CHAPITRE 9
PRIMITIVES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Equation algébrique

$2x+1=0$ **Déterminer le réel x**

Equation fonctionnelle

$3f=5-f$ **Déterminer la fonction f**

Fonction constante

$f(x) = \frac{5}{4}$ (constante)

Equation différentielle

$f' + f = 5$ **Déterminer la fonction f**

Equation fonctionnelle

$3f=5-f$ **Déterminer la fonction f** $f(x) = \frac{5}{4}$ (constante)

Equation différentielle

$f' + f = 5$ **Déterminer la fonction f**

Exemples: $(e^x)' = e^x$ $f : x \mapsto e^x$

$f' - f = 0$ ou $\boxed{f' = f}$

Equation différentielle

$f' + f = 5$ **Déterminer la fonction f**

Exemples : $(e^x)' = e^x$ $f : x \mapsto e^x$

$f' - f = 0$ ou (E_1) $\boxed{f' = f}$

f est solution de l'équa diff (E_1)

$g : x \mapsto e^x + 3$ $g'(x) = e^x$

(E_2) $\boxed{g' + 3 = g}$

g est solution de l'équa diff (E_2)

Primitive

$$\frac{1}{2}x^3 \underset{\text{Primitive}}{\overset{\text{Derive}}{\rightleftarrows}} \frac{3}{2}x^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}x^3\right)' &= \frac{3}{2}x^2 \\ \int \frac{3}{2}x^2 &= \frac{1}{2}x^3 \end{aligned}}$$

<u>Exercice</u>

$$\int \frac{3}{5}x^5 = ?$$

$$\frac{1}{2}x^3 \ \underset{\text{primitive}}{\overset{\text{Derive}}{\rightleftarrows}} \ \frac{3}{2}x^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}x^3\right)' = \frac{3}{2}x^2 \\ \int \frac{3}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3 \end{array}}$$

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

Exercice a) $\int \frac{3}{5}x^5 = ?$

$$(x^6)' = 6\,x^5$$

$\times\frac{1}{6}$

$$\left(\frac{1}{6}x^6\right)' = x^5$$

$$\int \frac{3}{5}x^5 = \frac{3}{5}\int x^5$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{6}x^6 = \frac{1}{10}x^6$$

Exercice a) $\int \frac{3}{5} x^5 = ?$

$$(x^6)' = 6x^5$$

$$\times \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{1}{6}x^6\right)' = x^5$$

$$\int \frac{3}{5} x^5 = \frac{3}{5} \int x^5$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} x^6 = \frac{1}{10} x^6$$

b) $\int -\frac{3}{7} x^2 = -\frac{3}{7} \int x^2$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$\times \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right) = x^2$$

$$= -\frac{3}{7} \times \frac{1}{3} x^3$$

$$= -\frac{1}{7} x^3$$

-1/7 x^3

b) $\int -\frac{3}{7}x^2 = -\frac{3}{7}\int x^2$

$(x^3)' = 3x^2$ $\quad = -\frac{3}{7} \times \frac{1}{3}x^3$

$\times\frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{3}x^3\right) = x^2$ $\quad = -\frac{1}{7}x^3$ $\quad$ -1/7 x^3

c) $\int -\frac{7}{5x^4} = \int -\frac{7}{5}x^{-4}$ $\qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$(x^{-3}) = -3x^{-4}$ $\quad = -\frac{7}{5}\int x^{-4}$ $\qquad (x^n)' = nx^{n-1}$

$\times\frac{-1}{3}$

$\left(-\frac{1}{3}x^{-3}\right) = x^{-4}$ $\quad = -\frac{7}{5} \times \frac{-1}{3}x^{-3}$

c) $\int -\frac{7}{5x^4} = \int -\frac{7}{5} x^{-4}$

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$(x^{-3}) = -3x^{-4}$

$= -\frac{7}{5}\int x^{-4}$

$(x^n)' = n x^{n-1}$

$\times -\frac{1}{3}$

$\left(-\frac{1}{3}x^{-3}\right) = x^{-4}$

$= -\frac{7}{5} \times \frac{-1}{3} x^{-3}$

$= -\frac{7}{15} x^{-3}$

EXOID 403

EXOID 404

$= -\frac{7}{15x^3}$

$-\frac{7}{15}/(x^{\wedge}3)$

PRIMITIVE_FCT_REFERENCES0
PRIMITIVE_FCT_REFERENCES1

Sans calculatrice

Exercice 1: revoir la fonction dérivée de x^n

1) La dérivée de la fonction $f_1 : x \mapsto \frac{11}{20}x^4$ est $f_1' : x \mapsto$ [?/?*x^?] Sou

2) La dérivée de la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{5}{28x^4}$ est $f_2' : x \mapsto$ [?/(?x^?)] Sou

Exercice 2: primitive d'une fonction de x^n

1) Une primitive de la fonction $g_1 : x \mapsto \frac{3}{5}x^3$ est $G_1 : x \mapsto$ [?/?*x^?] Sou +k où k est un réel.

2) Une primitive de la fonction $g_2 : x \mapsto -\frac{1}{x^5}$ est $g_2 : x \mapsto$ [?/(?x^?)] Sou +k où k est un réel.

1 Équations différentielles et primitives

$f : x \longmapsto f(x)$
$y : x \longmapsto f(x)$

Définition Équation différentielle

- Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue y de la variable x, ses dérivées successives $y', y'', \dots$ et éventuellement d'autres fonctions (constantes, $f \dots$).
- On appelle **solution d'une équation différentielle** toute fonction dérivable vérifiant l'égalité.

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.

Exemples avec la fonction exponentielle

a) La fonction $y_1 : x \longmapsto e^x$ est une solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$

$y = e^x$

$y' = e^x$

$y' = y$

$y' - y = 0$

Exemples avec la fonction exponentielle

a) La fonction $y_1 : x \longmapsto e^x$ est une solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$

En effet $y_1(x) = e^x$

$y_1'(x) = [e^x]' = e^x$

$\underbrace{\forall x \in \mathbb{R}}_{\text{Pour tout}}$, $y_1'(x) - y_1(x) = e^x - e^x = 0$

$\boxed{y_1' - y_1 = 0}$ (abusive)

b) La fonction $y_2 : x \longmapsto e^{2x} + 4$

est une solution de l'équation différentielle

$2 \times (e^{2x} + 4)$

$2e^{2x} + 8$

-8

$y_2 = e^{2x} + 4$

$y_2' = 2e^{2x}$

$$\boxed{y' = 2y - 8}$$

$2y_2 = 2e^{2x} + 8$

$2y_2 = y_2' + 8$

$y_2' = 2y_2 - 8$

$[e^u]' = u'e^u$

$[e^{kx}]' = ke^{kx}$

$(v \circ u)' = u' \times v'(u)$

Exercice 1

1) Soit y la fonction définie par $y(x) = -3e^{2x} + 4$.
La fonction y est solution de l'équation différentielle $y' =$ 2*y-8

2) Soit y la fonction définie par $y(x) = -5e^{4x} - 1$.
La fonction y est solution de l'équation différentielle $y' =$ 4*y+4

3) Soit y la fonction définie par $y(x) = -2 - 4e^{-x}$.
La fonction y est solution de l'équation différentielle $y' =$ -1*y+2

$y = -4e^{-x} - 2$

$y' = 4e^{-x}$

$y' = -$

EQUADIFF0
EQUADIFF0a

Définition Primitive d'une fonction

$f \underset{\text{primitive}}{\overset{\text{dérivée}}{\rightleftarrows}} f'$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I réel.

On appelle primitive de la fonction f sur I toute fonction solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Ainsi, une fonction F est une primitive de f sur I lorsque, pour tout x de I, on a $F'(x) = f(x)$.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x)=k, k\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}^*$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$	$f'(x)=\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

https://www.piger-lesmaths.fr/tableau-de-derivees-usuelles/

Notation

$f \to f'$: dérivée.

$f \to F$: primitive.

$F = \int f$

Exemple 1 : $f(x) = \frac{3}{4} x^2$

$F(x) = \int f(x) = \frac{3}{4} \int x^2$

$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} x^3$

$= \frac{1}{4} x^3$

$x^3 \to 3x^2$

$\times\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}x^3 \to x^2$

Propriétés Primitives de fonctions usuelles

Fonction f	Intervalle de définition	Primitive F
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$, avec k réel
$f(x) = x^n$, n entier relatif sauf -1	$\mathbb{R}$ si n entier naturel $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ si n entier négatif non nul sauf -1.	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$, avec k réel
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$, avec k réel
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x + k$, avec k réel
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$	$F(x) = \ln x + k$, avec k réel
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x) + k$, avec k réel
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x) + k$, avec k réel

lles/

Notation

f' : dérivée.

f

F : primitive.

Exemple 1 $f(x) = \frac{3}{4}x^2$

$F(x) = \int f(x) = \frac{3}{4}\int x^2$

$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}x^3$

$= \frac{1}{4}x^3$

$x^3 \to 3x^2$

$\times\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}x^3 \to x^2$

⚠ On verra + tard domaines de définition et de dérivabilité

Exemple 2 $f(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$

$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\sqrt{x} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\times 2$

$2\sqrt{x} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$

$F(x) = \int f(x) = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{4} \times 2\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

"lles/ ... 4"

<u>Exemple 2</u>

$f(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$

$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$

⚠ On verra + tard domaines de définition et de dérivabilité

$\sqrt{x} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\times 2$

$2\sqrt{x} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$

$F(x) = \int f(x) = \frac{3}{4} \int \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{4} \times 2\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

2 Existence et calcul de primitives

Théorème Existence de primitives

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

2 Existence et calcul de primitives

Théorème Existence de primitives

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Remarque : Une fonction continue admet une infinité de primitives.

En effet, $f : x \longmapsto x^2$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x^3 & \longrightarrow & 3x^2 \\ \frac{1}{3}x^3 & \longleftarrow & x^2 \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} F : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 \\ F_1 : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + 1 \\ F_{2,5} : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + 2,5 \\ F_\pi : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + \pi \\ F_{\sqrt{2}} \dots \\ F_{-5} : \dots \end{array}\right\}$$

sont des primitives de f.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x^3 & \longrightarrow & 3x^2 \\ \frac{1}{3}x^3 & \longleftarrow & x^2 \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} F : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 \\ F_1 : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + 1 \\ F_{2,5} : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + 2,5 \\ F_\pi : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + \pi \\ F_{\sqrt{2}} \ldots\ldots \\ F_{-5} : \ldots \end{array}\right\} \text{sont des primitives de } f.$$

Laquelle choisir ?

$$\boxed{\int x^2 = \frac{1}{3}x^3 + K}$$

Pour cela, on fixe une condition initiale.

Ici, par exemple, on fixe $F(0) = 4$

Laquelle choisir ?

$$\boxed{\int x^2 = \frac{1}{3}x^3 + K}$$

Pour cela, on fixe une condition initiale.

Ici, par exemple, on fixe $F(0) = 4$

Les primitives de $f : x \mapsto x^2$ sont les fonctions $F_K : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + K$ où $K \in \mathbb{R}$

Donc $F(0) = 4 \iff \frac{1}{3} \times 0^3 + K = 4$

$\iff K = 4$

Les primitives de $f : x \longmapsto x^2$ sont les fonction $F_K : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + K$ où $K \in \mathbb{R}$

Donc $F(0) = 4 \iff \frac{1}{3} \times 0^3 + K = 4$

$\iff K = 4$

La primitive F de $f : x \longmapsto x^2$ telle que $F(0) = 4$ est $F : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + 4$

PRIMITIVE_COND_INI1
PRIMITIVE_COND_INI2

Dérivée des fonctions composées :

$$\boxed{\begin{aligned} (\sqrt{u})' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}} \\ \left(\frac{1}{u}\right)' &= -\frac{u'}{u^2} \\ (\ln u)' &= \frac{u'}{u} \\ (u^n)' &= n u' u^{n-1} \\ (e^u)' &= u' e^u \end{aligned}}$$

Exercice 1

$$f(x) = \frac{30}{7}(2x-3)^4$$

Rappel :

$$(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$$

$$\Big[(\underbrace{2x-3}_{u})^5\Big]' = 5 \times \underbrace{2}_{u'} \times (2x-3)^4$$

$$= 10(2x-3)^4$$

$$\times \frac{1}{10}$$

$$\left[\frac{1}{10}(2x-3)^5\right]' = (2x-3)^4$$

Exercice

On notera e^x par "exp(x)", $\sqrt{x}$ par "sqrt(x)" ou "rac(x)" et x^2 par "x^2".

1) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\frac{30}{7}(2x-3)^4$ sont de la forme

F(x)= ____________ Sol +k

2) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\frac{-125}{7}(-5x-2)^4$ sont de la forme

F(x)= ____________ Sol +k

PRIMITIVES_PUISSANCES1

Exercice 1

$$f(x) = \frac{30}{7}(2x-3)^4$$

$$\left[(\underbrace{2x-3}_{u})^5\right]' = 5 \times \underbrace{2}_{u'} \times (2x-3)^4$$

$$= 10(2x-3)^4$$

$$\times \frac{1}{10}$$

$$\left[\frac{1}{10}(2x-3)^5\right]' = (2x-3)^4$$

$$F(x) = \int \frac{30}{7}(2x-3)^4$$

$$= \frac{30}{7}\int (2x-3)^4$$

$$= \frac{30}{7}\left(\frac{1}{10}(2x-3)^5 + k\right)$$

$$= \frac{30}{7} \times \frac{1}{10}(2x-3)^5 + \frac{30}{7}k$$

$$= \boxed{\frac{3}{7}(2x-3)^5} + k_0$$

PRIMITIVES_PUISSANCES1

Exercice 2

a) $f(x) = \dfrac{8}{(\underbrace{-8x+4}_{u})^2}$

$$\left(\frac{1}{\underbrace{-8x+4}_{u}}\right)' = -\frac{-8 \quad u'}{(-8x+4)^2}$$

$$= \frac{8}{(-8x+4)^2}$$

$$\int f = \frac{1}{-8x+4} + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Rappel :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

oit f la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{32}{(-4x-8)^2}$.

es primitives de f sont les fonctions $F : x \mapsto \dfrac{?}{-4x-8}$ où ?= ____ ?

EXOID 411
EXOID 412

PRIMITIVE_PUISSANCES2

Exercice 3

a) $f(x) = \dfrac{-68x+68}{22(\underbrace{2x^2-4x}_{u})^2}$

$\left(\dfrac{1}{2x^2-4x}\right)' = -\dfrac{4x-4}{(2x^2-4x)^2}$

$= \boxed{\dfrac{-4x+4}{(2x^2-4x)^2}}$

$\dfrac{17}{22} \times \dfrac{1}{2x^2-4x}$

$\times \dfrac{1}{22} \times \dfrac{68}{4}$

$\times \dfrac{17}{22}$

$\left(\dfrac{17/22}{2x^2-4x}\right)' = \dfrac{-68x+68}{22(2x^2-4x)^2}$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

$(x^{-1})' = -1\,x^{-2}$

$= -\dfrac{1}{x^2}$

PRIMITIVES_INVERSE1

On notera e^x par "exp(x)", $\sqrt{x}$ par "sqrt(x)" ou "rac(x)" et x^2 par "x^2".

1) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\dfrac{-68x+68}{22(2x^2-4x)^2}$ sont de la forme

F(x)= ______ Sol +k

2) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\dfrac{10}{3(-2x-4)^2}$ sont de la forme

F(x)= ______ Sol +k

$$\left(\frac{1}{2x^2-4x}\right)' = -\frac{4x-4}{(2x^2-4x)^2}$$

$$= \boxed{\frac{-4x+4}{(2x^2-4x)^2}}$$

u

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(x^{-1})' = -1\, x^{-2}$

$= -\frac{1}{x^2}$

$\times \frac{1}{22} \times \frac{68}{4}$

$\times \frac{17}{22}$

$$\left(\frac{17/22}{2x^2-4x}\right)' = \frac{-68x+68}{22(2x^2-4x)^2}$$

PRIMITIVES_INVERSE1

On notera e^x par "exp(x)", $\sqrt{x}$ par "sqrt(x)" ou "rac(x)" et x^2 par "x^2".

1) Les primitives de la fonction f définie par $f(x) = \frac{-68x+68}{22(2x^2-4x)^2}$ sont de

F(x)= ________ Sol +k

2) Les primitives de la fonction f définie par $f(x) = \frac{10}{3(-2x-4)^2}$ sont de l

F(x)= ________ Sol +k

Donc $\int \frac{-68x+68}{22(2x^2-4x)^2} = \frac{17/22}{2x^2-4x} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$

(17/22)/(2x^2-4x)

1) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = ... $\overline{22(2x^2-4x)^2}$ sont de...

F(x)= ____ Sol +k

2) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\dfrac{10}{3(-2x-4)^2}$ sont de l...

F(x)= ____ Sol +k

$$\left(\frac{17/22}{2x^2-4x}\right)' = \frac{-68x+68}{22(2x^2-4x)^2} \qquad \times \frac{17}{22}$$

Donc $$\int \frac{-68x+68}{22(2x^2-4x)^2} = \frac{17/22}{2x^2-4x} + K \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

(17/22)/(2x^2-4x)

b) $$g(x) = \frac{10}{3(\underbrace{-2x-4}_{u})^2} \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{1}{-2x-4}\right)' = -\frac{-2}{(-2x-4)^2} = \frac{2}{(-2x-4)^2} \qquad \times \frac{5}{3}$$

$$\left(\frac{5/3}{-2x-4}\right)' \qquad \frac{10}{3(-2x-4)^2}$$

Exercice 4 (Exponentielle)

$$\left(e^{u}\right)' = u' e^{u}$$

① $f(x) = \dfrac{-35}{11} e^{-5x+4}$

$$\left(e^{-5x+4}\right)' = -5 \times e^{-5x+4}$$

$$\times \frac{1}{11} \times 7$$

$$\left(\frac{7}{11} e^{-5x+4}\right)' = \frac{-35}{11} e^{-5x+4}$$

PRIMITIVES_EXP1

On notera e^x par "exp(x)", $\sqrt{x}$ par "sqrt(x)" ou "rac(x)" et x^2 par "x^2".

1) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\dfrac{-35}{11}e^{-5x+4}$ sont de la forme

F(x)= 7/11 × exp(-5x+4) Sol +k

2) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\dfrac{55}{2}xe^{5x^2+4}$ sont de la forme

F(x)= Sol +k

① $f(x) = \dfrac{-35}{11} e^{-5x+4}$

$\left(e^{-5x+4}\right)' = -5 \times e^{-5x+4}$ $\Big) \times \dfrac{1}{11} \times 7$

$\left(\dfrac{7}{11} e^{-5x+4}\right)' = \dfrac{-35}{11} e^{-5x+4}$

$\int -\dfrac{35}{11} e^{-5x+4} = \dfrac{7}{11} e^{-5x+4} + K.$

PRIMITIVES_EXP1

On notera e^x par "exp(x)", $\sqrt{x}$ par "sqrt(x)" ou "ra

1) Les primitives de la fonction f définie par f(x) =

F(x)= 7/11 x exp(-5x+4)

2) Les primitives de la fonction f définie par f(x) =

② $g(x) = \dfrac{2}{3} x e^{3x^2-1}$

$\left(e^{3x^2-1}\right)' = 6x\, e^{3x^2-1}$ $\Big) \times \dfrac{1}{9}$ $\left(\times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{3}\right)$

$\left(\dfrac{1}{9} e^{3x^2-1}\right)' = \dfrac{2}{3} x\, e^{3x^2-1}$

② $g(x) = \frac{2}{3} x e^{3x^2-1}$

$$\left(e^{3x^2-1}\right)' = 6x e^{3x^2-1}$$

$$\left(\boxed{\frac{1}{9} e^{3x^2-1}}\right)' = \frac{2}{3} x e^{3x^2-1} \quad \times \frac{1}{9}$$

$$\int g(x) = \boxed{\frac{1}{9} e^{3x^2-1} + K}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Exercice 5

$$f(x) = \frac{-9}{5(3x+2)}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$\left[\ln(3x+2)\right]' = \frac{3}{3x+2}$$

$$\times \frac{-3}{5}$$

$$\boxed{\left[-\frac{3}{5}\ln(3x+2)\right]'} = \frac{-9}{5(3x+2)}$$

$$\boxed{\int \frac{-9}{5(3x+2)} = -\frac{3}{5}\ln(3x+2) + K}$$

PRIMITIVES_LN1

Exercice

On notera e^x par "exp(x)", $\sqrt{x}$ par "sqrt(x)" ou "rac(x)", lnx par "ln(x)" et x^2 par "x^2".

1) Les primitives de la fonction f définie par $f(x) = \frac{-9}{2(-3x+3)}$ sont de la forme

F(x)= ______ Sol +k

2) Les primitives de la fonction f définie par $f(x) = \frac{9}{5(3x+2)}$ sont de la forme

F(x)= ______ Sol +k

Exercice 5

$$f(x) = \frac{-9}{5(3x+2)}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$f(x) = \frac{-9}{5} \times \frac{1}{3x+2}$$

$$[\ln(3x+2)]' = \frac{3}{3x+2}$$

$$\times \frac{-3}{5}$$

$$\boxed{\left[-\frac{3}{5}\ln(3x+2)\right]'} = \frac{-9}{5(3x+2)}$$

PRIMITIVES_LN1

Exercice

On notera e^x par "exp(x)", $\sqrt{x}$ par "sqrt(x)" ou "rac(x)", $ln x$ par "ln(x)" et x^2 par "x^2".

1) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\dfrac{-9}{2(-3x+3)}$ sont de la forme

F(x)= ______ Sol +k

2) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\dfrac{9}{5(3x+2)}$ sont de la forme

F(x)= ______ Sol +k

Exercice 7

$$(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$$

$$f(x) = -196\left(-7x + \frac{3}{4}\right)^6$$

$$\left[\left(-7x + \frac{3}{4}\right)^7\right]' = 7 \times (-7) \times \left(-7x + \frac{3}{4}\right)^6$$

$$= -49\left(-7x + \frac{3}{4}\right)^6$$

$$\times 4$$

$$\boxed{\left[4\left(-7x + \frac{3}{4}\right)^7\right]'} = -196\left(-7x + \frac{3}{4}\right)^6$$

$$\int f(x) = 4\left(-7x + \frac{3}{4}\right)^7$$

EXOID 413
EXOID 414
EXOID 415

PRIMITIVE_PUISSANCE1
PRIMITIVE_PUISSANCE2

Exercice

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto -196\left(-7x + \frac{3}{4}\right)^6$.

Les primitives de f sont les fonctions $F : x \mapsto$ [4] Sou $\left(-7x + \frac{3}{4}\right)^7 + k$ (avec k réel).

PRIMITIVES_PUISSANCES1

PRIMITIVES_INVERSE1

PRIMITIVES_EXP1

PRIMITIVES_LN1

PRIMITIVE_INVERSE0

PRIMITIVES_SYNTHESE0
PRIMITIVES_SYNTHESE0a
PRIMITIVES_SYNTHESE0b

PRIMITIVES_SYNTHESE1(en dvt)

Exercice 8

$$f(x) = \frac{-25}{14\sqrt{-5x-3}}$$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\left(\sqrt{-5x-3}\right)' = \frac{-5}{2\sqrt{-5x-3}}$$

$$\times \frac{2}{5} \times \frac{25}{14}$$

$$//$$

$$\times \frac{5}{7}$$

$$\left(\frac{5}{7}\sqrt{-5x-3}\right)' = \frac{-25}{14\sqrt{-5x-3}}$$

Primitives: $\sqrt{u}$

CHRONOMETRE

Exercice

On notera e^x par "exp(x)", $\sqrt{x}$ par "sqrt(x)" ou "rac(x)" et x^2 par "x^2".

1) Les primitives de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-25}{14\sqrt{-5x-3}}$ sont de la forme

F(x)= ________ Sol +k

2) Les primitives de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-6}{11\sqrt{-4x-4}}$ sont de la forme

F(x)= ________ Sol +k

PRIMITIVE_RACINES1

3 Résolution des équations différentielles

$y' = ay$

Théorème Ensemble des solutions d'une équation $y' = ay$, solution avec condition initiale

f :

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$, avec K réel.

$x \mapsto Ke^{ax}$

Pour tous x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution prenant en x_0 la valeur y_0, c'est-à-dire telle que $f(x_0) = y_0$. et f solution de $y' = af$ ($f' = af$)

Application : Trouver la fonction f solution de l'équation différentielle $y' = -5y$ et vérifiant la condition initiale $f(0) = 4$

Application : Trouver la fonction f solution de l'équation différentielle $y' = -5y$ et vérifiant la condition initiale $f(0) = 4$

- Remarque : La solution Ke^{ax} est appelée solution générale

Application : Trouver la fonction f solution de l'équation différentielle $y' = \overset{a}{-5}\, y$ et vérifiant la condition initiale $f(0) = 4$

$$y' = a y \iff y = k e^{ax}$$

K constante

Correction :

- D'après le cours f est de la forme $f : x \longmapsto K e^{-5x}$ où $K \in \mathbb{R}$
- De plus $f(0) = 4 \iff K e^{-5\times 0} = 4$

$$\iff K \times e^{0} = 4 \qquad e^{0} = 1$$

$$\iff K = 4$$

Donc $\boxed{f : x \mapsto 4 e^{-5x}}$

$$y' = ay \iff y = ke^{ax}$$

Correction : D'après le cours f est de la forme $f : x \longmapsto Ke^{-5x}$ où $K \in \mathbb{R}$

De plus $f(0) = 4 \iff Ke^{-5\times 0} = 4$

$\iff K \times e^{0} = 4$

$\iff K = 4$

Donc $\boxed{f : x \mapsto 4e^{-5x}}$

Exercice

L'unique solution f de l'équation différentielle $4y' - 16y = 0$ telle que $f(-3) = e^{-2}$ est $f : x \mapsto$ exp(?+?x)

$y' = ay$

$4y' - 16y = 0 \iff 4y' = 16y$

Normalisation de l'équa diff.

$\iff y' = 4y$ $a = 4$

D'après le cours les solutions sont de la forme Ke^{4x}

Exercice

$y' = ay$

L'unique solution f de l'équation différentielle $4y' - 16y = 0$ telle que $f(-3) = e^{-2}$ est $f : x \mapsto$ exp(?+?x)

$4y' - 16y = 0 \iff 4y' = 16y$

$\iff y' = 4y \qquad a = 4$

D'après le cours les solutions sont de la forme Ke^{4x}

$f(-3) = e^{-2} \iff Ke^{4\times(-3)} = e^{-2} \iff Ke^{-12} = e^{-2}$

$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$\iff K = \frac{e^{-2}}{e^{-12}} = e^{-2-(-12)} = e^{10}$

Conclusion : $f(x) = Ke^{4x} = e^{10} e^{4x} = e^{10+4x}$

$e^a \times e^b = e^{a+b}$

EQUADIFF1.html
EQUADIFF1a.html

Rappel : a) $y' = a y \iff y = K e^{a x}$ $(K \in \mathbb{R})$

Exemple $y' = \frac{2}{3} y$

$\iff y = K e^{\frac{2}{3} x}$ $(K \in \mathbb{R})$

On détermine K par une condition initiale $y(x_0) = y_0$

b) $y' = a y + b \iff y = ?$

b) $y' = ay + b \iff y = ?$

Propriété

2 solutions f et g $\begin{cases} f' = af + b & (E_1) \\ g' = ag + b & (E_2) \end{cases}$

$\Rightarrow f' - g' = a(f - g)$ $(E_1) - (E_2)$

$af - ag$

$\Rightarrow \underbrace{(f - g)'}_{y'} = a \underbrace{(f - g)}_{y}$ $\boxed{y = f - g}$

$y' = ay$

$\Rightarrow y = Ke^{ax}$ $\Rightarrow f - g = Ke^{ax}$ $(K \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow f = Ke^{ax} + g$ $(K \in \mathbb{R})$

Il suffit de trouver une fonction g solution de $y' = ay + b$ pour trouver toutes les autres.

$\Rightarrow f - g = Ke^{ax} \quad (K \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow f = Ke^{ax} + g \quad (K \in \mathbb{R})$

Il suffit de trouver une fonction g solution pour trouver toutes les autres.

La fonction la plus simple est la fonction constante.

Soit $g : x \longmapsto c$ $(c \in \mathbb{R})$ / $g'(x) = 0$

$y' = ay + b$

$g' = ag + b \iff 0 = a\overset{c}{g} + b$

$\iff \boxed{g(x) = \frac{-b}{a}}$ $\qquad c = -\frac{b}{a}$

g est une solution particulière

Toutes les fonctions solutions sont

$$\boxed{f(x) = Ke^{ax} + \frac{-b}{a}}$$

g est appelée solution PARTICULIERE
f est appelée solution GENERALE

La fonction la plus simple est la fonction constante.

Soit $g : x \longmapsto c$ $(c \in \mathbb{R})$, $g'(x) = 0$

$y' = ay + b$

$g' = ag + b \iff 0 = ag + b$

$\iff \boxed{g(x) = \frac{-b}{a}}$ $\quad c = -\frac{b}{a}$

Toutes les fonctions solutions sont

$$\boxed{f(x) = K e^{ax} + \frac{-b}{a}}$$

g est appelée solution PARTICULIERE

f est appelée solution GENERALE

Exercice

$y' = ay + b$

On considère l'équation différentielle (E): $2y' = 8y + 24$.

1) La fonction constante solution de (E) est la fonction $g : x \mapsto$ [?]

2) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc de la forme $f_K : x \mapsto$ [?+K*exp(?*x)] où K est une constante réelle.

3) L'unique solution telle que $f(-1) = -1$ est la fonction f_K telle que K= [?*exp(?)]

Exercice

$y' = ay + b$

$(-3)' = 4\times(-3) + 12$ $\quad 0 = 0$

$y' = 4y + 12$

$y' = ay + b$

On considère l'équation différentielle (E): $2y' = 8y + 24$.

1) La fonction constante solution de (E) est la fonction $g : x \mapsto$ [-3]

2) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc de la forme $f_K : x \mapsto$ [?+K*exp(?*x)] où K est une constante réelle.

3) L'unique solution telle que $f(-1) = -1$ est la fonction f_K telle que K= [?*exp(?)]

① Soit g fonction constante solution de (E)

$2g' = 8g + 24$

$0 = 8g + 24$

$g = \frac{-24}{8}$

$g = -3$

② Les solutions sont

$f_K(x) = Ke^{ax} + g$

$\underline{a = ?}$ $\quad y' = ay + b$

$2y' = 8y + 24 \quad \div 2$

$y' = 4y + 12$

$a = 4$

2) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc de la forme $f_K : x \mapsto$?+K*exp(?*x) où K est une constante réelle.

3) L'unique solution telle que $f(-1) = -1$ est la fonction f_K telle que K= ?*exp(?)

① Soit g fonction constante solution de (E)

$$2g' = 8g + 24$$
$$0 = 8g + 24$$
$$g = \frac{-24}{8}$$
$$g = -3$$

② Les solutions sont

$$f_K(x) = Ke^{ax} + g$$

$\underline{a = ?}$ $y' = a y + b$

$$2y' = 8y + 24 \quad \div 2$$
$$y' = 4y + 12$$

$a = 4$

$$f_K(x) = g + Ke^{ax}$$

$$\boxed{f_K(x) = -3 + Ke^{4x}}$$

① Soit g fonction constante solution de (E)

$$2g' = 8g + 24$$
$$0 = 8g + 24$$
$$g = \frac{-24}{8}$$
$$g = -3$$

② Les solutions sont

$$f_k(x) = ke^{ax} + g$$

$\underline{a = ?}$ $y' = a y + b$

$$\left.\begin{aligned} 2y' &= 8y + 24 \\ y' &= 4y + 12 \end{aligned}\right\} \div 2$$

$a = 4$

$$f_k(x) = g + ke^{ax}$$

$$\boxed{f_k(x) = -3 + ke^{4x}}$$

③ Quelle est La solution telle que $f(-1) = -1$?

$$f(-1) = -1 \iff -3 + ke^{4\times 1} = -1$$

EXOID 421 EQUADIFF1 EQUADIFF1
EXOID 422 EQUADIFF1a EQUADIFF1a
EXOID 423 EQUADIFF2 EQUADIFF2
EXOID 424 EQUADIFF2a EQUADIFF2a

$$f_k(x) = g + K e^{ax}$$

$$\boxed{f_k(x) = -3 + K e^{4x}}$$

③ Quelle est La solution telle que $f(-1) = -1$?

$$f(-1) = -1 \iff -3 + k e^{4\times(-1)} = -1$$

$$\iff k e^{-4} = 2$$

$$\iff K = \frac{2}{e^{-4}} = \boxed{2e^4}$$

$? * \exp(?)$

$$f(x) = -3 + 2e^4 \times e^{4x}$$

$$f(x) = -3 + 2e^{4+4x}$$

EQUADIFF2
EQUADIFF2a

3 Résolution des équations différentielles

Théorème Ensemble des solutions d'une équation $y' = ay$, solution avec condition initiale

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$, avec K réel.
unicité

Pour tous x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution prenant en x_0 la valeur y_0, c'est-à-dire telle que $f(x_0) = y_0$.

Preuves: $y' = ay$ (2) $\iff$ $y : x \mapsto Ke^{ax}$ (1) avec $K \in \mathbb{R}$

$(e^u)' = u'e^u$; $(e^{ax})' = ae^{ax}$

a) (1) $\Rightarrow$ (2)

SYNTHESE	ANALYSE
Soit $g : x \mapsto Ke^{ax}$, $K \in \mathbb{R}$ On a $g' : x \mapsto Kae^{ax}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = a \times g(x)$ g est solution de l'equation différentielle	$g' = ag$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = a \times g(x)$

b) (2) $\Rightarrow$ (1) $\quad \underbrace{y' = ay}_{(2)} \iff \underbrace{y : x \mapsto K e^{ax}}_{(1)}$ avec $K \in \mathbb{R}$

$(e^{-ax})' = -a \times e^{-ax}$ $\qquad (u \times v)' = u'v + uv'$

SYNTHESE

g est solution de l'équation différentielle : $y' = ay$

Soit K la fonction définie par $K : x \mapsto g(x) \times e^{-ax}$

On a

$$K'(x) = \underbrace{g'(x)}_{u'} \times \underbrace{e^{-ax}}_{v} + \underbrace{g(x)}_{u} \times \underbrace{(-a e^{-ax})}_{v'}$$

$$K'(x) = \underbrace{a \times g(x)}_{g' = ag} \times e^{-ax} - a \times g(x) \times e^{-ax}$$

$K'(x) = 0$ donc K constante

Donc $K(x) = \dfrac{K}{e^{-ax}} = g(x) \times \dfrac{e^{-ax}}{e^{-ax}}$, $\boxed{g(x) = K e^{ax}}$

$\downarrow$

$K \times e^{ax}$

ANALYSE

Il existe un réel K tel que g est de la forme

$g : x \mapsto K \times e^{ax}$

C'est à dire :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = K e^{ax}$

" " $K(x) = \dfrac{g(x)}{e^{ax}}$

" " $K = g(x) \times e^{-ax}$

$\Rightarrow$ K est un réel donc ne dépend pas de x

$\Rightarrow$ K est une fonction constante

$\Rightarrow$ $K' = 0$

!

☐97 : Nom de l'exercice:EQUADIFF1; DESCRIPTION: EQUADIFF1
☐98 : Nom de l'exercice:EQUADIFF2; DESCRIPTION: EQUADIFF2

Exercice

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto -\frac{21}{4}\left(-\frac{7}{8}x-5\right)^2$.

Les primitives de f sont les fonctions $F : x \mapsto$ [ ] ? $\left(-\frac{7}{8}x-5\right)^3 + k$ (avec k réel).

EXOID 92 PRIMITIVE_PUISSANCE1 PRIMITIVE_PUISSANCE1
EXOID 93 PRIMITIVE_PUISSANCE2 PRIMITIVE_PUISSANCE2

$$y' = ay + b \quad \Longleftrightarrow \quad y = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

(2) (1)

Os (1) $\Rightarrow$ (2)

SYNTHESE	ANALYSE
$y = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$ $y' = Kae^{ax}$ membre de gauche $ay+b = a\left(Ke^{ax} - \frac{b}{a}\right) + b$ membre de droite $= Kae^{ax} - b + b$ $= Kae^{ax}$ Donc $y' = ay + b$	$y' = \underbrace{ay + b}$? ? ? $=$ Calculer les deux membres et verifier l'égalité

b) ② $\Rightarrow$ ①

$$\frac{\cancel{a}}{1} \times \frac{b}{\cancel{a}} = b$$

SYNTHESE

$$y' = ay + b$$

Soit g la fonction définie par $g : x \mapsto y(x) + \frac{b}{a}$

$$g(x) = y + \frac{b}{a} \Rightarrow ag = \boxed{ag + b}$$

$$g'(x) = y' = \boxed{ay + b}$$

Donc $g' = ag$ d'où (d'après le théorème précédent

$$g = Ke^{ax} \quad (K \in \mathbb{R})$$

$$y + \frac{b}{a} = Ke^{ax} \quad (K \in \mathbb{R})$$

$$y = Ke^{ax} - \frac{b}{a} \quad (K \in \mathbb{R})$$

ANALYSE

$$y = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

D'autres formes ???

$$g = y + \frac{b}{a} = Ke^{ax}$$

Les solutions de $y' = ay$

Montrons que $g' = ag$

Théorème Ensemble des solutions d'une équation $y' = ay$, solution avec condition initiale

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$, avec K réel.

Théorème **Ensemble des solutions d'une équation $y' = ay + b$, solution avec condition initiale**

Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a est un réel non nul et b un réel ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{ax} - \frac{b}{a}$, avec K réel. Pour tous x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution prenant en x_0 la valeur y_0, c'est-à-dire telle que $f(x_0) = y_0$.

Preuve "réalisée"

→ Problématique

- Équation différentielle
  - variable
  - fonction
  - Lien entre une fonction et ses dérivée !
- Liens avec le réel

Preuve "oralisée"

→ Problématique

- Equation différentielle
  - variable
  - fonction
  - Lien entre une fonction et ses dérivée !
- Liens avec le réel

→ Preuve formalisée

JUSTIFIER

- Formalisation
- "Sens commun"

Théorème Ensemble des solutions d'une équation $y' = ay + b$, solution avec condition initiale

Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a est un réel non nul et b un réel ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{ax} - \frac{b}{a}$, avec K réel. Pour tous x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution prenant en x_0 la valeur y_0, c'est-à-dire telle que $f(x_0) = y_0$.

$$y' = ay + b \iff y = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

équivalence

Si alors ×2

I Si $y : x \longmapsto Ke^{ax} - \frac{b}{a}$ alors $y' = ay + b$

II Si $y' = ay + b$ alors y est de la forme $y(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$

Conclusion • équation à variable réelle

→ ensemble de nombre

• équation différentielle

→ famille de fonctions (cf geogebra, K variable)

• Ordre d'une "equadiff"

Démonstration

On vérifie facilement que toute fonction de la forme $x \mapsto Ke^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $K \in \mathbb{R}$, est solution.

Réciproquement, il faut prouver que toutes les solutions sont de cette forme.

Nous savons que la fonction constante c : $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution particulière, $c'(x) = a \times c(x) + b$. (1)

Considérons g une solution de l'équation $y' = ay + b$, on a alors, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = a \times g(x) + b$. (2)
Par soustraction de (2) et (1), on obtient $g'(x) - c'(x) = a \times (g(x) - c(x))$, soit $(g(x) - c(x))' = a \times (g(x) - c(x))$.
Ainsi, la fonction $g - c$ est solution de l'équation $y' = ay$, donc de la forme Ke^{ax}, ce qui entraîne :

$g(x) - c(x) = Ke^{ax}$, soit $(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $K \in \mathbb{R}$.

Méthode 8

Étudier une fonction solution d'une équation $y' = ay + b$

Cours 3 p. 210

Énoncé

Algo

On considère l'équation différentielle $2y' - 5y = 0$.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Déterminer la solution f telle que $f(1) = \mathrm{e}$.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x) = 20$.
6. Résoudre l'inéquation $f(x) > 40$.
7. Écrire un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle valeur entière positive de x on a $f(x) > 10\,000$.

Pour Mardi 13 lire Méthode 8
Chapitre "Primitive et équa diff"

Exercice 8

Soit $f(x) = \dfrac{-3x-5}{x^2+4x+3}$

$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(u^n)' = n u' u^{n-1}$

$(e^u)' = u' e^u$

1. Trouver a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3}$$

On a $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+3}$

$$\Longleftrightarrow \frac{-3x-5}{x^2+4x+3} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3}$$

On a $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+3}$

$$\iff \frac{-3x-5}{x^2+4x+3} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3}$$

$$\iff \frac{-3x-5}{x^2+4x+3} = \frac{a \times (x+3)}{(x+1)\times(x+3)} + \frac{b \times (x+1)}{(x+3)\times(x+1)}$$

$x^2+3x+x+3$

$$\iff \frac{-3x-5}{x^2+4x+3} = \frac{ax+3a+bx+b}{x^2+4x+3}$$

$$\iff \frac{-3x-5}{x^2+4x+3} = \frac{(a+b)x+(3a+b)}{x^2+4x+3}$$

$$\iff \frac{-3x-5}{x^2+4x+3} = \frac{a\times(x+3)}{(x+1)\times(x+3)} + \frac{b\times(x+1)}{(x+3)\times(x+1)}$$

$x^2+3x+x+3$

$$\iff \frac{-3x-5}{x^2+4x+3} = \frac{ax+3a+bx+b}{x^2+4x+3}$$

$$\iff \frac{-3x-5}{x^2+4x+3} = \frac{(a+b)x+(3a+b)}{x^2+4x+3}$$

$\triangle$!

$P(x) = x^2+4x+3$

$P(x) = (x+1)(x+3)$

$a(x-x_1)(x-x_2)$

$\Delta = ---$

x_1 et x_2

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1;-3\}$

$\iff -3x-5 = (a+b)x+(3a+b)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

(on multiplie par P non nul sur D_f)

$$\iff \begin{cases} a+b=-3 \\ 3a+b=-5 \end{cases}$$

$$\iff \frac{-3x-5}{x^2+4x+3} = \frac{(a+b)x+(3a+b)}{x^2+4x+3}$$

$$\iff -3x-5 = (a+b)x+(3a+b) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(on multiplie par P non nul sur D_f)

⚠ $P(x) = x^2+4x+3$

$P(x) = (x+1)(x+3)$

$a(x-x_1)(x-x_2)$

$\Delta = \dots$

x_1 et x_2

$$\iff \begin{cases} a+b = -3 \quad \times(-3) \\ 3a+b = -5 \end{cases}$$

Pivot de Gauss

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; -3\}$

$$\iff \begin{cases} -3a-3b = 9 & (E_1) \\ 3a+b = -5 & (E_2) \end{cases} \iff \begin{cases} -3a-3b = 9 & (E_1) \\ -2b = 4 & (E_1+E_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3a-3\times(-2) = 9 \\ b = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

x_1 et x_2

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (a+b=-3)\times(-3) \\ 3a+b=-5 \end{cases}$$ Pivot de Gauss $\quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1;-3\}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -3a-3b=9 & (E_1) \\ 3a+b=-5 & (E_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -3a-3b=9 & (E_1) \\ -2b=4 & (E_1+E_2) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -3a-3\times(-2)=9 \\ b=-2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$$

Donc on a $f(x) = \dfrac{-1}{x+1} + \dfrac{-2}{x+3}$

② Calculer une primitive F de f :

$$F(x) = \int f = \int \frac{-1}{x+1} + \int \frac{-2}{x+3}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -3a - 3\times(-2) = 9 \\ b = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u^n)' = n u' u^{n-1}$$

Donc on a $f(x) = \dfrac{-1}{x+1} + \dfrac{-2}{x+3}$

② Calculer une primitive F de f :

$$F(x) = \int f = \int \frac{-1}{x+1} + \int \frac{-2}{x+3}$$

$u(x) = x+1$

$$[\ln(x+1)]' = \frac{1}{x+1}$$

$\times(-1)$

$$[-\ln(x+1)]' = \frac{-1}{x+1}$$

$u(x) = x+3$

$$[\ln(x+3)]' = \frac{1}{x+3}$$

$\times(-2)$

$$[-2\ln(x+1)]' = \frac{-2}{x+3}$$

② Calculer une primitive F de f :

$$F(x) = \int f = \int \frac{-1}{x+1} + \int \frac{-2}{x+3}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u^n)' = n u' u^{n-1}$$

$u(x) = x+1$

$$[\ln(x+1)]' = \frac{1}{x+1}$$

$\times(-1)$

$$[-\ln(x+1)]' = \frac{-1}{x+1}$$

$u(x) = x+3$

$$[\ln(x+3)]' = \frac{1}{x+3}$$

$\times(-2)$

$$[-2\ln(x+3)]' = \frac{-2}{x+3}$$

$$\boxed{F(x) = -\ln(x+1) - 2\ln(x+3)}$$

PRIMITIVE_FCT_RATIONNELLE1

Exercice

Soir f la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{-3x-5}{x^2+4x+3}$.

1) Déterminer, en résolvant un système d'équations les valeurs de a et b telle que $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+3}$

a= [ ] Sol et b= [ ] Sol

2) Les primitives de f sont donc de la forme [?*ln(x+?)-?*ln(x+?)] Sol

$$\frac{2}{5(3x-2)} \rightsquigarrow 2/(5(5x-2))$$

178 : Nom de l'exercice:PRIMITIVES_SYNTHESE0a; DESCRIPTION: PRIMITIVES_SYNTHESE0a

179 : Nom de l'exercice:PRIMITIVES_SYNTHESE0b; DESCRIPTION: PRIMITIVES_SYNTHESE0b

180 : Nom de l'exercice:PRIMITIVES_SYNTHESE1; DESCRIPTION: PRIMITIVES_SYNTHESE1

Revoir: CONVEXE1.html

Exercice

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \left(-2x^2 + 6x - 4\right) e^x$.

La dérivée seconde de f est f"(x)=(-2x^2-?x+? ?) e^x

D'ou le tableau de signe:

x	-∞	?		?	+∞
Signe de la dérivée seconde	?	0	?	0	?

On en déduit que la courbe représentative de f admet deux points d'inflexion dont les abscisses par ordre croissant sont:

? et ?

Complèter enfin le tableau suivant:

Sur l'intervalle	]-∞; ?]	[? ; ?]	[? ;+∞[
La fonction est	?	?	?

Exercice

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \left(-2x^2 + 6x - 4\right) e^x$.

On veut étudier sa convexité.

$f(x) = u \times v$ avec $u(x) = -2x^2 + 6x - 4 \Rightarrow u'(x) = -4x + 6$

$v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$

$f'(x) = u'v + uv' = (-4x+6) \times e^x + (-2x^2+6x-4) \times e^x$

$= e^x \left(-4x + 6 - 2x^2 + 6x - 4\right)$

$= e^x \left(-2x^2 + 2x + 2\right)$

$$f'(x) = u'v + uv' = (-4x+6) \times e^x + (-2x^2+6x-4) \times e^x$$
$$= e^x(-4x+6-2x^2+6x-4)$$
$$= e^x(-2x^2+2x+2)$$

$$f''(x) = (uv)' \quad \text{avec} \quad u(x) = -2x^2+2x+2 \Rightarrow u'(x) = -4x+2$$
$$v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$$
$$= u'v + uv'$$
$$= (-4x+2)e^x + (-2x^2+2x+2)e^x$$
$$= e^x(-4x+2-2x^2+2x+2)$$
$$= e^x(-2x^2-2x+4)$$

On cherche le signe de f''

$f''(x) = (uv)'$ avec $u(x) = -2x^2+2x+2 \Rightarrow u'(x) = -4x+2$

$= u'v + uv'$ $\quad v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$

$= (-4x+2)e^x + (-2x^2+2x+2)e^x$

$= e^x(-4x+2-2x^2+2x+2)$

$= e^x(-2x^2-2x+4)$ On cherche le signe de f''

Comme $e^x > 0$, le signe de f'' dépend uniquement du signe de $P(x) = -2x^2-2x+4$

$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times(-2)\times4 = 4+32 = 36$

$= e^x(-2x^2-2x+4)$ On cherche le signe de f''

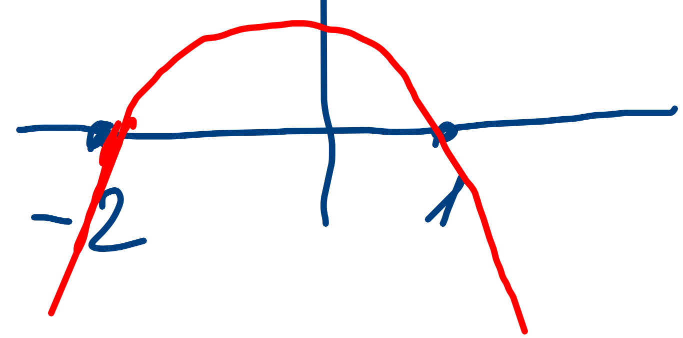
Comme $e^x > 0$, le signe de f'' dépend uniquement du signe de $P(x) = -2x^2-2x+4$

$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2 - 4\times(-2)\times 4 = 4+32 = 36$

$a = -2 < 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-6}{2\times(-2)} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+6}{2\times(-2)} = -2$$



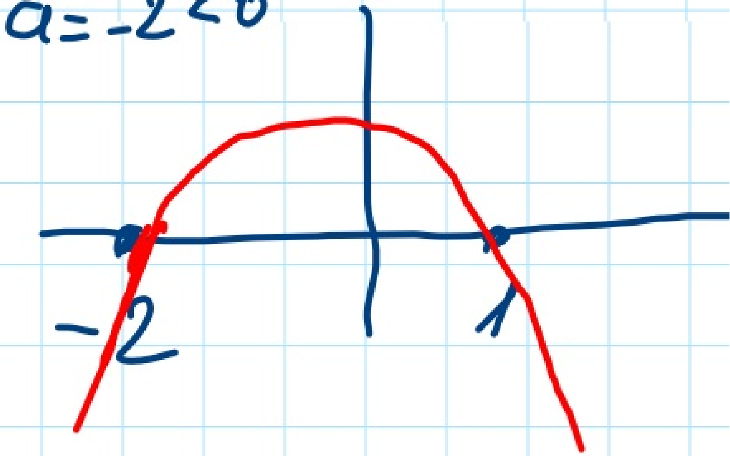
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de f''		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 4 = 4 + 32 = 36$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-6}{2\times(-2)} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+6}{2\times(-2)} = -2$$

$a = -2 < 0$



x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de f''		$-$	0	$+$	0	$-$	

Concave Convexe Concave

On a deux points d'inflexion aux abscisses : -2 et 1

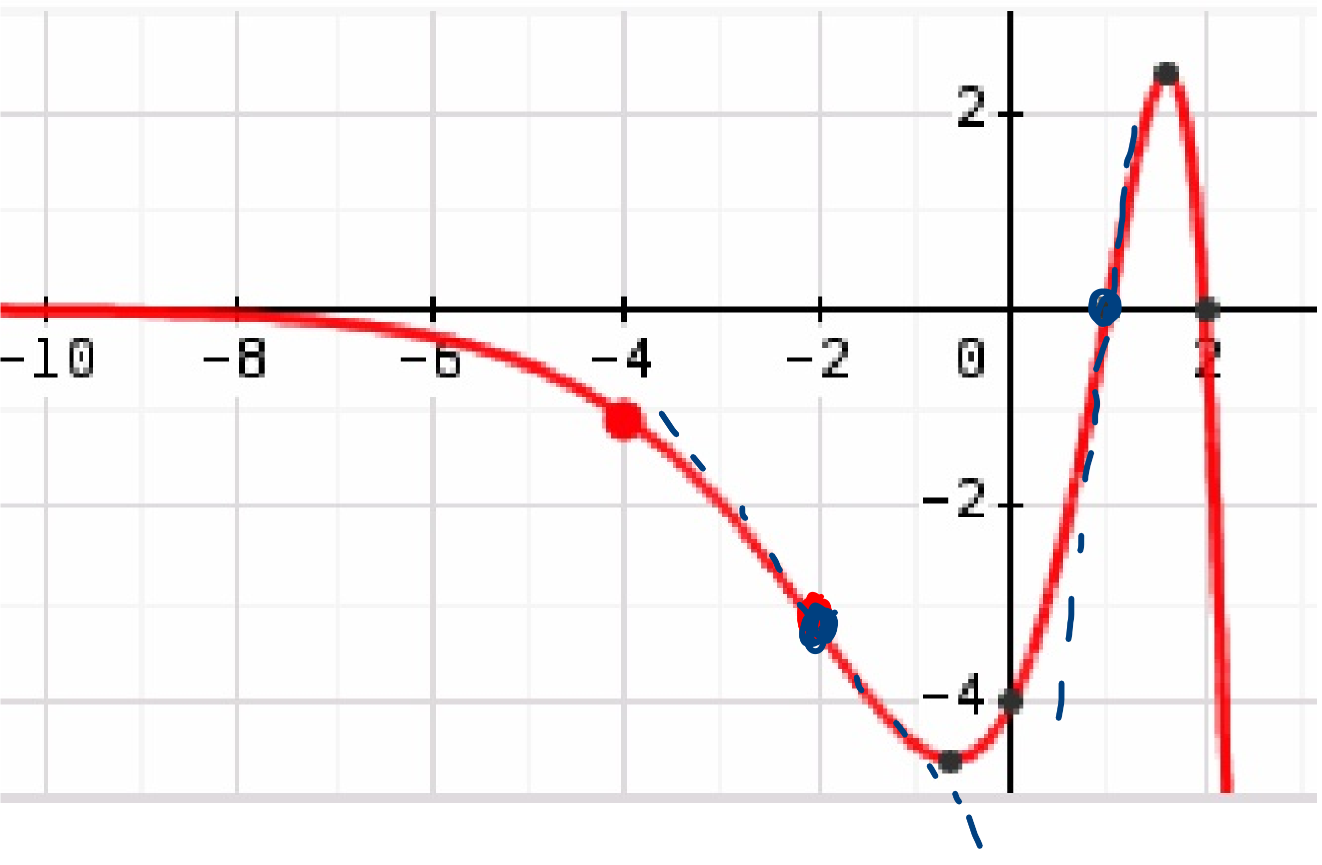
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de f''		$-$	0	$+$	0	$-$	

concave convexe concave

On a deux points d'inflexion aux abscisses :

-2 et 1

⚠ f et non f' ou f''



$$(-2x^2+6x-4)\,e^x$$

Revoir: CONVEXE1.html

Exercice

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \left(-2x^2 + 6x - 4\right) e^x$.

La dérivée seconde de f est f''(x)=(-2x^2-?x+? ?) e^x

D'ou le tableau de signe:

x	-∞		?		?		+∞
Signe de la dérivée seconde		?	0	?	0	?	

On en déduit que la courbe représentative de f admet deux points d'inflexion dont les abscisses par ordre croissant sont:

? et ?

Compléter enfin le tableau suivant:

Sur l'intervalle	]-∞; ?]	[? ; ?]	[? ;+∞[
La fonction est	?	?	?

Théorème **Ensemble des solutions d'une équation $y' = ay + b$, solution avec condition initiale**

Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a est un réel non nul et b un réel ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{ax} - \frac{b}{a}$, avec K réel. Pour tous x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution prenant en x_0 la valeur y_0, c'est-à-dire telle que $f(x_0) = y_0$.

Méthode 6 Résoudre l'équation $y' = ay + b$

Énoncé

Déterminer les solutions de l'équation $2y' = 8y - 10$ puis trouver la solution qui s'annule en 1. $\Leftrightarrow y' = 4y - 5$

D'après le cours, les solutions de $y' = 4y - 5$
(en divisant par 2)

Méthode 6

Résoudre l'équation $y' = ay + b$

Énoncé

Déterminer les solutions de l'équation $2y' = 8y - 10$ puis trouver la solution qui s'annule en 1.

D'après le cours, les solutions de $y' = 4y - 5$ (en divisant par 2) sont les fonctions f_K

$y' = ay + b$

$y : x \mapsto Ke^{ax} - \frac{b}{a}$

$$\boxed{f_K : x \longmapsto Ke^{4x} + \frac{5}{4}}$$

$Ke^{4x} - \frac{-5}{4}$

avec $K \in \mathbb{R}$

La solution qui s'annule en 1 ?

$f_K(1) = 0 \iff Ke^{4\times 1} + \frac{5}{4} = 0 \iff Ke^4 = -\frac{5}{4}$

D'après le cours, les solutions de $y' = 4y - 5$ (en divisant par 2) sont les fonctions f_K

$$\boxed{f_K : x \longmapsto Ke^{4x} + \frac{5}{4}}$$

La solution qui s'annule en 1 ?

$f_K(1) = 0 \iff Ke^{4\times 1} + \frac{5}{4} = 0 \iff Ke^4 = -\frac{5}{4}$

$$\iff K = \frac{-\frac{5}{4}}{e^4} = -\frac{5}{4}e^{-4}$$

Donc $f : x \longmapsto -\frac{5}{4}\boxed{e^{-4}e^{4x}} + \frac{5}{4}$ $\left(-\frac{5}{4}e^{-4}\times e^{4\times 1} + \frac{5}{4}\right)$

$$\boxed{f : x \longmapsto -\frac{5}{4}e^{-4+4x} + \frac{5}{4}}$$

Méthode 5

Résoudre l'équation $y' = ay$

Énoncé

1. Résoudre l'équation $3y' = 2y$.
2. Donner l'allure des courbes solutions. (Geogebra)
3. Déterminer ensuite l'unique solution f telle que $f(1) = e$.

1° $3y' = 2y \iff y' = \frac{2}{3} y$

$y : x \longmapsto \ldots$

D'après le cours, les solutions de cette "équadiff" sont les fonctions $\boxed{f_K : x \longmapsto K e^{\frac{2}{3}x}}$

avec $K \in \mathbb{R}$

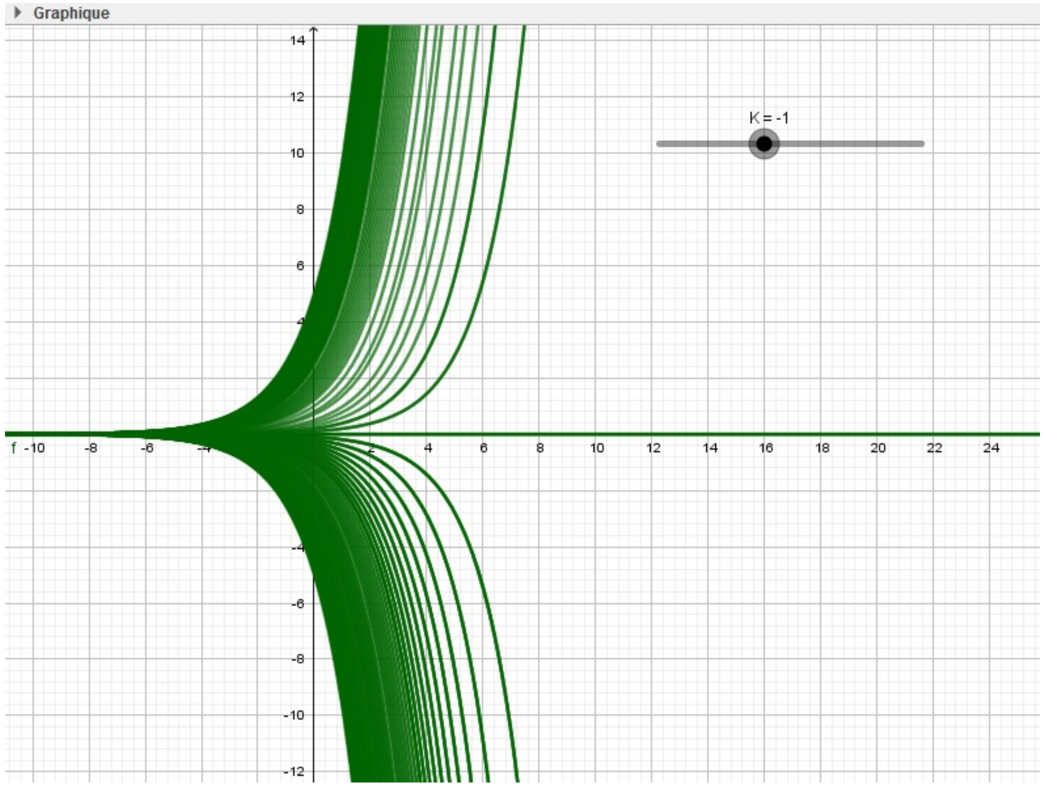
1° $3y' = 2y \iff y' = \frac{2}{3}y$

$y : x \longmapsto \dots$

D'après le cours, les solutions de cette "équadiff" sont les fonction $\boxed{f_K : x \longmapsto K e^{\frac{2}{3}x}}$

avec $K \in \mathbb{R}$

2° Geogebra



3° $f(1) = e$

$\iff K \times e^{\frac{2}{3}\times 1} = e^{1}$

$\iff K = \dfrac{e^{1}}{e^{\frac{2}{3}}} = e^{1-\frac{2}{3}}$

$\iff K = e^{\frac{1}{3}} \simeq 1,4$

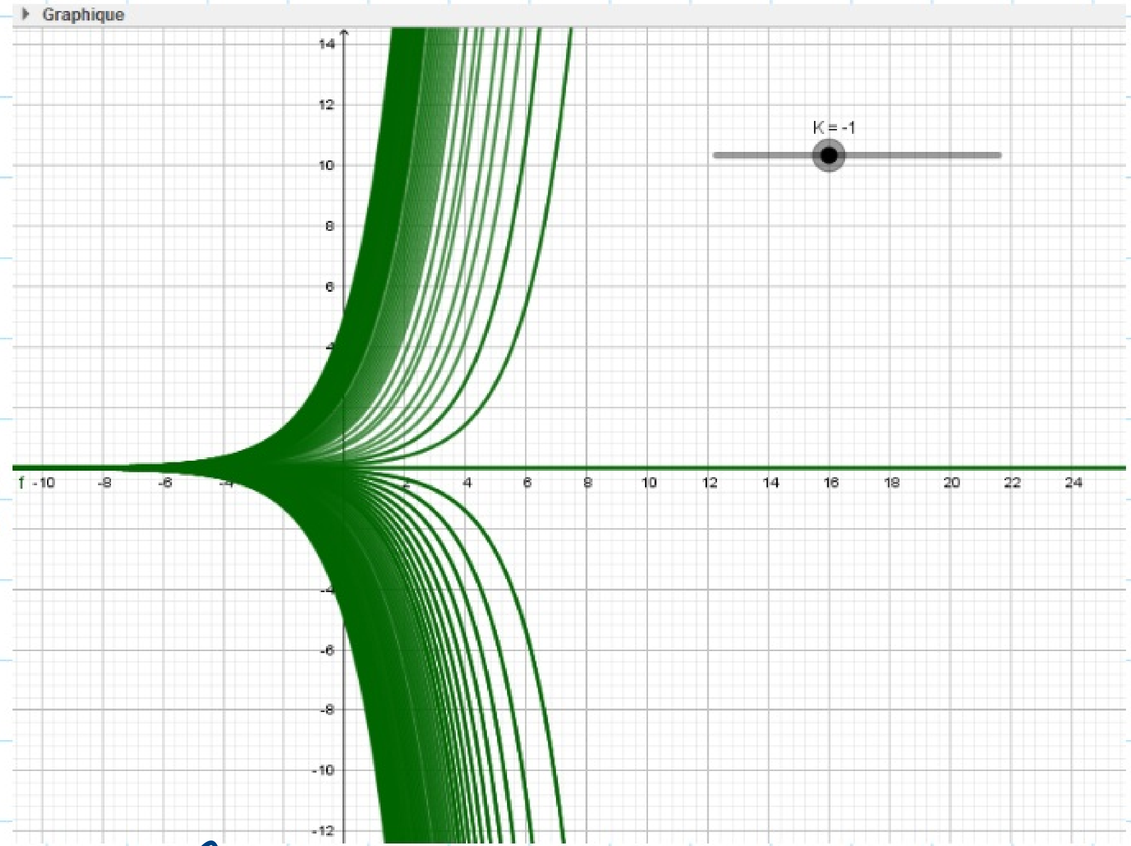
2° Geogebra

3° $f(1) = e$

$\Leftrightarrow K \times e^{\frac{2}{3} \times 1} = e^{1}$

$\Leftrightarrow K = \dfrac{e^{1}}{e^{\frac{2}{3}}} = e^{1-\frac{2}{3}}$

$\Leftrightarrow K = e^{\frac{1}{3}}$



La fonction f qui vérifie $3y' = 2y$ et $f(1) = e$ est $f = f_{e^{\frac{1}{3}}}$

$f : x \longmapsto K e^{\frac{2}{3}x} = e^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3}x} = \boxed{e^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x}}$

La fonction f qui vérifie $3y' = 2y$ et $f(1) = e$ est $f = f_{e^{\frac{1}{3}}}$

$f : x \longmapsto K e^{\frac{2}{3}x} = e^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3}x} = \boxed{e^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x}}$

Vérification (Facultative)

$(e^{u})' = u' e^{u}$

$f : x \longmapsto e^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x}$

- $3f' = \cancel{3} \times \frac{2}{\cancel{3}} e^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x} = 2e^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x}$

$2f = 2 \times e^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x}$

- $f(1) = e^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 1} = e^{1} = e$