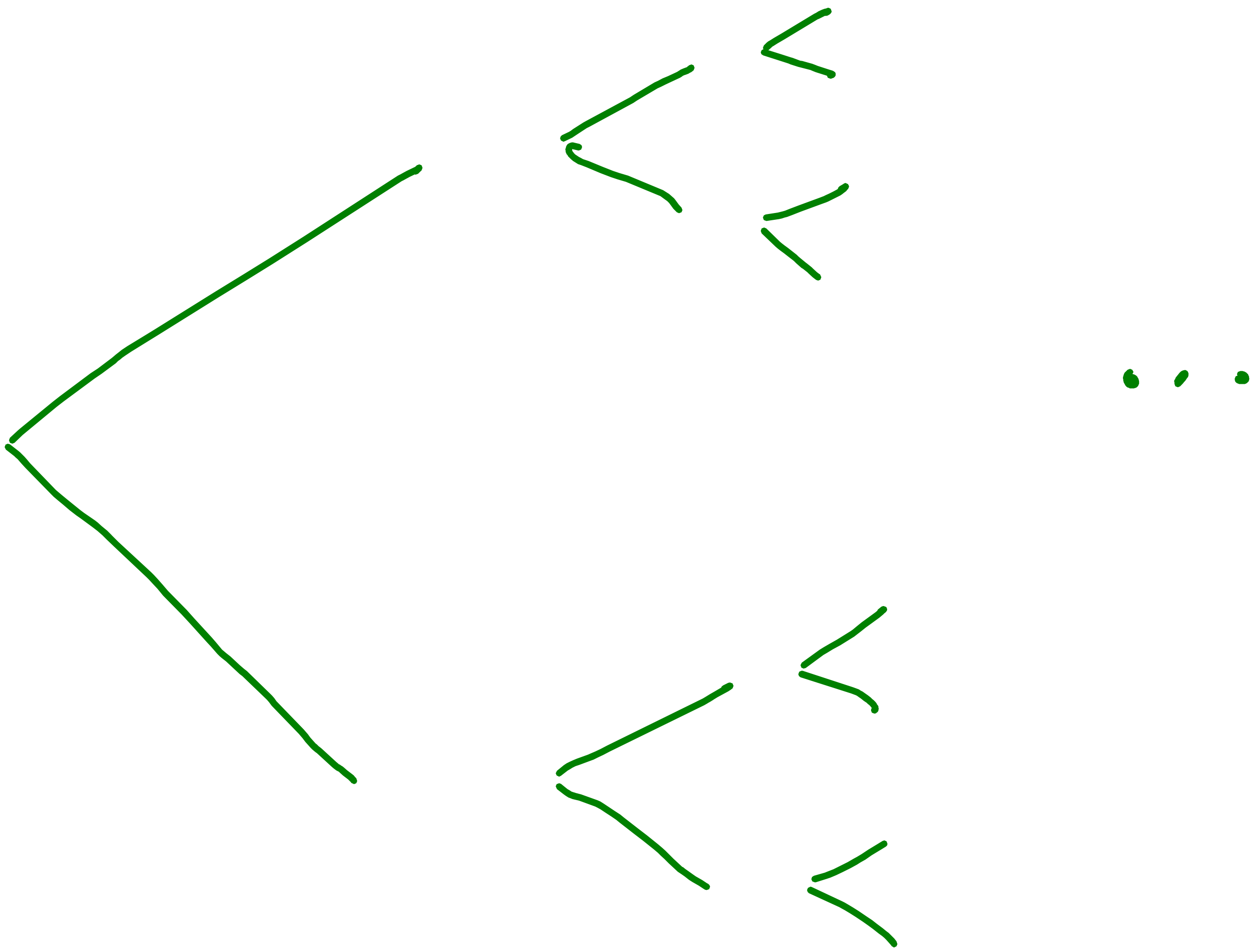
CHAPITRE 4

LOI BINOMIALE



1 Succession d'épreuves indépendantes

$P_A(B) = P(B)$ (indépendance)

$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P_A(B)$

$P(A \cap B) = P(A)\,P_A(B)$

Définition Univers associé à une succession d'épreuves indépendantes

Soit une succession de n épreuves indépendantes dont les univers associés sont respectivement $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$.

L'univers associé à cette succession de n épreuves est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$.

Exemple 1 : Pile / Face

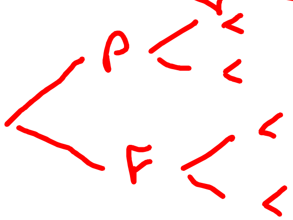
$\;\; A \;\;\;\;\; \bar{A}$

$n = 3$ $\quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \{P ; F\}$

3 lancers $\quad = \{A ; \bar{A}\}$

$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ indépendant si et seulement si} \\ P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\ P_A(B) = P(B) \; ; \; P_B(A) = P(A) \end{array}}$

$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 = \{ (F,F,F), (F,P,F) \ldots \}$



8 possibilités

Exemple 1 : Pile / Face

Pile : A ; Face : $\bar{A}$

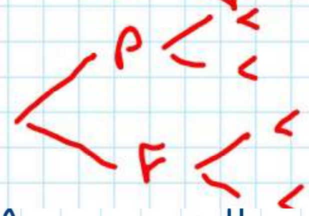
$n = 3$ $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \{P ; F\}$

3 lancers

$= \{A ; \bar{A}\}$

$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 = \{ (F,F,F), (F,P,F) \dots \}$

Produit cartésien.



8 possibilités

A et B indépendant si et seulement si
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
$P_A(B) = P(B)$; $P_B(A) = P(A)$

Exemple 2 : On jette une pièce (pile ou face) puis on jette un dé (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6)

$\Omega_1 = \{P, F\}$ $\Omega_2 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{ (P ; 1) ; (P ; 2) ; \dots ; (P ; 6) ;$
$(F ; 1) ; \dots \quad (F ; 6) \}$

1 Succession d'épreuves indépendantes

$P_A(B) = P(B)$

$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Définition Univers associé à une succession d'épreuves indépendantes

Soit une succession de *n* épreuves indépendantes dont les univers associés sont respectivement $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$.

L'univers associé à cette succession de *n* épreuves est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$.

Exemple 2 : On jette une pièce (pile ou face) puis on jette un dé (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6)

$\Omega_1 = \{P, F\}$ $\Omega_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(P;1); (P;2); \ldots; (P;6);$
$(F;1); \ldots (F;6)\}$

2 Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

Définition Épreuve de Bernoulli

Une expérience aléatoire à deux issues, succès (noté S) et échec (noté $\overline{S}$ ou E), est dite épreuve (ou expérience) de Bernoulli.

Définition Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0\,;1[$. La loi de la variable aléatoire X donnée ci-contre est appelée loi de Bernoulli de paramètre p, ce qui se note $\mathscr{B}(p)$.

$\mathcal{B}(p)$

	Echec	Succès
x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1 - p$	p

Définition Schéma de Bernoulli

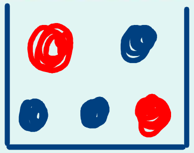
La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est appelée schéma de Bernoulli.

Propriété Loi de Bernoulli : espérance, variance et écart-type

Pour X, variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(p)$, on a :

- l'espérance : $E(X) = p$, (moyenne)
- la variance : $V(X) = p(1-p)$,
- l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

} Mesure de la dispersion.



1 = Bleue

0 = Rouge

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

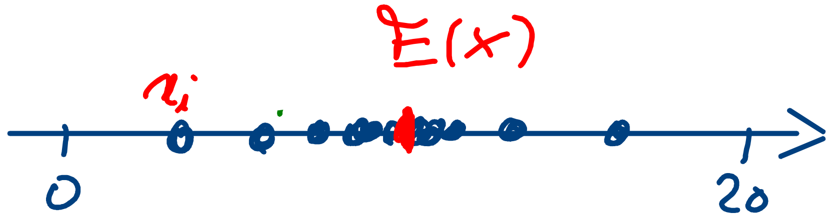
$P(X = x_i)$

Rappel :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Loi de probabilité

Centrale $\quad E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times p_k$



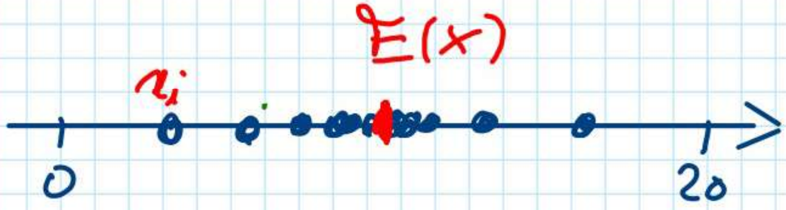
dispersion $\quad V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 \times p_k$

Rappel:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Loi de probabilité

Centrale $\quad E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times p_k$



dispersion $\quad V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 \times p_k \quad$ (Exemple)

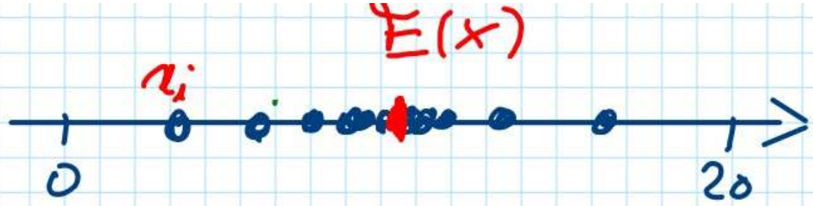
(Variance)

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

(Ecart typ)

Exercice

Centrale $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times p_k$



dispersion $V(X) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - E(x)\right)^2 \times p_k$ (Exemple)

(Variance)

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

(Ecart type)

Exercice

Lors d'un jeu consistant à tirer une boule dans une urne contenant 10 boules colorés dont:
- 2 rouges,
- 6 bleues,
- 2 vertes,

On mise au départ 2 euros.
Pour chaque tirage on gagne:
- On gagne 5 euros si on tire une boule rouge
- On gagne 6 euros si on tire une boule bleue
- On ~~gagne~~ perd 7 euros si on tire une boule verte

On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur (on oubliera pas de déduire la mise).
1) Compléter la loi de probabilité (toutes les valeurs sont de nombres) et classera les gains par ordre croissant:

GAINS(x_i)	Sou	Sou	Sou
$P(X = x_i)$	Sou	Sou	Sou

2) Donner l'espérance de X:
E(X)= Sou

dispersion $V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X)) \times p_k$ (Exemple)

(Variance)

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

(Ecart type)

Exercice

Lors d'un jeu consistant à tirer une boule dans une urne contenant 10 boules colorés dont:
- 2 rouges,
- 6 bleues,
- 2 vertes,

On mise au départ 2 euros.
Pour chaque tirage on gagne:
- On gagne 5 euros si on tire une boule rouge
- On gagne 6 euros si on tire une boule bleue
- On ~~gagne~~ perd 7 euros si on tire une boule verte

On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur (on oubliera pas de déduire la mise).
1) Compléter la loi de probabilité (toutes les valeurs sont de nombres) et classera les gains par ordre croissant:

GAINS(x_i)	Sou	Sou	Sou
P($X = x_i$)	Sou	Sou	Sou

2) Donner l'espérance de X:
E(X)= Sou

Lors d'un jeu consistant à tirer une boule dans une urne contenant 10 boules colorés dont:

- 2 rouges,
- 6 bleues,
- 2 vertes,

~~On mise au départ 2 euros.~~

Pour chaque tirage on gagne:

- On gagne 5 euros si on tire une boule rouge
- On gagne 6 euros si on tire une boule bleue
- On ~~gagne~~ perd 7 euros si on tire une boule verte

① Description: Loi de probabilité de X : "gain"

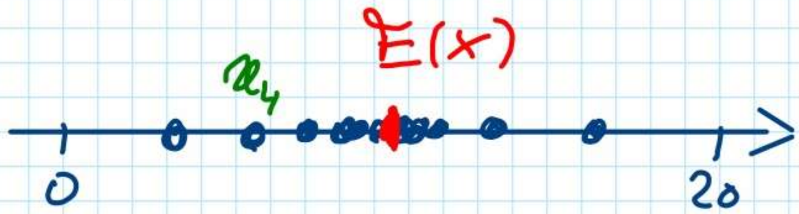
Gains (x_i)	5	6	-7
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$

Rappel :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Loi de probabilité

centrale $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times p_k$



dispersion $V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 \times p_k$

$X \hookrightarrow B(p)$

	0	S
x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$

$V(X) = (0-p)^2 \times (1-p) + (1-p)^2 \times p$

Lors d'un jeu consistant à tirer une boule dans une urne contenant 10 boules colorés dont:
- 2 rouges,
- 6 bleues,
- 2 vertes,

On mise au départ 2 euros.
Pour chaque tirage on gagne:
- On gagne 5 euros si on tire une boule rouge
- On gagne 6 euros si on tire une boule bleue
- On gagne 7 euros si on tire une boule verte

On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur (on oubliera pas de déduire la mise).
1) Compléter la loi de probabilité (toutes les valeurs sont de nombres) et classera les gains par ordre croissant:

GAINS(x_i)	Sou	Sou	Sou
P($X = x_i$)	Sou	Sou	Sou

2) Donner l'espérance de X:
E(X)= Sou

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

	0	S
x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$

$V(X) = (0-p)^2 \times (1-p) + (1-p)^2 \times p$

$(-p)^2 = p^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$= p^2 \times (1-p) + (1-2p+p^2) \times p$

Ou factoriser par $(1-p)$

$= p^2 \cancel{-p^3} + p - 2p^2 \cancel{+p^3}$

$= p - p^2 = p \times 1 - p \times p$

$= p(1-p)$

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

	O	S
x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

$$E(X) = 0\times(1-p) + 1\times p = p$$

$$V(X) = (0-p)^2\times(1-p) + (1-p)^2\times p$$

$$= p^2\times(1-p) + (1-2p+p^2)\times p$$

$$= p^2 \cancel{-p^3} + p - 2p^2 \cancel{+p^3}$$

$$= p - p^2 = p\times 1 - p\times p$$

$$= p(1-p)$$

$(-p)^2 = p^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ou factoriser par $(1-p)$

Exercice

1) Dans une urne de 25 boules, il y a 15 boules noires et le reste est constitué de boules rouges.
On choisi une boule au hasard dans cette urne et on note R la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges tirées (donc 1 ou 0).
Déterminer E(R), V(R) et $\sigma(R)$ arrondis à 5 chiffres après la virgule si besoin.

x_i	0	1
$P(R=x_i)$	$\frac{15}{25}$ 0,6	$\frac{10}{25}$ 0,4

R = 1 (on a une boule rouge)

R = 0 (on a une boule noire)

LOI_BERNOULLI0
LOI_BERNOULLI0a

x_i	0	1
$P(R=x_i)$	$\frac{15}{25}$ 0,6	$\frac{10}{25}$ 0,4

$R = 1$ (on a une boule rouge)

$R = 0$ (on a une boule noire)

LOI_BERNOULLI0

LOI_BERNOULLI0a

$E(R) = 0 \times 0{,}6 + 1 \times 0{,}4 = 0{,}4$

$V(R) = (0-0{,}4)^2 \times 0{,}6 + (1-0{,}4)^2 \times 0{,}4 = 0{,}24$

$\sigma(R) = \sqrt{V(R)} \simeq 0{,}49$

$E(R) = 0 \times 0,6 + 1 \times 0,4 = 0,4$

$V(R) = (0-0,4)^2 \times 0,6 + (1-0,4)^2 \times 0,4 = 0,24$

$\sigma(R) = \sqrt{V(R)} \simeq 0,49$

Définition Schéma de Bernoulli

La répétition de *n* épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est appelée schéma de Bernoulli.

Méthode 2 Identifier, représenter et utiliser un schéma de Bernoulli

p 384

Énoncé

Gloria a remarqué que quand un client entre dans sa libraire, la probabilité qu'il achète un livre est 0,67. On admet que les achats des clients sont indépendants les uns des autres.
Quatre clients entrent dans la librairie. On s'intéresse au fait qu'ils achètent un livre ou non.

1. Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on préciseran *n*, le nombre de répétitions, et *p*, la probabilité d'un succès.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité que deux des quatre clients achètent un livre.

Définition Schéma de Bernoulli

La répétition de *n* épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est appelée schéma de Bernoulli.

Méthode 2 Identifier, représenter et utiliser un schéma de Bernoulli

p 384

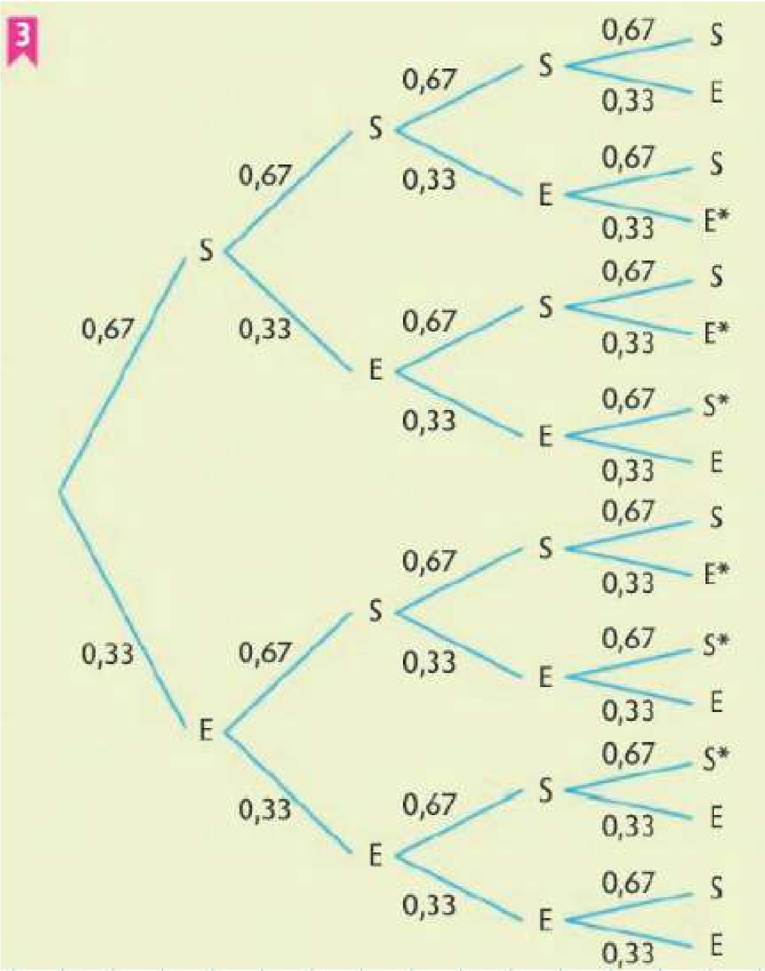
Énoncé

Gloria a remarqué que quand un client entre dans sa librairie, la probabilité qu'il achète un livre est 0,67. On admet que les achats des clients sont indépendants les uns des autres.
Quatre clients entrent dans la librairie. On s'intéresse au fait qu'ils achètent un livre ou non.

1. Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on préciseran n, le nombre de répétitions, et p, la probabilité d'un succès.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité que deux des quatre clients achètent un livre.

Méthode 2 Identifier, représenter et utiliser un schéma de Bernoulli

p 384



→ Librairie

→ Clients

on prend au hasard
4 clients qui sont entrés.

→ Librairie

→ clients

On prend au hasard 4 clients qui sont entrés.

① On a une expérience de Bernoulli : "Le client achète un livre" = S $(A = 1)$

"Le client n'achète rien" = $\bar{S} = E$ $(A = 0)$

On a un schéma de Bernoulli avec Quatre répétitions.

La probabilité du succès est $p = 0{,}67$

$$\boxed{A \hookrightarrow B(0{,}67)}$$

1 On a une expérience de Bernoulli : "Le client achète un livre" = S $(A=1)$

"Le client n'achète rien" = $\overline{S}$ $(A=0)$

On a un schéma de Bernoulli avec Quatre répétitions.

La probabilité du succès est $p = 0,67$

$$\boxed{A \hookrightarrow \mathcal{B}(0,67)}$$

$$X = \sum A$$

$1+0+0+1$

$0+0+0+0$

2 $P(X=2) =$

La probabilité du succès est $p = 0,67$

suit une loi

$$\boxed{A \hookrightarrow B(0,67)}$$

$$X = \sum A$$

$1 + 0 + 0 + 1$

$0 + 0 + 0 + 0$

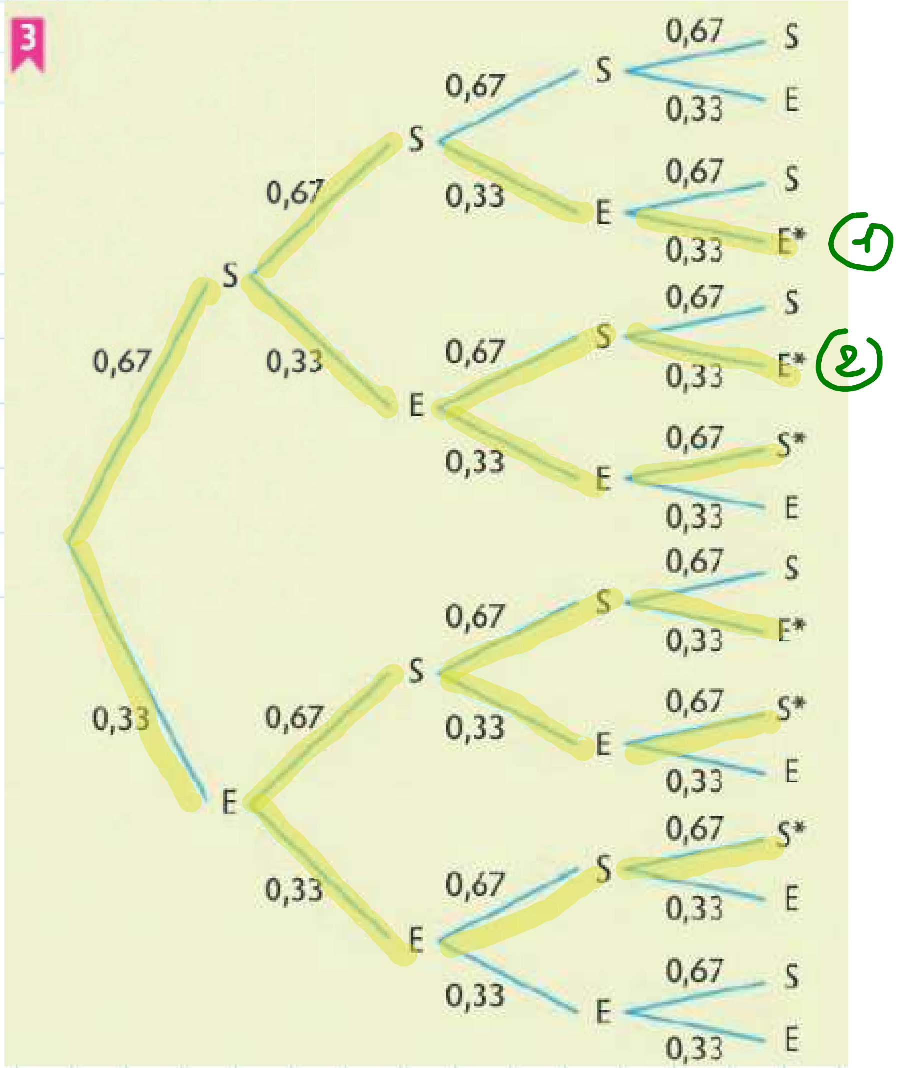
2 $P(X = 2) = ?$

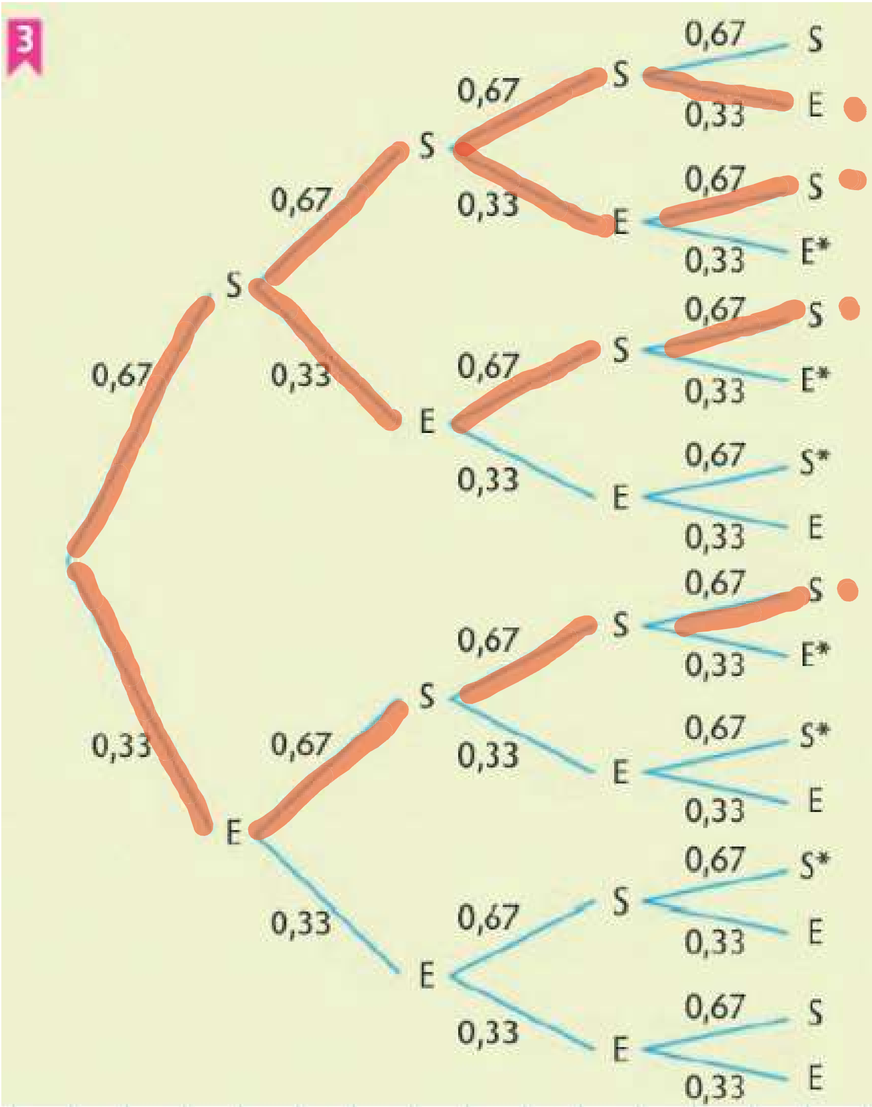
Il y a 6 chemins possibles

$0,67 \times 0,67 \times 0,33 \times 0,33$

$0,67 \times 0,33 \times 0,67 \times 0,33$

...





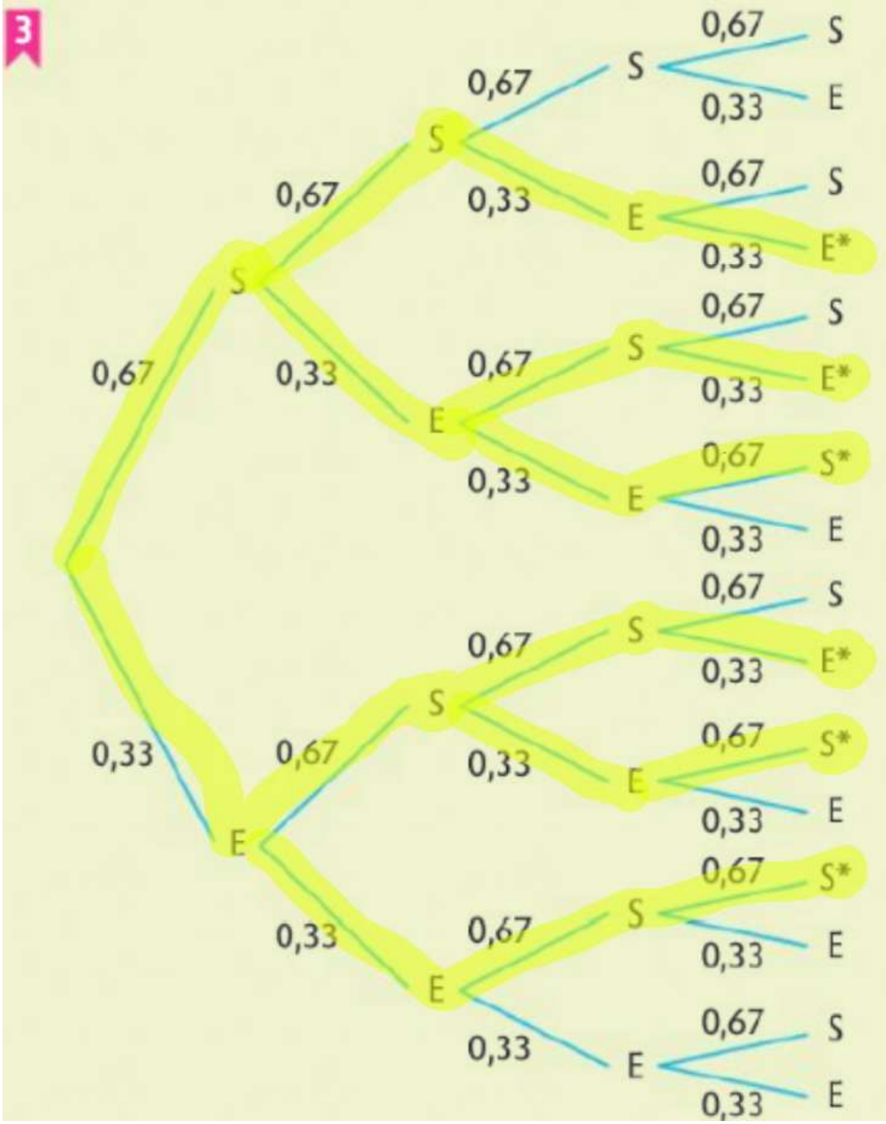
$$P(X=2) = \boxed{6} \times 0{,}67^2 \times 0{,}33^2$$

$$P(X=3) = \boxed{4} \times 0{,}67^3 \times 0{,}33^1$$

Nombre de chemins sur n répétitions où il existe exactement k succès

$$\binom{n}{k} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3}$$

$\binom{4}{2}$	6
$\binom{4}{3}$	4



nombre de chemins
(calculatrice)

$\downarrow$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \times 0{,}67^2 \times 0{,}33^2$$

${}_4C_2 \rightarrow$ Coefficient binomiale
ou combinaison

$$= \boxed{6 \times 0{,}67^2 \times 0{,}33^2}$$

$$\boxed{\simeq 0{,}29}$$

3 Loi binomiale

a Définition et calculs de probabilités

Définition Loi binomiale : c'est la loi associée au schéma de Bernoulli

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$. On considère le schéma de Bernoulli pour lequel n est le nombre de répétitions et p la probabilité d'un succès.

La loi de la variable aléatoire donnant le nombre de succès sur les n répétitions est appelée loi binomiale de paramètres n et p et se note $\mathscr{B}(n\,;p)$.

Si on note X cette variable aléatoire

$$X \xrightarrow[\text{suit}]{} \mathscr{B}(n\,;p)$$

Suit — Nombre de répétition (n) — probabilité du succès (p)

" $X = 3$ " est l'événement : " On a obtenu exactement 3 succès "

Si on note X cette variable aléatoire

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$$

probabilité du succès

Suit

Nombre de répétition

" $X=3$ " est l'événement : " On a obtenu exactement 3 succès "

Propriété Probabilités et loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$.

Pour tout entier k dans $[0\,;n]$, on a $p(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$.

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\times 0{,}67^{2}\times 0{,}33^{4-2}$$

Propriété Probabilités et loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;p)$.

Pour tout entier k dans $[0\,;n]$, on a $p(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$.

$P(X=2)=\binom{4}{2}\times 0{,}67^{2}\times 0{,}33^{4-2}$

Propriété Probabilités et loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$.

Pour tout entier k dans $[0\,;n]$, on a $p(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$.

$P(X=2)=\binom{4}{2}\times 0{,}67^{2}\times 0{,}33^{4-2}$

Où $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins dans l'arbre de probabilité où il y a exactement k succès.

$\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial ("lire "k parmi n") $\longrightarrow$ Calcul machine

Où $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins dans l'arbre de probabilité où il y a exactement k succès.

$\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial (lire "k parmi n") → Calcul machine

Méthode 3 Reconnaître la loi binomiale et calculer une probabilité de la forme $p(X = k)$

p385

Énoncé

Une urne contient neuf boules rouges et une verte. On y tire onze boules avec remise et on considère la variable aléatoire V donnant le nombre de boules vertes obtenues.

1. Donner la loi de V.

2. Calculer $p(V = 2)$.

R R V V V R R R V V R

0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0

$S_i = \begin{cases} 1 \text{ si Verte} \\ 0 \text{ si Rouge} \end{cases}$

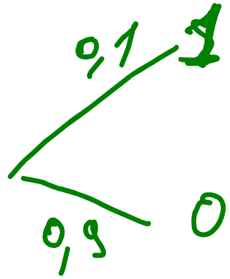
1° On a un schéma de Bernoulli où succès = "boule verte" et $n = 11$

Les S_i sont indépendantes : $V \longrightarrow \mathcal{B}(\underset{n}{11} ; \underset{p}{\tfrac{1}{10}})$ $\quad \mathcal{B}(11 ; 0,1)$

2°

$$P(V=2) = \binom{11}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^9$$

$$\simeq 0,213$$



Exercice :

Dans une usine, les produits passent un test.

La probabilité qu'un produit soit défectueux est $0,1$.

Sur un échantillon de 10 produits, quelle est la probabilité que 2 d'entre eux soient défectueux ?

La probabilité qu'un produit soit défectueux est 0,1.

Sur un échantillon de 10 produits, quelle est la probabilité que 2 d'entre eux soient défectueux.

- <u>Modéliser</u>

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ produit est OK.} \\ 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ produit est défectueux} \end{cases}$$

Soit $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$.

- <u>Modéliser</u>

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ produit est OK.} \\ 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ produit est défectueux} \end{cases}$$

Soit $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$. Les variables X_i sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $\left(X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(0,1) \right)$

Pour X on a donc un schéma de Bernoulli

donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10 ; 0,1)$

- <u>Calculer</u> $P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^8 = \ldots$

- Modéliser

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ produit est OK.} \\ 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ produit est défectueux} \end{cases}$$

Soit $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$. les variables X_i sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli $B(p)$, $\left(X_i \hookrightarrow B(0,1) \right)$

Pour X on a donc un schéma de Bernoulli

donc $X \hookrightarrow B(10\,;\,0,1)$

- Calculer $P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^8 = \dots$

LOI_BINOMIALE1
LOI_BINOMIALE1a
LOI_BINOMIALE1b

Propriété Loi binomiale : espérance, variance et écart-type

Pour X, variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$, on a :

- l'espérance $E(X) = np$
- la variance $V(X) = np(1-p)$
- l'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Moyenne **Dispersion**

$\mathcal{B}(20\,;0,5)$

$E(X) = 20 \times 0,5 = 10$

		$E(X)$	$\sigma(X)$
X_1	$\mathcal{B}(18, 0.4)$	7,2	2,08
X_2	$\mathcal{B}(10\,; 0.2)$	2	1,26

← On peut espérer un nombre de succès autour de 7

← On peut espérer un nombre de succès autour de 2 avec plus d'optimisme

Méthode 4 Calculer des probabilités avec la loi binomiale

Les calculatrices « lycée » permettent de calculer des probabilités de la forme $p(X = k)$ et $p(X \leqslant k)$ (ainsi que $p(X \geqslant k)$ et $p(k \leqslant X \leqslant k')$ pour la numworks) mais il faut pouvoir calculer tous types de probabilités avec la loi binomiale.

On considère la loi binomiale $\mathcal{B}(13; 0.76)$.

Calculer:

$P(X = 6) =$ 0.015 (arrondir au millième)

$P(X \leqslant 7) =$ 0.07 (arrondir au centième)

$P(X \geqslant 10) =$ 0.62 (arrondir au centième)

$P(X < 9) =$ 0.18 (arrondir au centième)

$P(X > 8) =$ 0.82 (arrondir au centième)

L'espérance de X est 9.88

L'écart type de X est 0.427

CALCULS_BINOMIALE1
CALCULS_BINOMIALE2

Exercice → Numworks

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(13; 0.76)$

1 $P(X = 6) = \binom{13}{6} \times 0{,}76^6 \times 0{,}24^7 \simeq 0{,}015$

2 $P(X \leq 7)$

$= P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 7)$

$= 0{,}068$

Exercice → NumWorks

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(13 ; 0.76)$

1. $P(X=6) = \binom{13}{6} \times 0{,}76^{6} \times 0{,}24^{7}$
   $\simeq 0{,}015$

2. $P(X \leq 7)$
   $= P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=7)$
   $\simeq 0{,}068$

3. $P(X < 7) = P(X=0) + \dots + P(X=6)$
   $= P(X \leq 6) \simeq 0{,}019$

4. $P(X > 4) = P(X=5) + \dots + P(X=13) = P(X \geq 5)$

② $P(X \leq 7)$

$= P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=7)$

$\simeq 0,068$

③ $P(X < 7) = P(X=0) + \dots + P(X=6)$

$= P(X \leq 6) \simeq 0,019$

④ $P(X > 4) = P(X=5) + \dots + P(X=13) = P(X \geq 5)$

$\simeq 0,999$

Exercice → NumWorks

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(13\,;\,0.76)$

① $P(X=6) = \binom{13}{6} \times 0{,}76^{6} \times 0{,}24^{7}$

$\simeq 0015$

② $P(X \leq 7)$

$= P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=7)$

$\simeq 0{,}068$

③ $P(X<7) = P(X=0) + \dots + P(X=6)$

$= P(X \leq 6) \simeq 0{,}019$

④ $P(X>4) = P(X=5) + \dots + P(X=13) = P(X \geq 5)$

② $P(X \leq 7)$

$= \boxed{P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=7)}$

$\approx 0{,}07$ avec la calculatrice

$P(X \leq 7) = 0.06750161$

③ $P(X \geq 10) \simeq 0{,}62$ avec la calculatrice $= P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) + P(X=13)$

$P(X \geq 10) = 0.6177699$

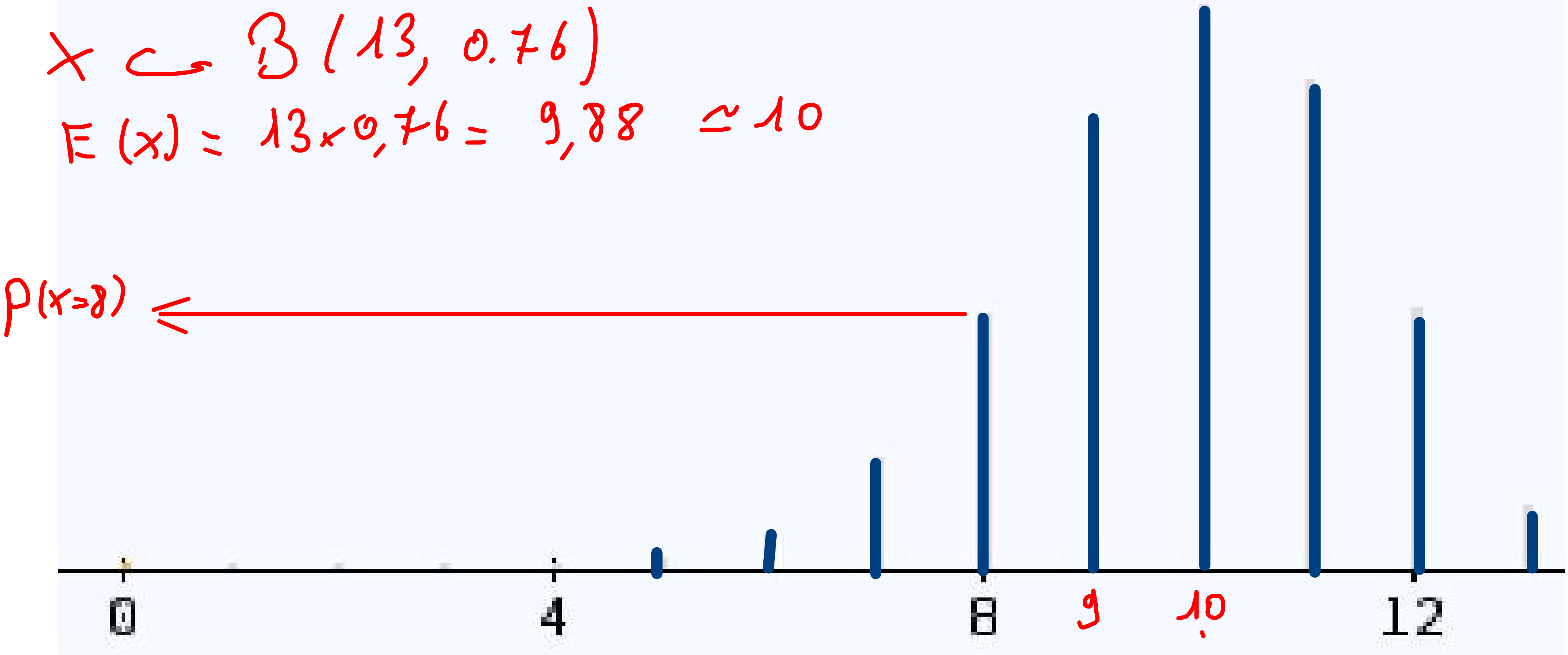
④ $P(X > 5) = P(X \geq 6) = P(X=6) + \dots + P(X=13)$

$\simeq 0{,}995$ avec la calculatrice

$P(X \leq 0) = 8.764883E{-9}$

$X \hookrightarrow B(13, 0.76)$

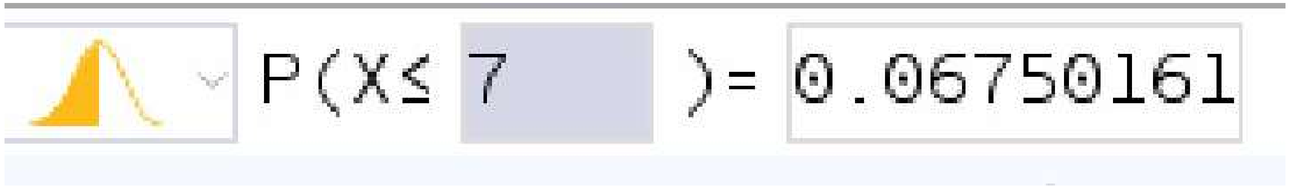
$E(X) = 13 \times 0{,}76 = 9{,}88 \simeq 10$



② $P(X \le 7)$

$= \boxed{P(X=0)+P(X=1)+\dots+P(X=7)}$

$\approx 0{,}07$ avec la calculatrice



③ $P(X \ge 10) \simeq 0{,}62$ avec la calculatrice $= P(X=10)+P(X=11)+P(X=12)+P(X=13)$

④ $P(X > 5) = P(X \ge 6) = P(X=6)+\dots+P(X=13)$

$\simeq 0{,}995$ avec la calculatrice

On considère la loi binomiale $\mathcal{B}(13; 0.76)$.

Calculer:

$P(X = 6) =$ 0.015 (arrondir au millième)

$P(X \leqslant 7) =$ 0.07 (arrondir au centième)

$P(X \geqslant 10) =$ 0.62 (arrondir au centième)

$P(X < 9) =$ 0.18 (arrondir au centième)

$P(X > 8) =$ 0.82 (arrondir au centième)

L'espérance de X est 9.88

L'écart type de X est 0.427

CALCULS_BINOMIALE1
CALCULS_BINOMIALE2

On considère la loi binomiale $\mathcal{B}(18; 0.64)$.

Calculer:

$P(X = 10) =$ 0.142 (arrondir au millième)

$P(X \leqslant 12) =$ 0.68 (arrondir au centième)

$P(X \geqslant 9) =$ 0.93 (arrondir au centième)

$P(X < 14) =$ 0.83 (arrondir au centième)

$P(X > 8) =$ 0.93 (arrondir au centième)

L'espérance de X est 11.52

L'écart type de X est 0.48

On considère la loi binomiale $\mathcal{B}(17; 0.48)$.

Calculer:

$P(X = 7) =$ 0.165 (arrondir au millième)

$P(X \leqslant 6) =$ 0.21 (arrondir au centième)

$P(X \geqslant 8) =$ 0.62 (arrondir au centième)

$P(X < 12) =$ 0.95 (arrondir au centième)

$P(X > 11) =$ 0.05 (arrondir au centième)

L'espérance de X est 8.16

L'écart type de X est 0.5

Exercice: appliquer la loi Binomiale

Dans une population, la proportion de personnes végétariennes est de 29 %.
On suppose cette population suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage d'une personne dans cette population à un tirage avec remise.
Une cantine servant 127 repas à des personnes issues de cette population prévoit 40 repas végétariens.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de repas végétariens nécéssaires.

$\mathcal{B}(127 ; 0,29)$

1) Quelle est la probabilité pour qu'il manque exactement un repas végétarien?
On cherche à calculer P($X=41$?)= ?

2) Quelle est la probabilité que ce soit suffisant ?
On cherche à calculer P($X \leq 40$?)= ?

3) Quelle est la probabilité que ce ne soit pas suffisant ?
On cherche à calculer P($X \geq 41$?)= ?

4) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un exactement un repas végétarien de trop ?
On cherche à calculer P($X=39$?)= ?

LOI_BINOMIALE2
LOI_BINOMIALE2a

Exercice: appliquer la loi Binomiale

Dans une population, la proportion de personnes végétariennes est de 29 %.
On suppose cette population suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage d'une personne dans cette population à un tirage avec remise.
Une cantine servant 214 repas à des personnes issues de cette population prévoit 69 repas végétariens.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de repas végétariens nécéssaires.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il manque exactement un repas végétarien?
On cherche à calculer P(?)= 0.029 ?

2) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un exactement un repas végétarien de trop ?
On cherche à calculer P(?)= 0.039 ?

3) Quelle est la probabilité que ce ne soit pas suffisant ?
On cherche à calculer P(?)= 0.132 ?

49 Quand elle joue avec son bilboquet, Samira arrive à planter la boule sur le socle avec une probabilité 0,78.

1. Quelle hypothèse doit-on faire pour pouvoir assimiler la répétition de 3 « lancers » de bilboquet à un schéma de Bernoulli ?

2. Sous cette hypothèse, représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.

3. Calculer la probabilité :

a) qu'elle plante exactement une fois la boule sur le socle.

b) qu'elle plante au moins deux fois la boule sur le socle.

Ex 49 p 384

1. On doit supposer que chacun des lancers est INDEPENDANT des autres.

2. Arbre ou Loi Binomiale

3. X = nombre de succès

(Modélisation) Méthode : Il faut introduire une variable aléatoire si besoin. ?

=

. Calculer la probabilité :
) qu'elle plante exactement une fois la boule sur le socle.
) qu'elle plante au moins deux fois la boule sur le socle.

des autres.

② Arbre ou Loi Binomiale

③ X = nombre de succès

(Modélisation)

Méthode : Il faut introduire une variable aléatoire si besoin.

On note $X_i = \begin{cases} 0 & \text{si échec} \\ 1 & \text{si succès} \end{cases}$. Les X_i sont des variables de Bernoulli et indépendantes.

$X = \sum_{i=1}^{3} X_i$ donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(3\,;\,0{,}78)$

a) $P(X=1) = \binom{3}{1} \times 0{,}78^1 \times 0{,}22^2 \simeq$

b) $P(X \geqslant 2) = P(X=2) + P(X=3) \simeq$

Exercice: appliquer la loi Binomiale

Dans une population, la proportion de personnes végétariennes est de 29 %.
On suppose cette population suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage d'une personne dans cette population à un tirage avec remise.
Une cantine servant 214 repas à des personnes issues de cette population prévoit 69 repas végétariens.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de repas végétariens nécéssaires.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il manque exactement un repas végétarien?
On cherche à calculer P(?)= 0.029 ?

2) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un exactement un repas végétarien de trop ?
On cherche à calculer P(?)= 0.039 ?

3) Quelle est la probabilité que ce ne soit pas suffisant ?
On cherche à calculer P(?)= 0.132 ?

49 Quand elle joue avec son bilboquet, Samira arrive à planter la boule sur le socle avec une probabilité 0,78.

1. Quelle hypothèse doit-on faire pour pouvoir assimiler la répétition de 3 « lancers » de bilboquet à un schéma de Bernoulli ?

2. Sous cette hypothèse, représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.

3. Calculer la probabilité :

a) qu'elle plante exactement une fois la boule sur le socle.

b) qu'elle plante au moins deux fois la boule sur le socle.

Ex 49 p 384

① On doit supposer que chacun des lancers est INDEPENDANT des autres.

② Arbre ou loi Binomiale

③ X = nombre de succès

(Modélisation)

Méthode : Il faut introduire une variable aléatoire si besoin.

?

=

. Calculer la probabilité :
) qu'elle plante exactement une fois la boule sur le socle.
) qu'elle plante au moins deux fois la boule sur le socle.

des autres.

② Arbre ou Loi Binomiale

③ X = nombre de succès

(Modélisation)

Méthode : Il faut introduire une variable aléatoire si besoin.

On note $X_i = \begin{cases} 0 & \text{si échec} \\ 1 & \text{si succès} \end{cases}$. Les X_i sont des variables de Bernoulli et indépendantes.

$X = \sum_{i=1}^{3} X_i$ donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(3\,;\,0{,}78)$

a) $P(X=1) = \binom{3}{1} \times 0{,}78^1 \times 0{,}22^2 \simeq$

b) $P(X \geqslant 2) = P(X=2) + P(X=3) \simeq$

Exercice 1: Arbre ou loi Binomiale?

Dans une usine, les produits passent deux tests indépendants. Des études sur les marges d'erreurs des tests ont montré que la probabilité qu'un produit défectueux passe le premier test est 0.11 et que la probabilité qu'il passe le deuxième test est 0.03. Un produit qui passe les deux tests est mis en vente, les autres sont détruits.

1) Quelle est la probabilité qu'un produit défectueux soit mis en vente?
Votre réponse: ______ ?

2) Sur 60 produits défectueux indépendants, quelle est la probabilité qu'au moins 6 produits soit mis en vente?
Votre réponse: soit D la variable aléatoire donnant le nombre de produits défectueux et qui sont malgré tout mis en vente (c'est à dire qu'ils ont passé les deux tests). On a un schéma de BERNOUILLI, donc D suit une loi BINOMIALE de paramètre n= ______ ? et p= ______ ?
On a donc, arrondi à 10^{-4} près avec la calculatrice, $P(D \geq 6)$=
______ ?

LOI_BINOMIALE3

C Intervalles de fluctuation

$\alpha \in]0;1[$

Définition Intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale, $\alpha \in]0;1[$ et a et b réels.

Un intervalle $[a;b]$ tel que $p(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$ est appelé **intervalle de fluctuation** au seuil de $1-\alpha$ (ou au risque α) associé à X.

Exemple :

$\alpha = 0{,}05 = 5\%$ (Risque)

$1-\alpha = 0{,}95 = 95\%$ (Seuil)

Supposons $X \hookrightarrow B(43, 0.2)$

$P(X=0)$ - - - $P(X=43)$

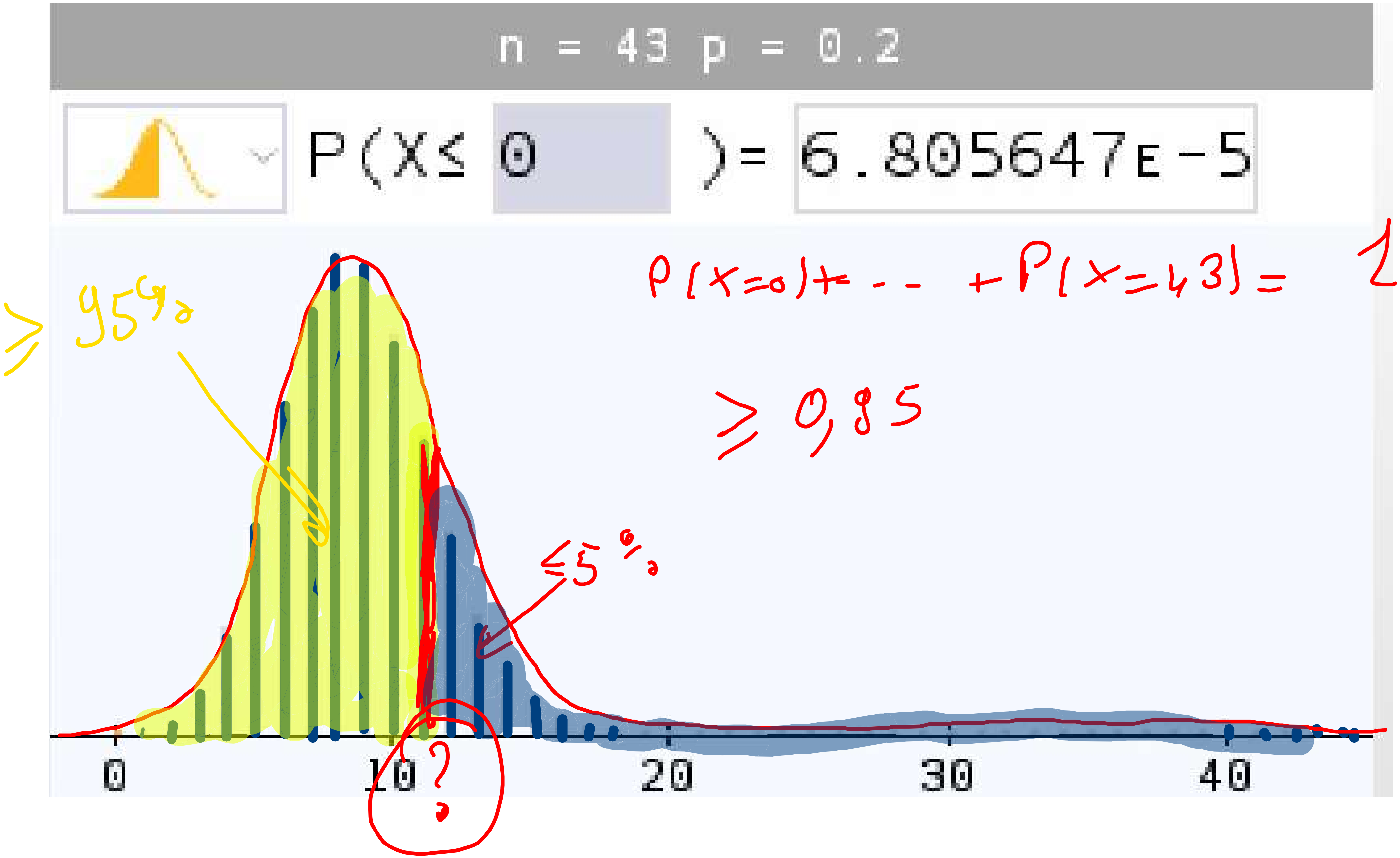
Exemple :

$\alpha = 0{,}05 = 5\%$ (Risque)

$1-\alpha = 0{,}95 = 95\%$ (Seuil)

Supposons $X \hookrightarrow \mathcal{B}(43, 0.2)$

$P(X=0)$ - - - $P(X=43)$



n = 43 p = 0.2
P(X≤ 0)= 6.805647E-5
0
10
20
30
40
≥ 95%
P(X=0)+ ... + P(X=43) = 1
≥ 0,95
≤ 5%
?

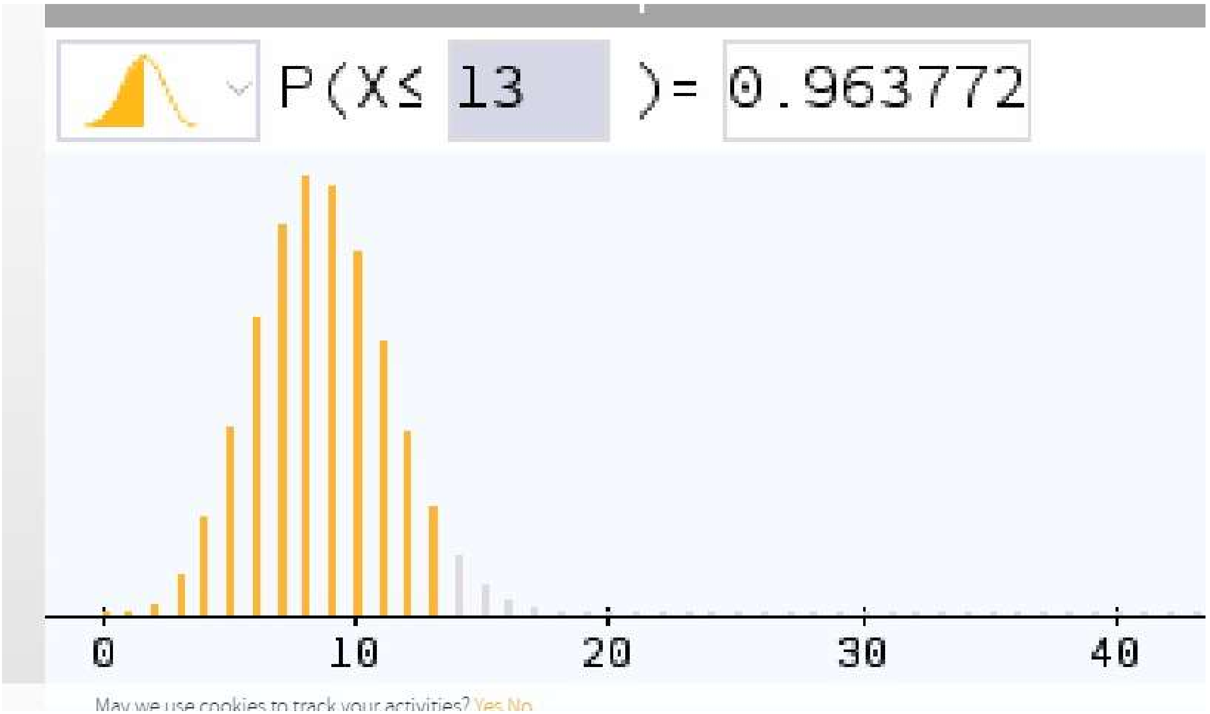
Exemple :

$1-\alpha = 0{,}95 = 95\%$

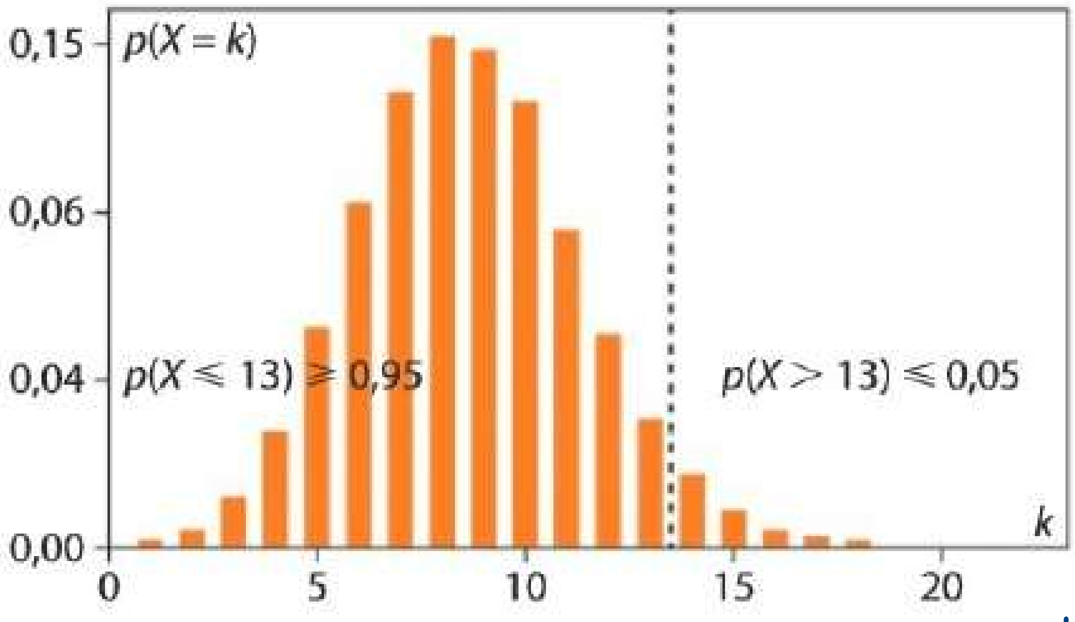
$\alpha = 0{,}05 = 5\%$

$$\boxed{P(0 \le X \le k) = 0{,}9638 \ge 0{,}95}$$

Calculatrice



La plus petite valeur de k est $k = 13$.



Cas concret interprétation

$X \hookrightarrow B(43\,;\,0.2)$

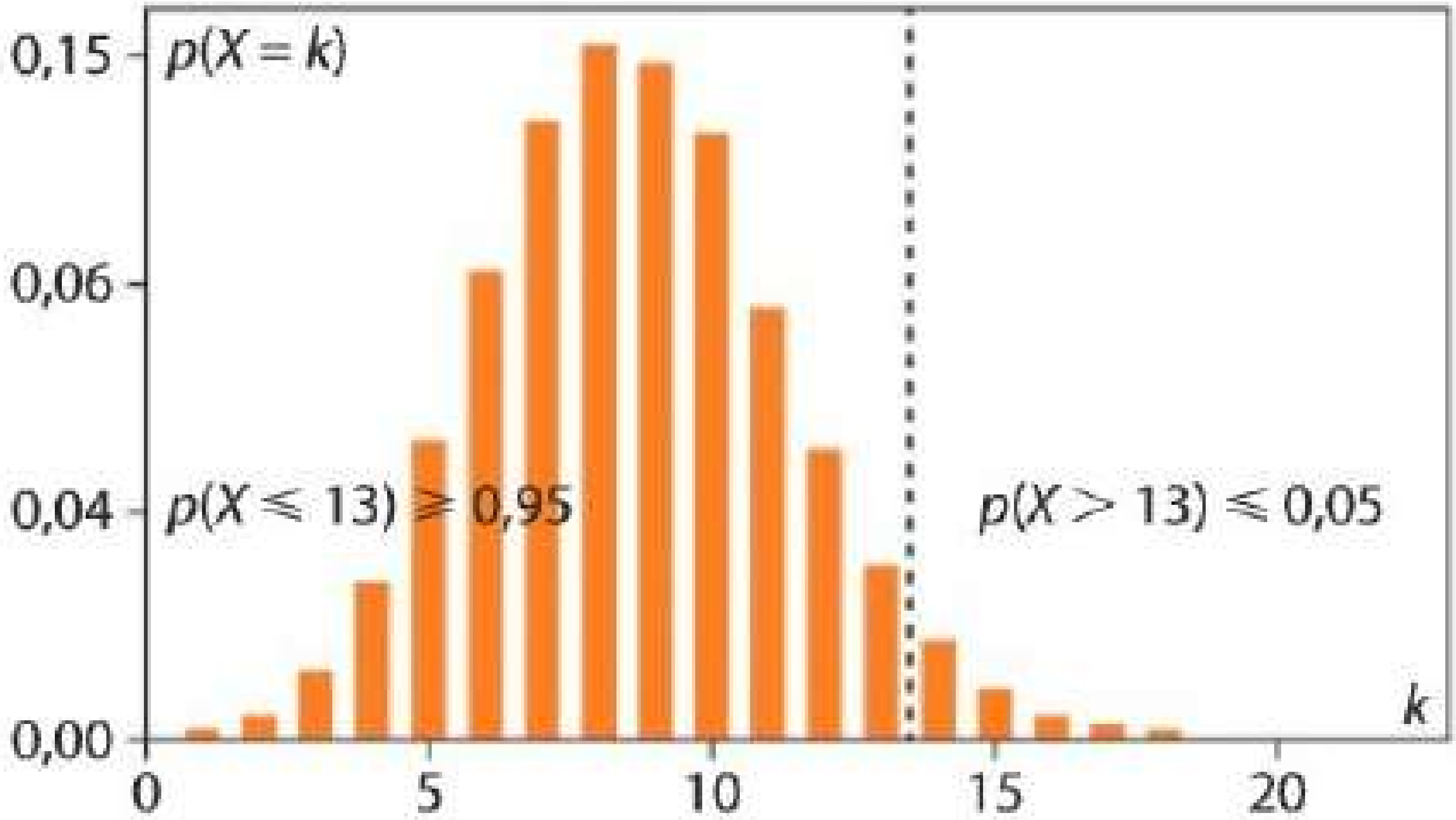
Dans une population d'une île, 20% des habitants sont du groupe sanguin AB.
Dans une tribu de cette île, on choisit 43 individus et on teste leur groupe sanguin

Dans une population d'une île, 20% des habitants sont du groupe sanguin AB.
Dans une tribu de cette île, on choisit 43 individus et on teste leur groupe sanguin.

Il y en a 25 de groupe AB.

Comme $P(0 \leq X \leq 13) \geqslant 0{,}95$

$25 \gg 13$, il y avait moins de 5% de chances que cela arrive.



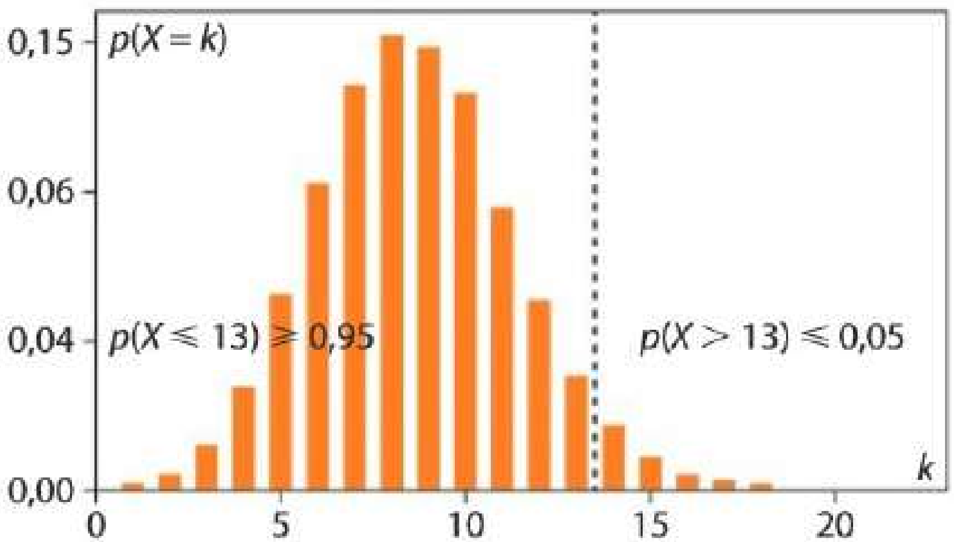
0,15
p(X = k)
0,06
0,04
p(X ⩽ 13) ⩾ 0,95
p(X > 13) ⩽ 0,05
0,00
k
0
5
10
15
20

C Intervalles de fluctuation

Définition Intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale, $\alpha \in]0\,;1[$ et a et b réels.

Un intervalle $[a\,;b]$ tel que $p(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$ est appelé intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha$ (ou au risque α) associé à X.

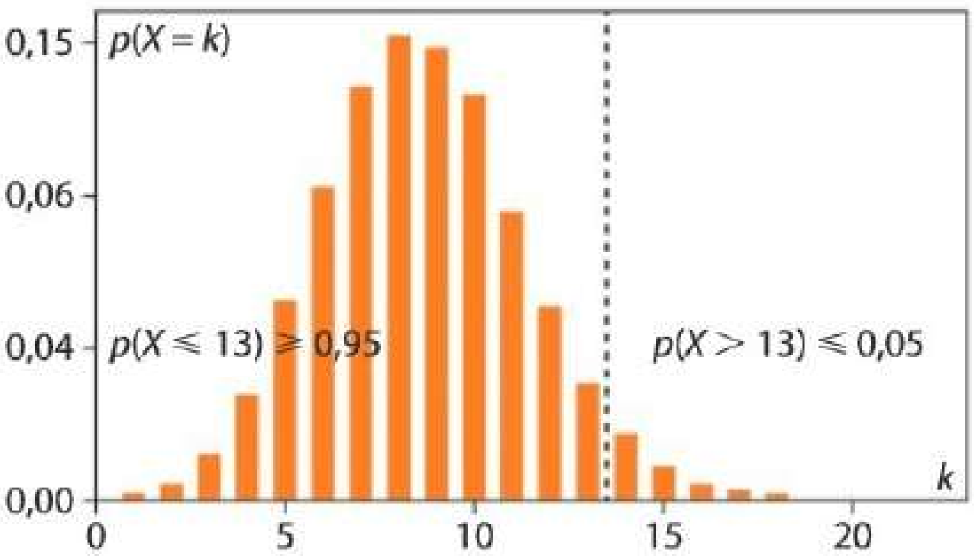


Exemple : $\alpha = 0,05 = 5\%$

$P(0 \leq X \leq 13) = 0,9638 \geq 0,95$

avec la calculatrice en mode "Suite" et

"$u(n) = \text{BinomFréq}(43, 0.2, n)$"



Exemple : $\alpha = 0,05 = 5\%$

$P(0 \leq X \leq 13) = 0,9638 \geq 0,95$

avec la calculatrice en mode "Suite" et

"$u(n) = \text{BinomFrép}(43, 0.2, n)$"

Donc $[0 ; 13]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de $0,95 = 1 - \alpha$ (au risque de 5%)

C Intervalles de fluctuation

$\alpha \in]0;1[$

Définition Intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale, $\alpha \in]0;1[$ et a et b réels.

Un intervalle $[a;b]$ tel que $p(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$ est appelé **intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha$** (ou au risque α) associé à X.

Exemple : $\alpha = 0{,}05 = 5\%$

$1-\alpha = 0{,}95 = 95\%$

$X \hookrightarrow B(43; 0.2)$

$P(0 \leq X \leq 13) = 0{,}9638 \geq 0{,}95$

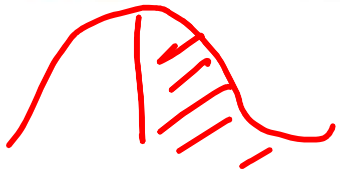
avec la calculatrice en mode "Suite" et "f(x)"

$\boxed{p(0 \leq X \leq ?) \geq 0{,}95}$

"$u(n) =$

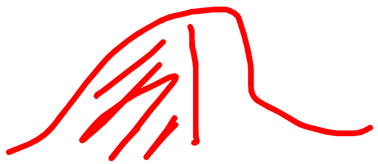
Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(30; 0,78)$.
Le plus grand entier k tel que $P(X \geqslant k) \geqslant 0.9$ est $\boxed{20}$



Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(47; 0,32)$.
Le plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0.98$ est $\boxed{22}$



Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(30; 0,78)$.
Le plus grand entier k tel que $P(X \geqslant k) \geqslant 0.9$ est 20

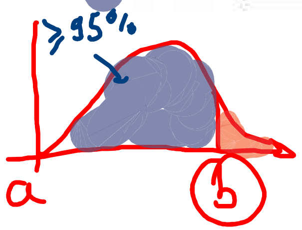
Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(47; 0,32)$.
Le plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0.98$ est 22

Exercice 3

Attention, PAS DE ZERO INUTILE, utiliser le POINT en séparateur décimal.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n=50 et p=0.34.
Donner l'intervalle de fluctuation sous la forme [a;b] avec a=0 de X au seuil de 95%:
I=[0; 23 Sol].

$P(X \leq b) \geq 0{,}95$, on cherche la plus petite valeur de b



LOI_BINOMIALE4
INTERVALLE_FLUCT_BINOMIALE0
INTERVALLE_FLUCT_BINOMIALE0a

Propriété Intervalle de fluctuation centré

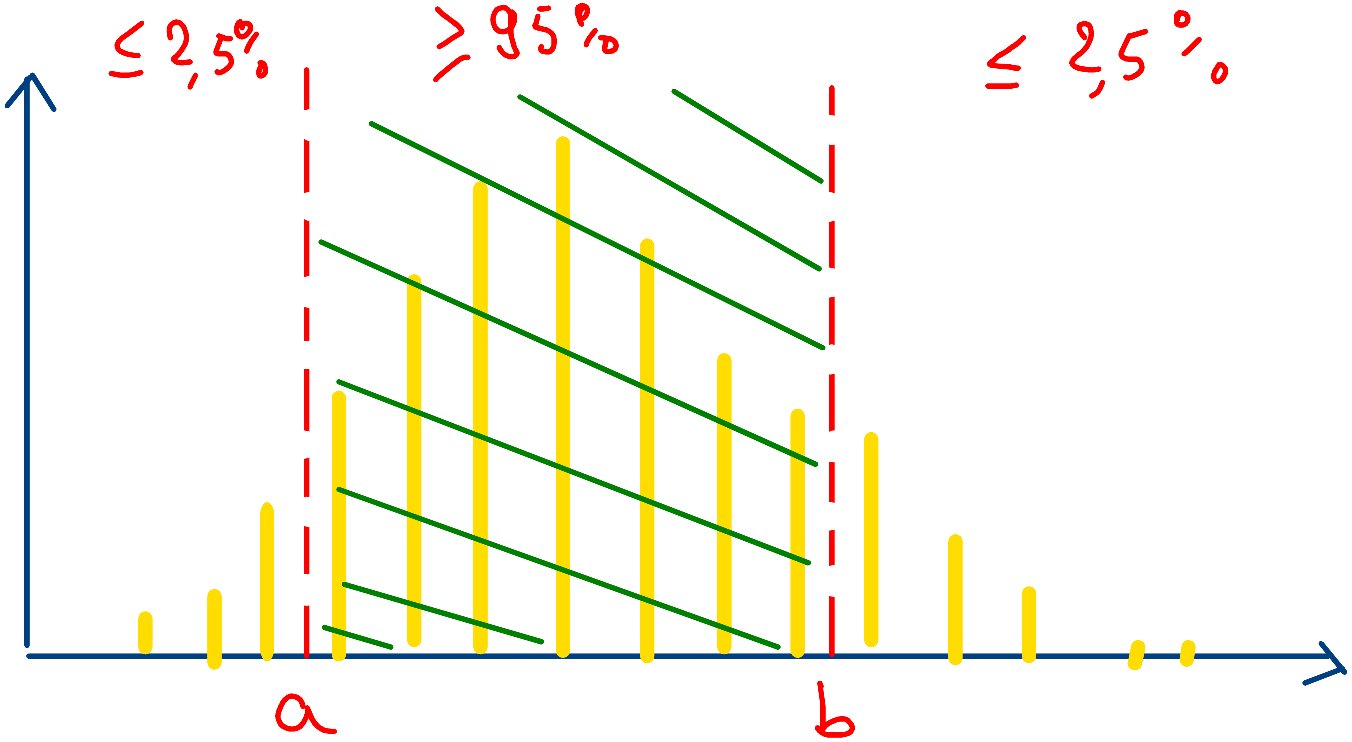
Soit X, une variable aléatoire suivant une loi binomiale, $\alpha \in]0\,;1[$ et a et b réels.

Si $p(X < a) \leqslant \frac{\alpha}{2}$ et $p(X > b) \leqslant \frac{\alpha}{2}$ alors l'intervalle $[a\,;b]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha$ associé à X. Dans ce cas, on dit que c'est un intervalle de fluctuation centré (ou bilatéral).

Exemple :

$\alpha = 5\,\%$

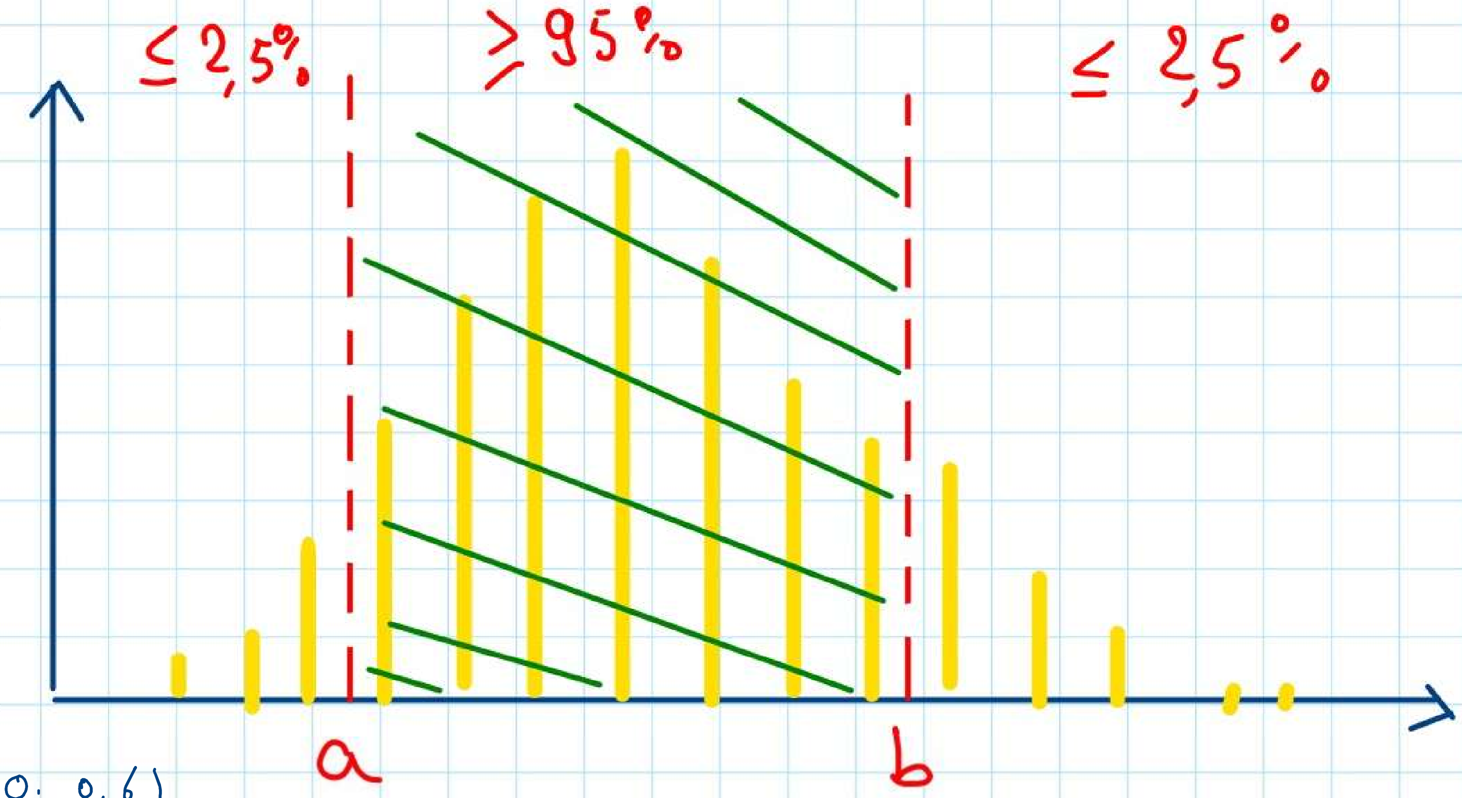
$\frac{\alpha}{2} = 2{,}5\,\% = 0{,}025$



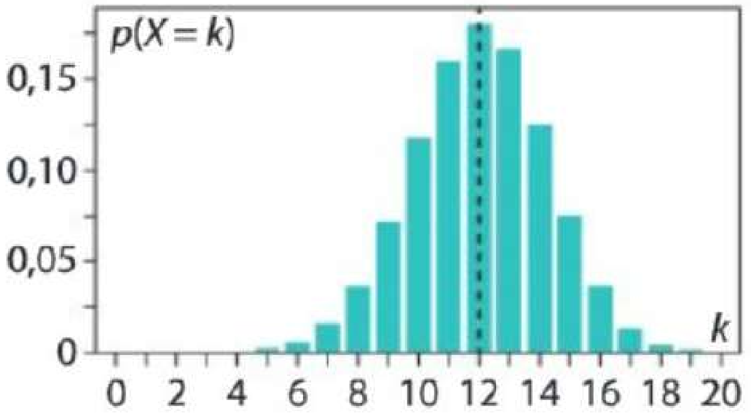
Exemple :

$\alpha = 5\,\%$

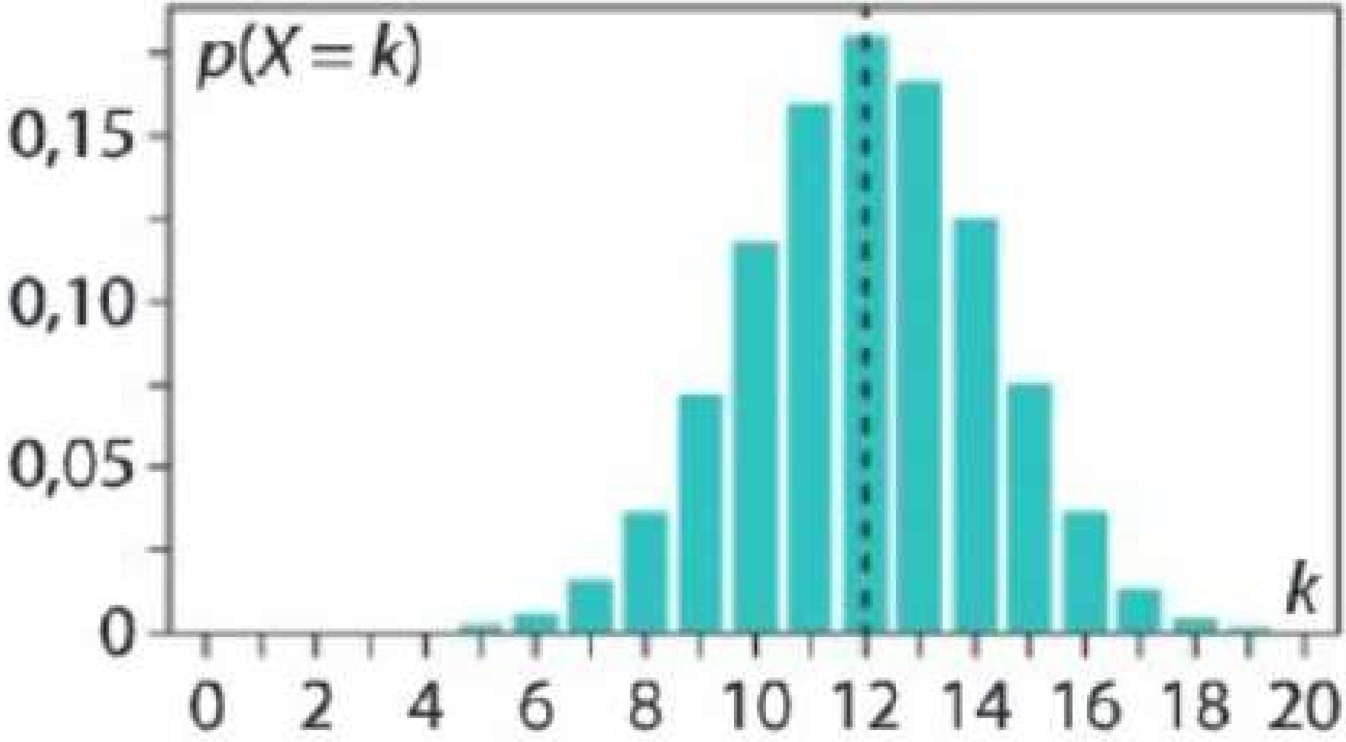
$\frac{\alpha}{2} = 2{,}5\,\% = 0{,}025$



Exercice $X \hookrightarrow \mathcal{B}(20;\ 0.6)$



Exercice $X \hookrightarrow \mathcal{B}(20\,;\,0.6)$ $\alpha = 4\%$ (Risque)



① $E(X) = np$

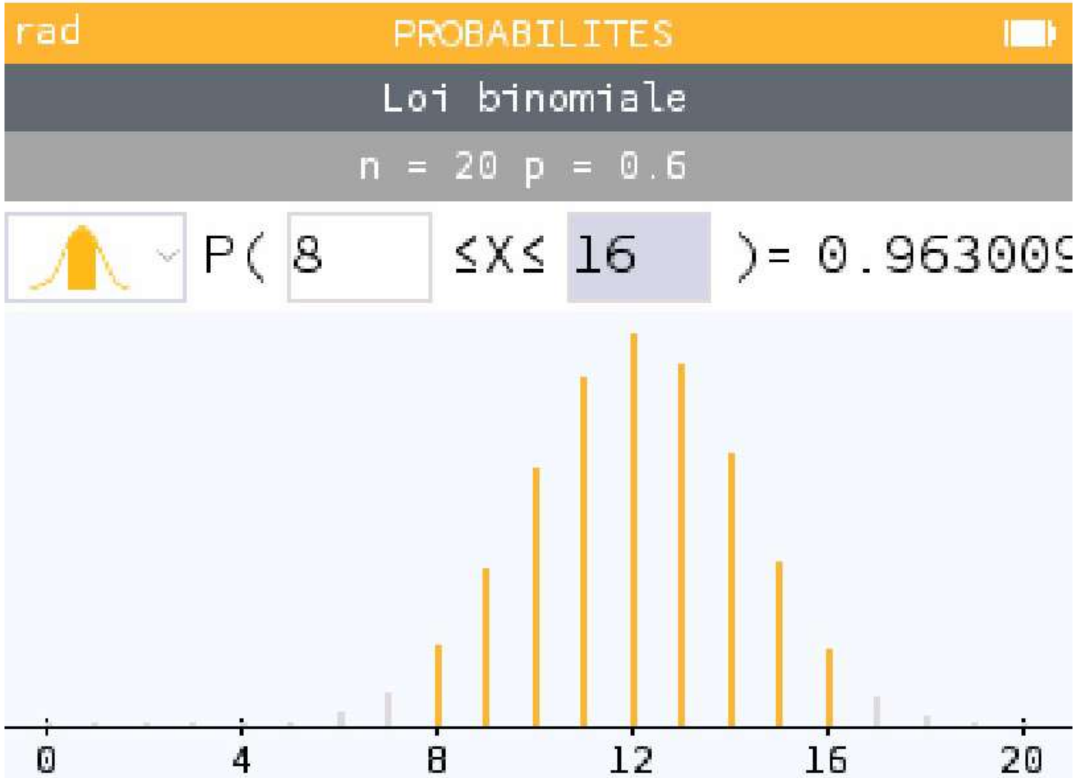
$= 20 \times 0{,}6$

$= 12$

② $a = ?$ $b = ?$

Tels que

$P(a \leq X \leq b) \geq 96\%$ (Seuil)



$a = 8$ et $b = 16$

$[8\,;16]$ est un intervalle de fluctuation centré

Exercice 1

Une entreprise annonce un taux de défaut de 12 % de ses appareils.

Un grossiste commande 45 appareils et décide de tester un a un chacun des appareils.
On note X la variable aleatoire donnant le nombre d'appareils qui sont en état de marche.
X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale B(Sol ; Sol)

Afin de verifier si son échantillon (constitués par les 45 produits commandés) est conforme aux indications du fabriquant au seuil de 80 %, il commence par chercher le plus grand entier k tel que $P(X \geqslant k) \geqslant$ Sol .

Il trouve que cet entier est Sol .

Autrement dit, pour affirmer avec une probabilité de 80 % que l'échantillon est conforme avec l'affirmation "le taux de défaut est de 12 %", il faut qu'il y ait au moins Sol appareils en parfait état de marche parmis les 45 appareils commandés.

Exercice 2

On cherche vérifier l'hypothèse qu'un médicament contre une maladie est efficace à 87 %.

Pour tester cette hypothèse, on prélève un échantillon de 47 patients ayant reçu le traitement.
On note G la variable aleatoire donnant le nombre de patients ayant guéri après avoir reçu le traitement.
G est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale B(Sol ; Sol)

Afin de verifier si cet échantillon (constitués par les 47 patients ayant reçu le traitement) est conforme à l'hypothèse formulée précédemment au seuil de 85 %, on commence par déterminer le plus grand entier k tel que $P(G \geqslant k) \geqslant$ Sol .

On trouve que cet entier est Sol .

Autrement dit, pour affirmer avec une probabilité de 85 % que l'échantillon est conforme avec l'affirmation "le taux de guérison est de 13 %", il faut qu'il y ait au moins Sol patients guéris parmis les 47 patients ayant reçu le traitement.

Exercice: influence de la taille de l'échantillon pour tester une hypothèse

Une société de transport affirme que **88 % de ses livraisons arrivent à l'heure** (donc 12 % de retard).

Un responsable logistique souhaite vérifier cette affirmation. Il décide d'observer **45 livraisons consécutives** et note X la variable aléatoire donnant le **nombre de livraisons arrivées à l'heure.**

X suit alors une loi binomiale B(**45** ; **0,88**).

Pour contrôler si son échantillon (les 45 livraisons) est conforme à la déclaration du transporteur, au seuil de confiance de **8~~0~~8** %, il cherche le plus grand entier *k* tel que :

$$P(X \geq k) \geq 0{,}8\cancel{0}8.$$

Il trouve que cet entier est ... 37

Autrement dit, pour affirmer avec une probabilité de **8~~0~~8** % que l'échantillon est conforme à l'affirmation « *88 % des livraisons arrivent à l'heure* », il faut qu'il y ait au moins 37 livraisons ponctuelles sur les **45** observées.

LOI_BINOMIALE5