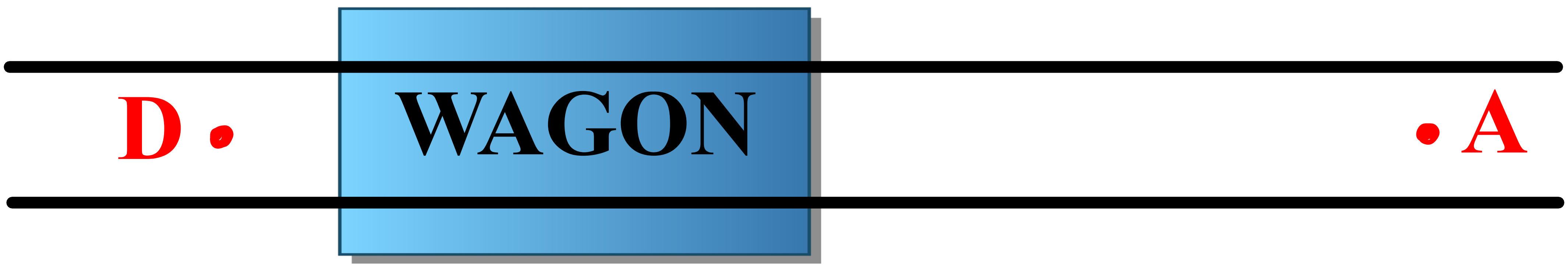
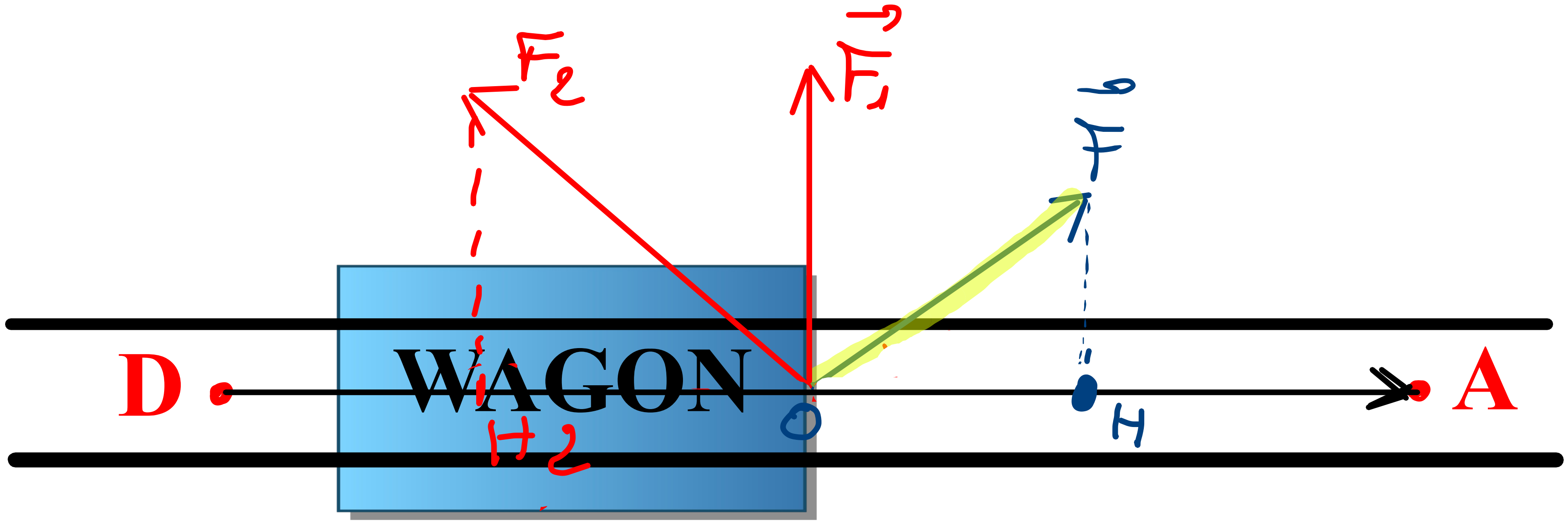
CHAPITRE 8
Produit scalaire

Notion de travail



Notion de travail

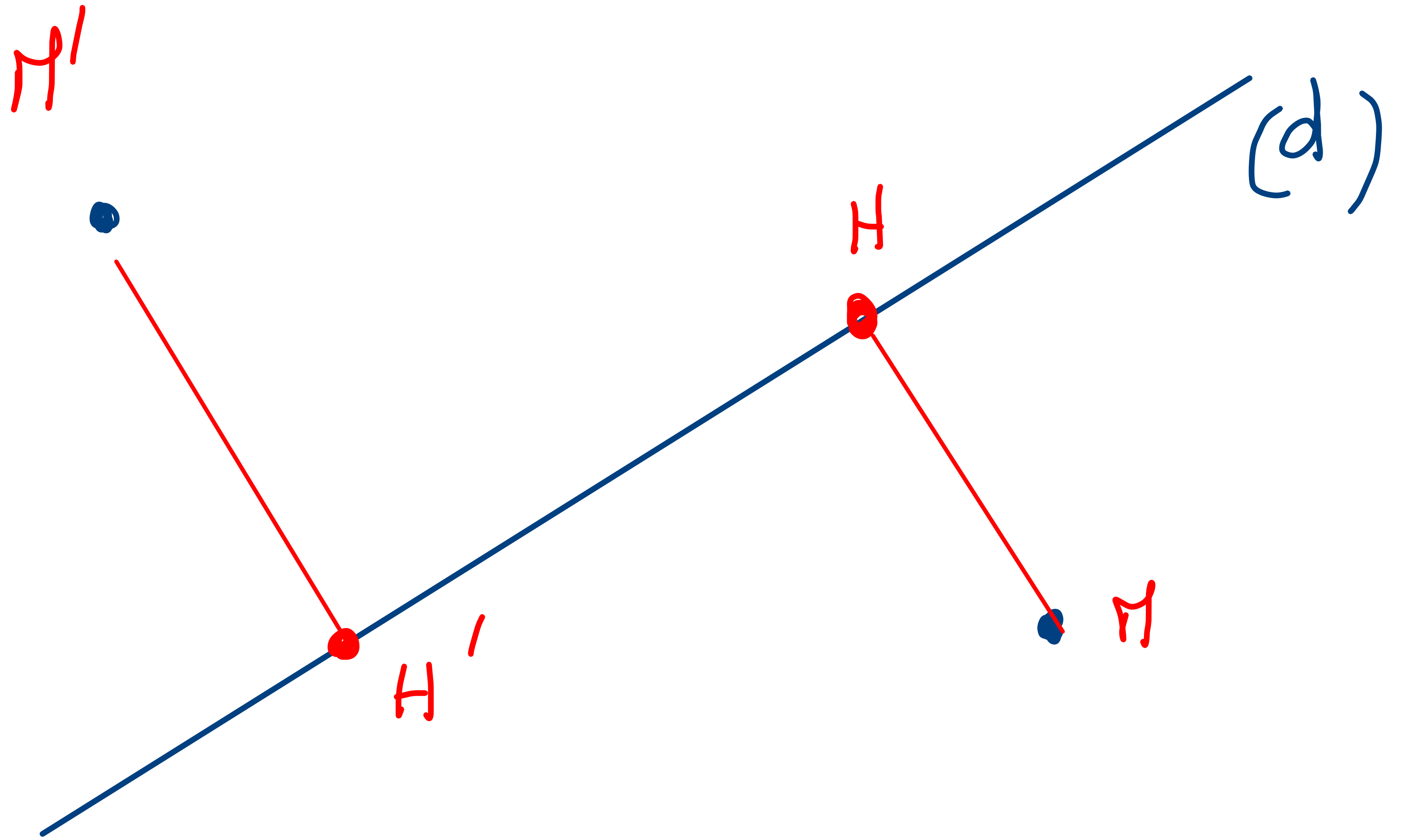


Travail :

$\vec{DA} \cdot \vec{F} =$ " $DA \times OH$ "   Projeté ortho.

$\vec{DA} \cdot \vec{F_1} = 0$

$\vec{DA} \cdot \vec{F_2} = - DA \times OH_2$


M'
H
(d)
H'
M

Produit scalaire (1ère)

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non nuls dans un repère orthonormé

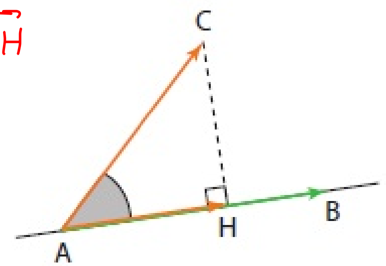
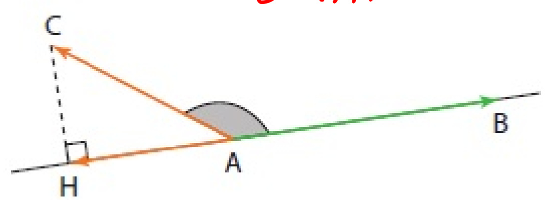
Formule analytique $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$ ⚠ $\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - yx'$

Formule géométrique $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Formule avec les normes $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ (Moins utilisée)

Projeté orthogonal

- Soit A, B et C trois points et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = +AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens. Positif	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.
$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ 	$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ 

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, ce qui se traduit par :

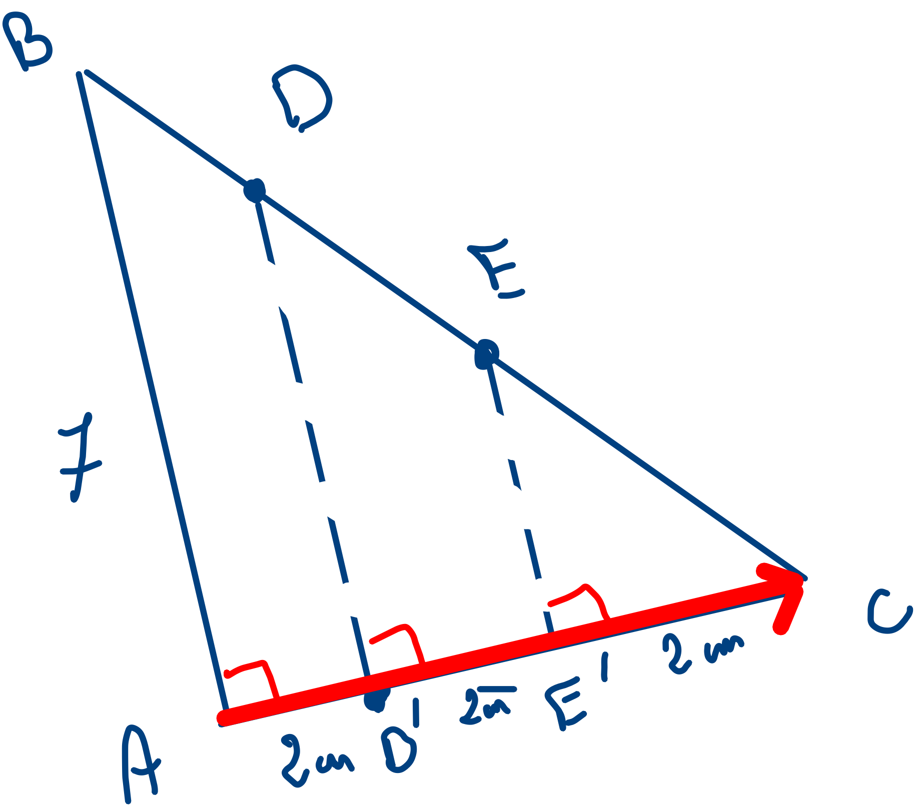
$$xx' + yy' = 0$$

Propriétés du produit scalaire

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = (\vec{u})^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

- $\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$ (associativité)

Exercice (Avec projetés orthogonaux)



$\vec{AC}\cdot\vec{AC} = +AC\times AC = 36$

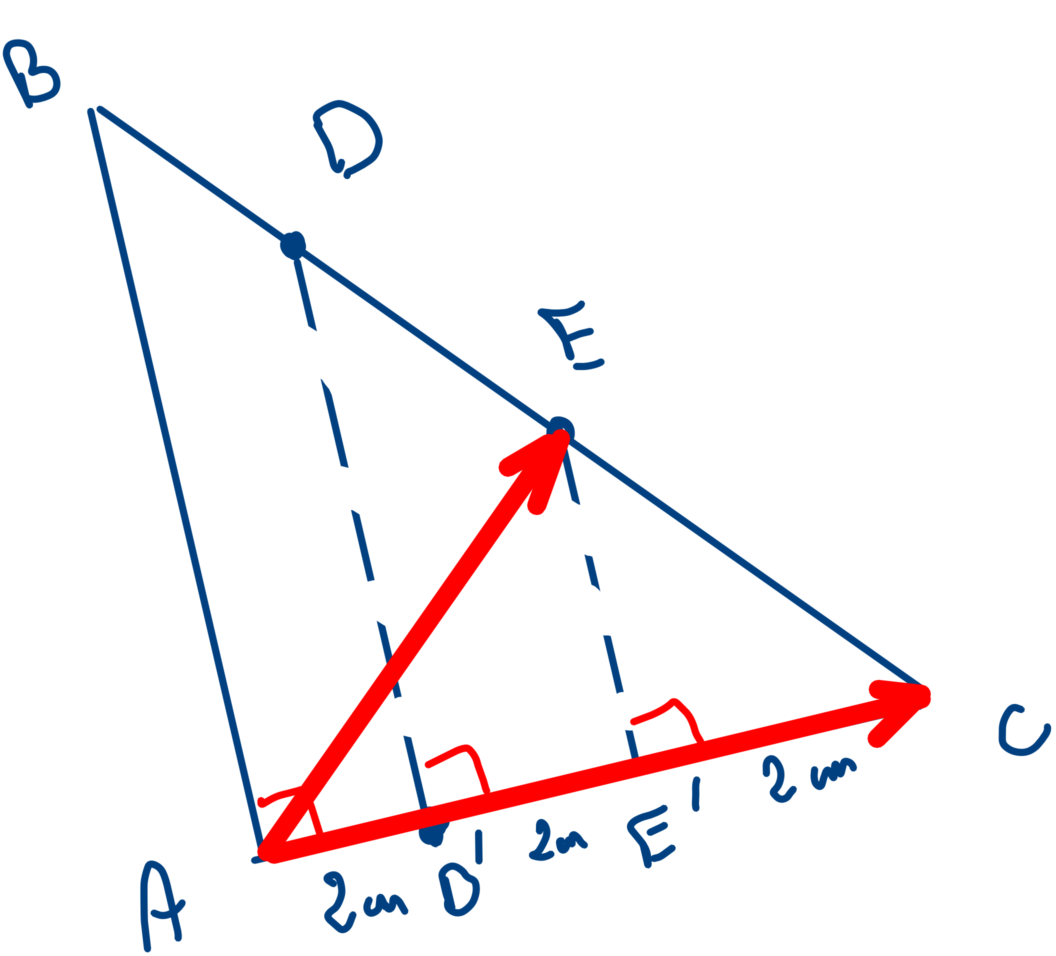
$\vec{AE}\cdot\vec{AC} = \vec{AE'}\cdot\vec{AC} = +AC\times AE' = 24$

$\vec{CA}\cdot\vec{AB} = 0$

$\vec{CD}\cdot\vec{CA} = \vec{CD'}\cdot\vec{CA} = +CD\times CA = 24$

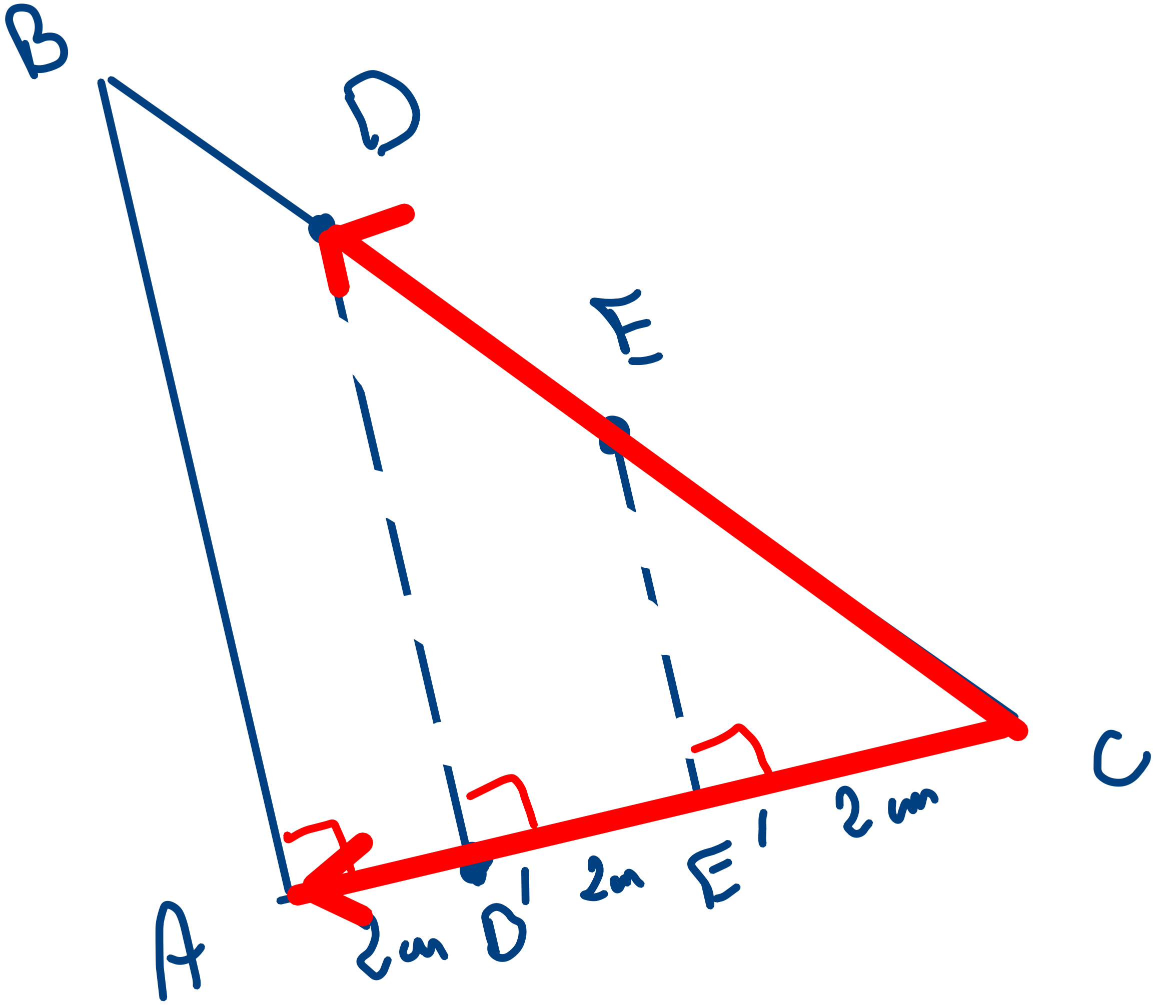
$\vec{AD'}\cdot\vec{ED} = \vec{AD'}\cdot\vec{E'D'} = -AD'\times E'D' = -4$

$\vec{BA}\cdot\vec{CB} = \vec{BA}\cdot\vec{AB} = -BA\times AB = -49$



$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE'}$$

$$= (+)\, AC \times AE'$$

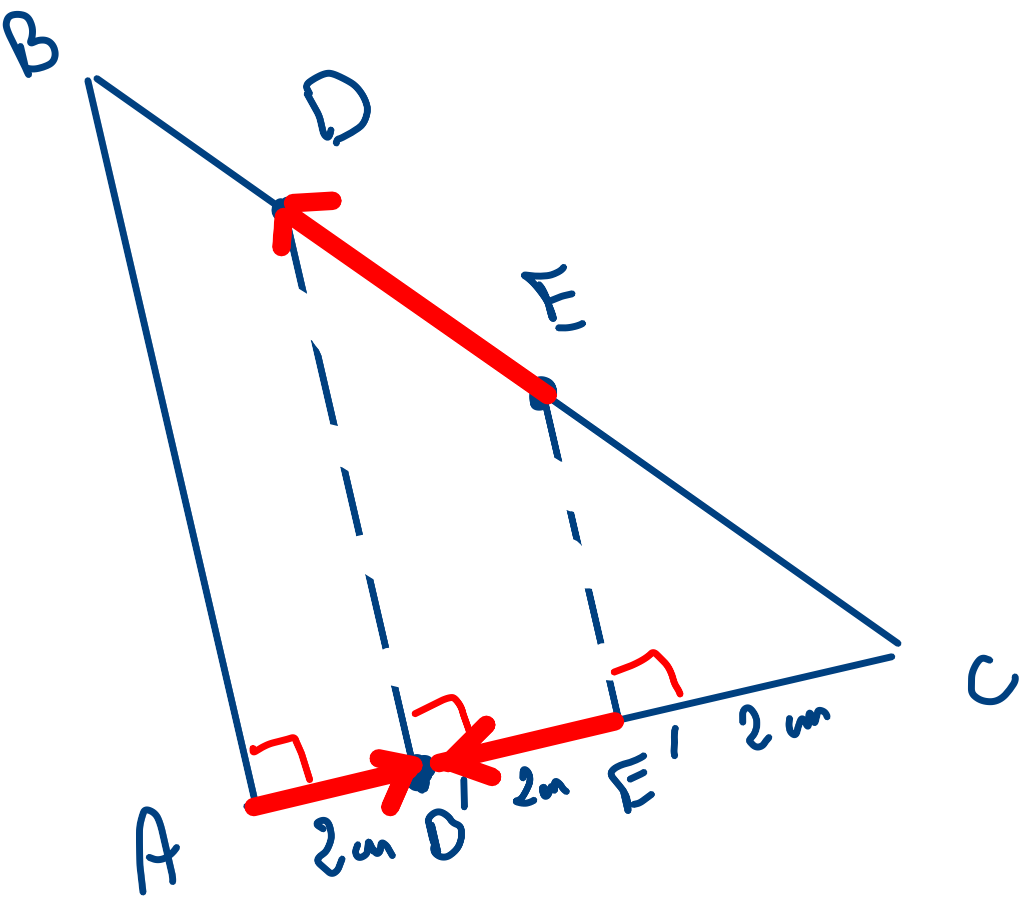


$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{CD'} \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$+CD' \times CA$$

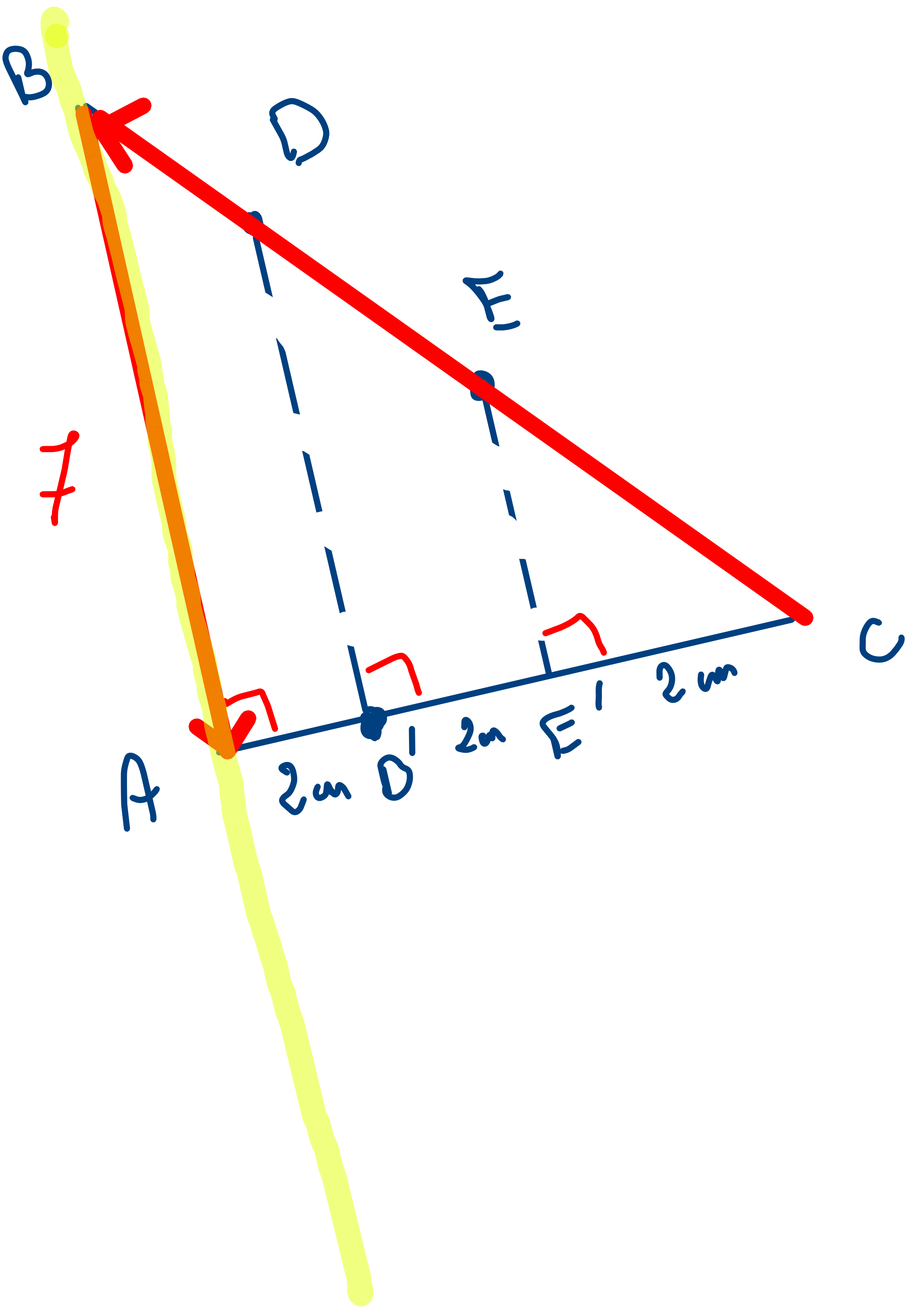
$$4 \times 6$$



$$\vec{AD'} \cdot \vec{ED} = \vec{AD'} \cdot \vec{E'D'}$$

$$= - AD' \times ED'$$

$$= - 2 \times 2$$



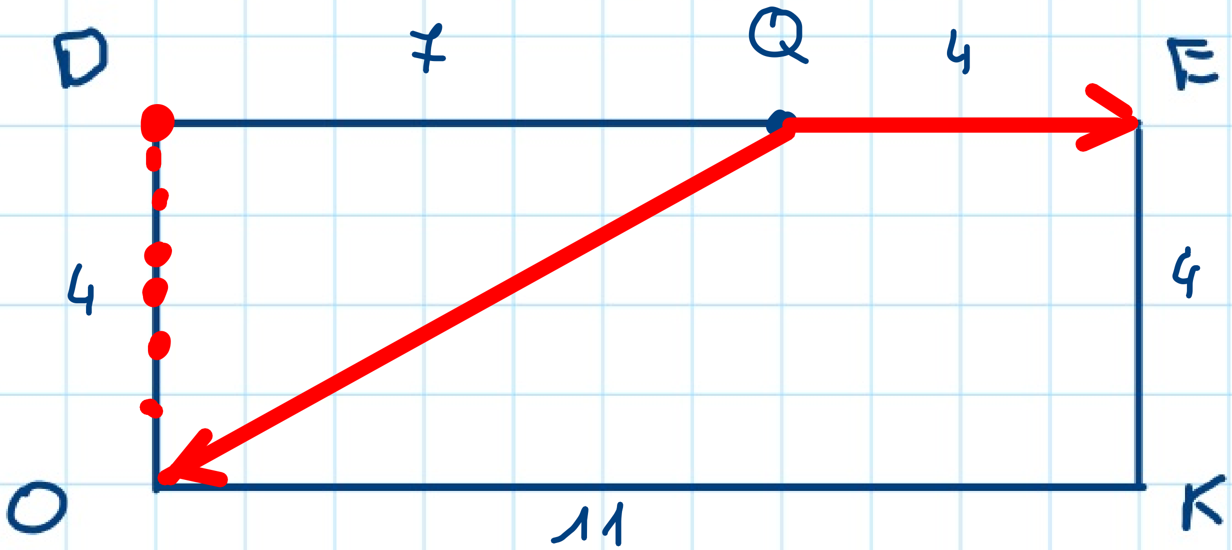
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = -49$

CB

Exercice: Calcul de produit scalaire dans un rectangle

On considère un rectangle DEKO tel que DE=11 cm et OD=4 cm
Soit Q un point du segment [DE] tel que QE=4 cm.
Alors $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OK} = \boxed{}$? , $\overrightarrow{KQ}\cdot\overrightarrow{KE} = \boxed{}$? , $\overrightarrow{KO}\cdot\overrightarrow{KQ} = \boxed{}$? ,
$\overrightarrow{QO}\cdot\overrightarrow{QE} = \boxed{}$? , $\overrightarrow{QD}\cdot\overrightarrow{QK} = \boxed{}$? , $\overrightarrow{QO}\cdot\overrightarrow{OD} = \boxed{}$? .



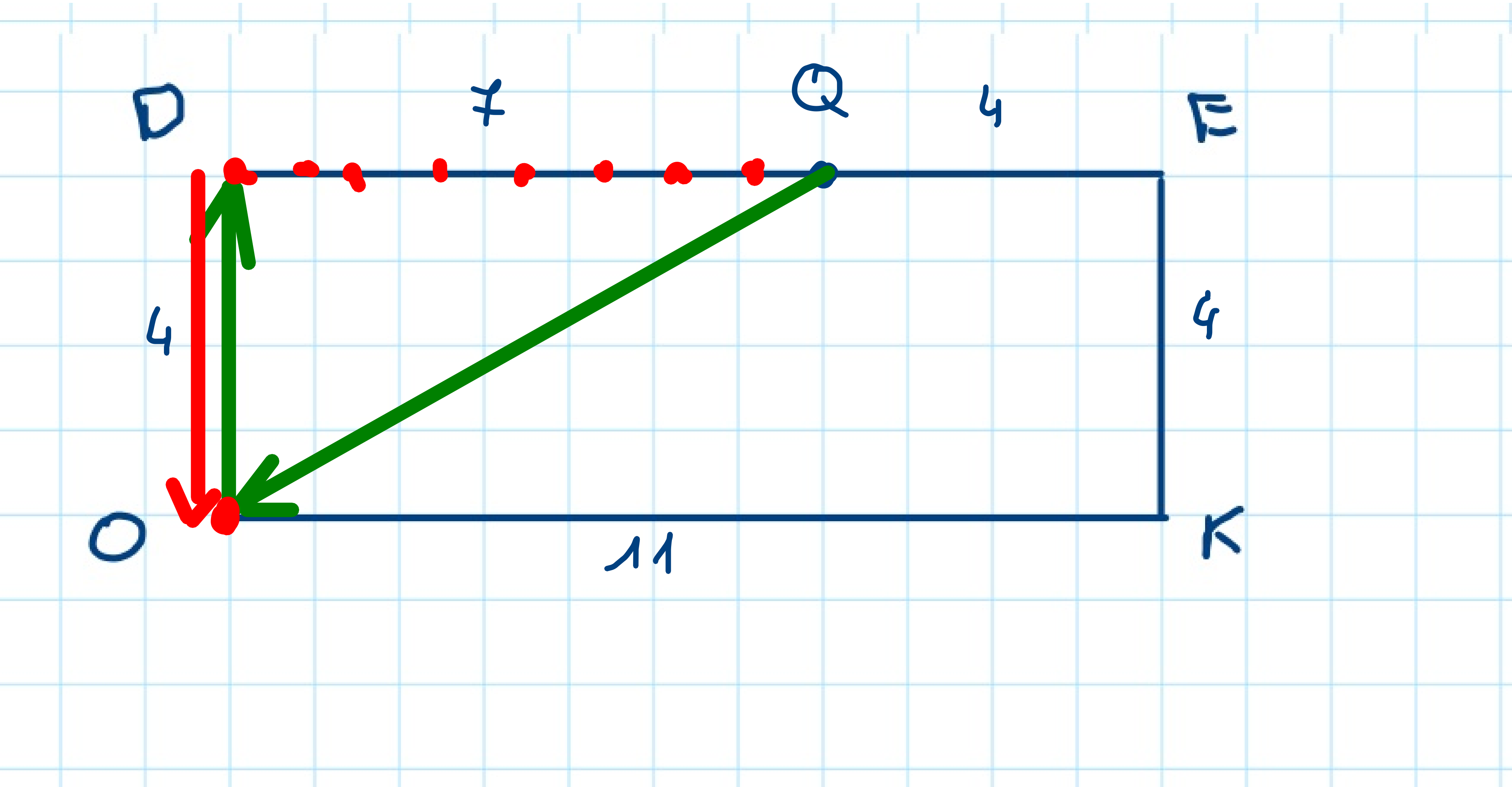
① $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OK} = 7\times 11$
$= 77$

② $\overrightarrow{KQ}\cdot\overrightarrow{KE} = 4\times 4$
$= 16$

③ $\overrightarrow{KO}\cdot\overrightarrow{KQ} = 11\times 4 = 44$

④ $\overrightarrow{QO}\cdot\overrightarrow{QE} = -4\times 7 = -28$

PRODUIT_SCALAIRE_PLAN1
PRODUIT_SCALAIRE_PLAN1a



Exercice: Calcul avec les normes

$\|\overrightarrow{BC}\| = BC$

On considère un triangle BCM tel que BC=7, CM=7 et BM=5.

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BM} =$

$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CM} =$

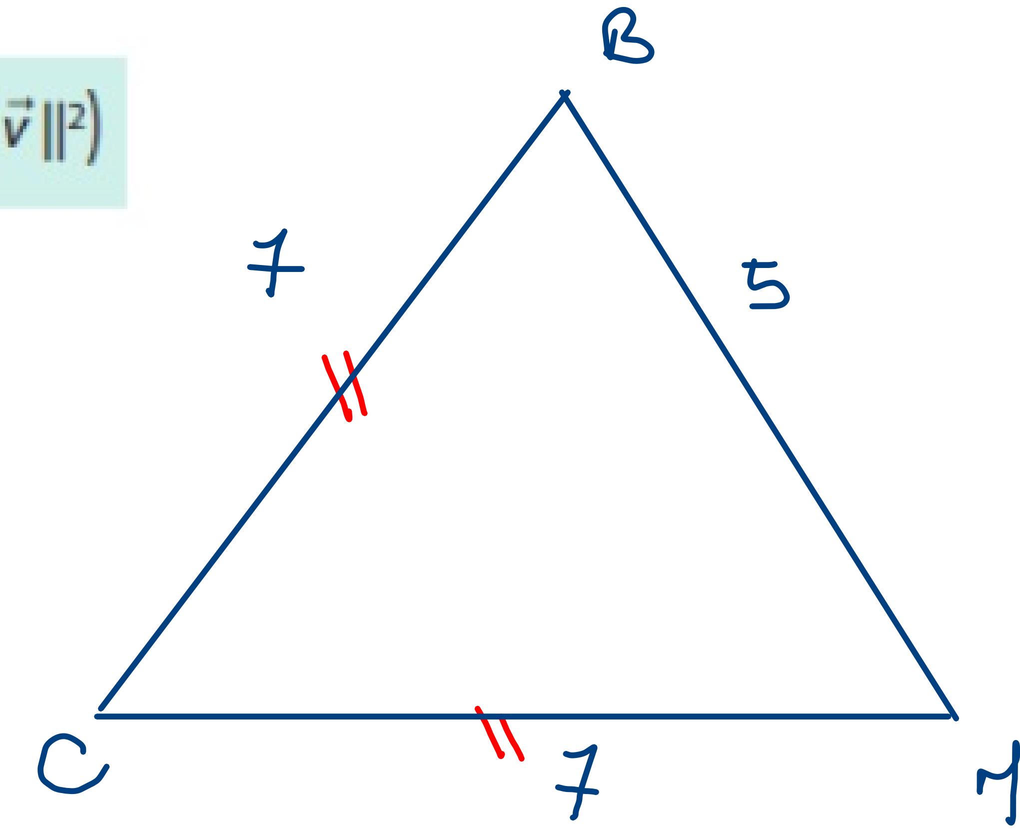
$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} =$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{BM}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(BC^2 + BM^2 - \|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\|^2\right)$$



$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}$

$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{BC}\cdot\vec{BM} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{BC}\|^2+\|\vec{BM}\|^2-\|\vec{BC}-\vec{BM}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(BC^2+BM^2-\|\vec{BC}+\vec{MB}\|^2\right)$$

$$\vec{BC}+\vec{MB}$$

$$\vec{MB}+\vec{BC}$$

$$\vec{MC}$$

$$= \frac{1}{2}\left(BC^2+BM^2-MC^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cancel{7^2}+5^2-\cancel{7^2}\right) = \frac{1}{2}\times 25$$

$$= 12.5$$

$$\vec{CB}\cdot\vec{CM} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{CB}\|^2+\|\vec{CM}\|^2-\|\vec{CB}-\vec{CM}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{CB}\|^2 + \|\overrightarrow{CM}\|^2 - \|\underbrace{\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CM}}\|^2\right)$$

$$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MB}$$

$$= \frac{1}{2}\left(CB^2 + CM^2 - MB^2\right)$$

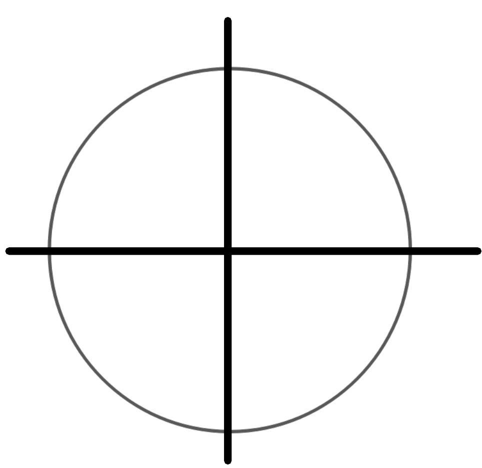
$$= \frac{1}{2}\left(7^2 + 7^2 - 5^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times (98-25) = \frac{73}{2} = 36{,}5$$

EXOID

381 PRODUIT_SCALAIRE_PLAN3

PRODUIT_SCALAIRE_PLAN1
PRODUIT_SCALAIRE_PLAN2
PRODUIT_SCALAIRE_PLAN3 (=2)



PRODSCAL_SYNTH_DEF1

GEOMETRIE DANS LE PLAN: equation cartésienne d'une droite

$ax + by + c = 0$
(cartésienne)

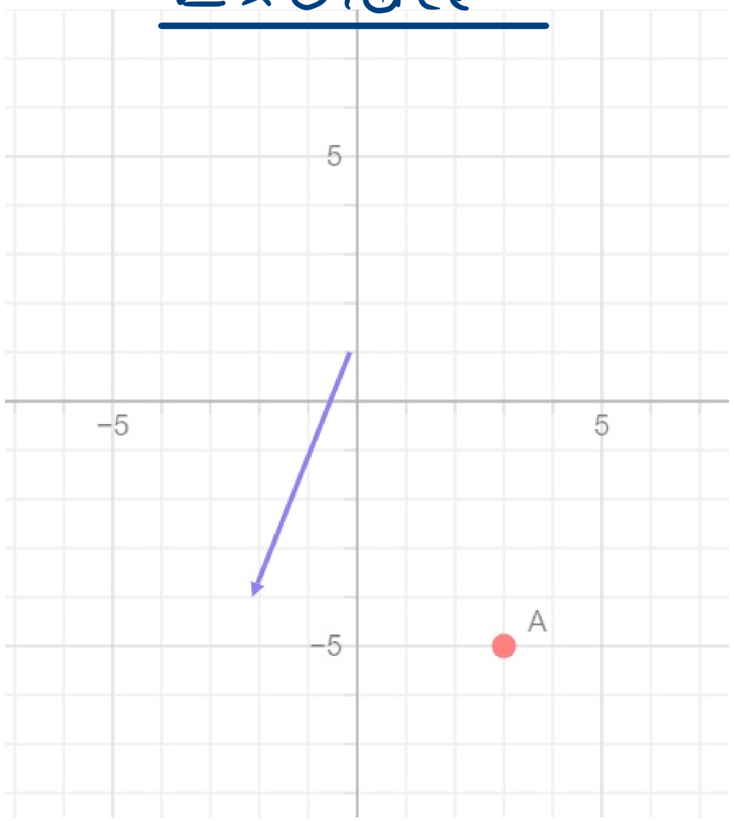
$y = ax + b$
(réduite)

PRODSCAL_EQUATION_CART_DROITE.html

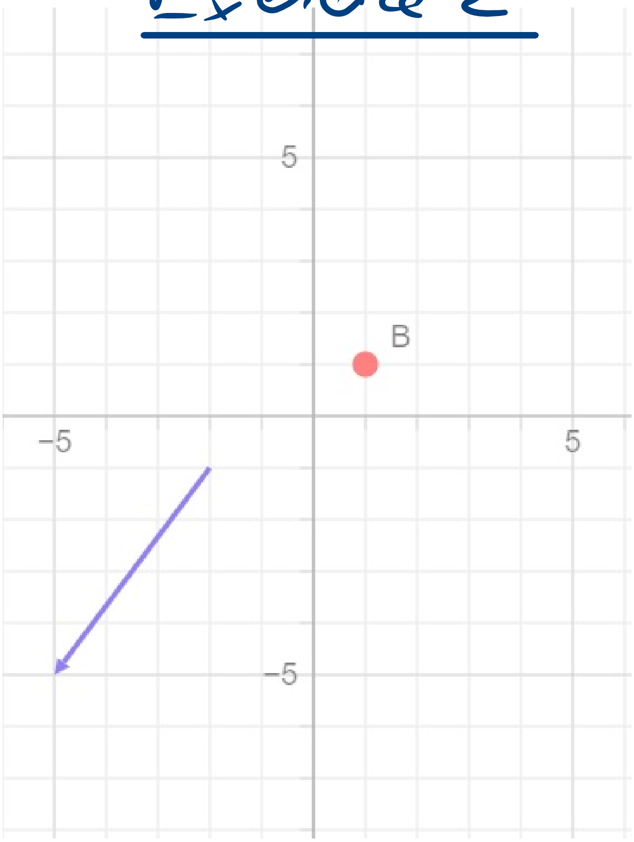
Exercice 1: avec vecteur normal

Exercice 2: avec vecteur directeur

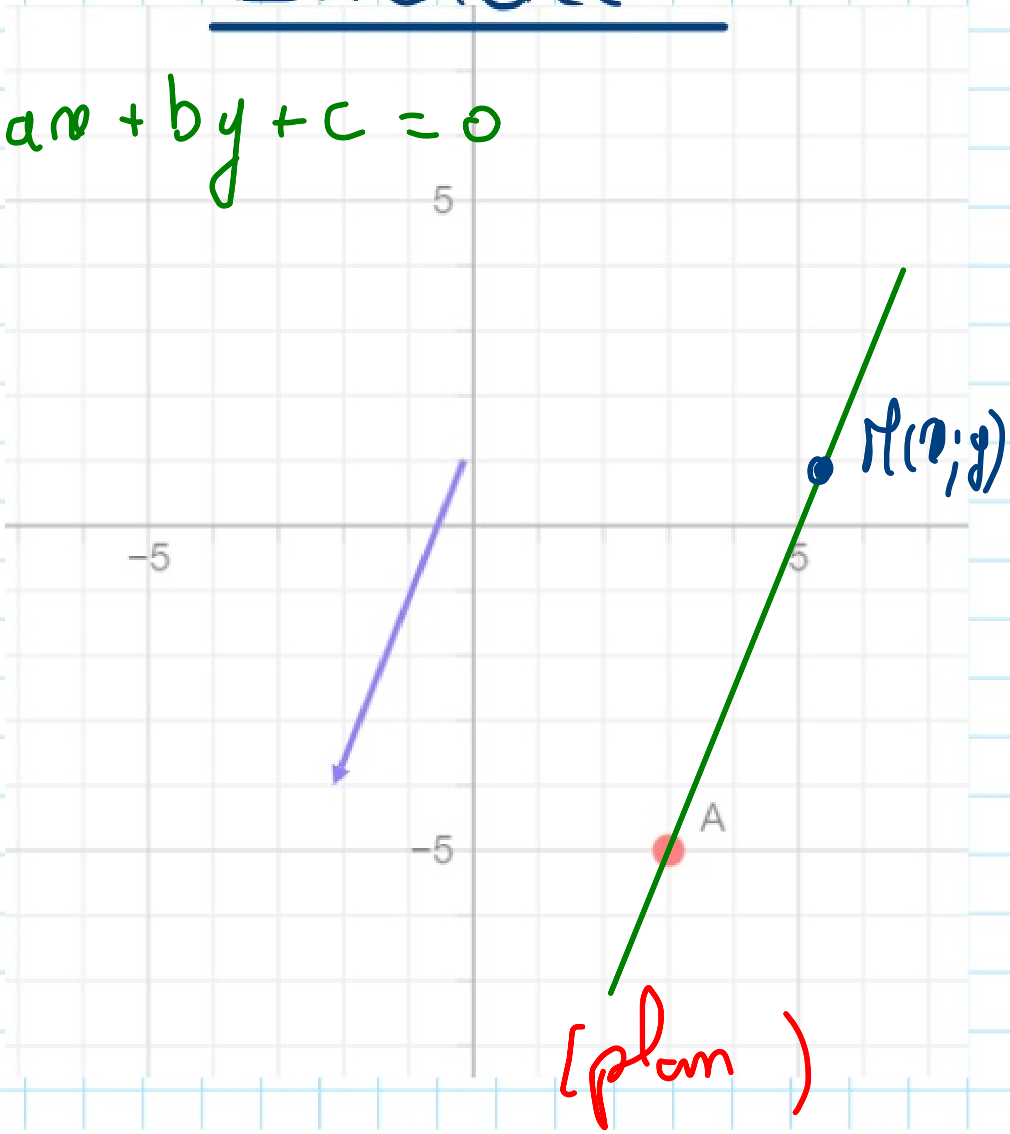
Exercice 1



Exercice 2



Exercice 1



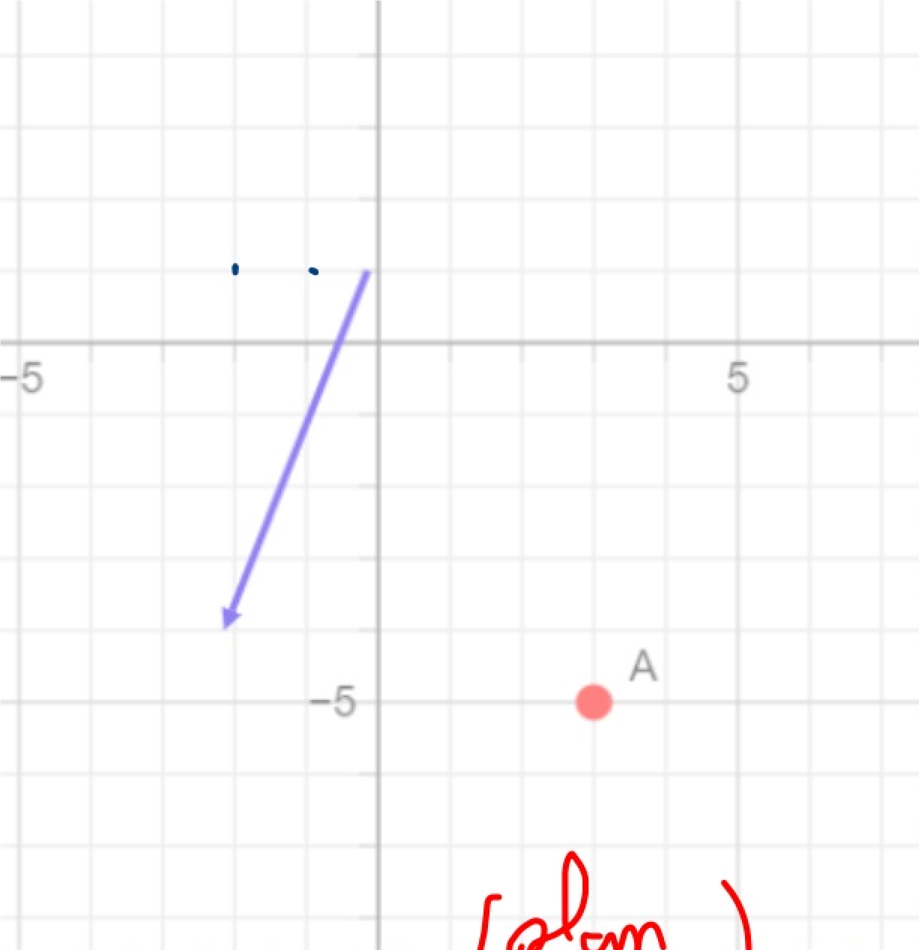
Soit $A(3;-5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$

Quelle est l'équation cartésienne de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$?

$M(x;y) \in d$

$\iff \vec{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaire

$\iff \det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0$



(plan)

Quelle est l'équation cartésienne de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$?

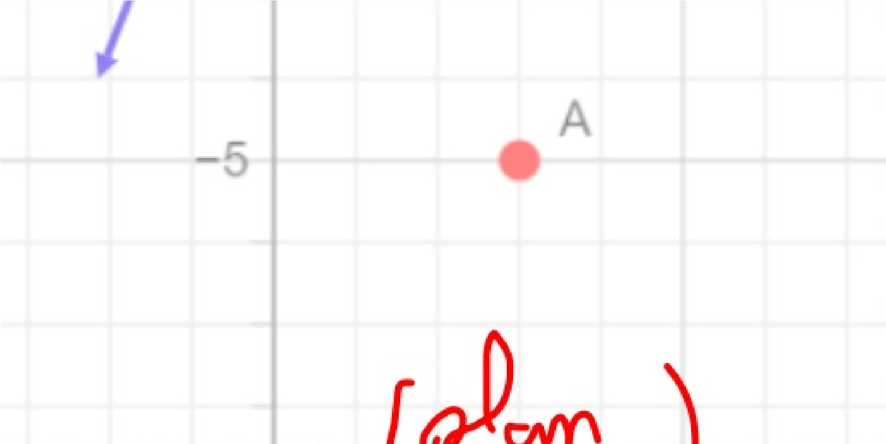
$M(x;y) \in d$

$\iff \vec{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaire

$\iff \det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0$

$$\iff \det\left(\vec{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+5\end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\iff (x-3)\times(-5) - (-2)\times(y+5) = 0$$



(plan)

$M(x;y) \in d$

$\iff \vec{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaire

$\iff \det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0$

$\iff \det\left(\vec{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+5\end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}\right) = 0$

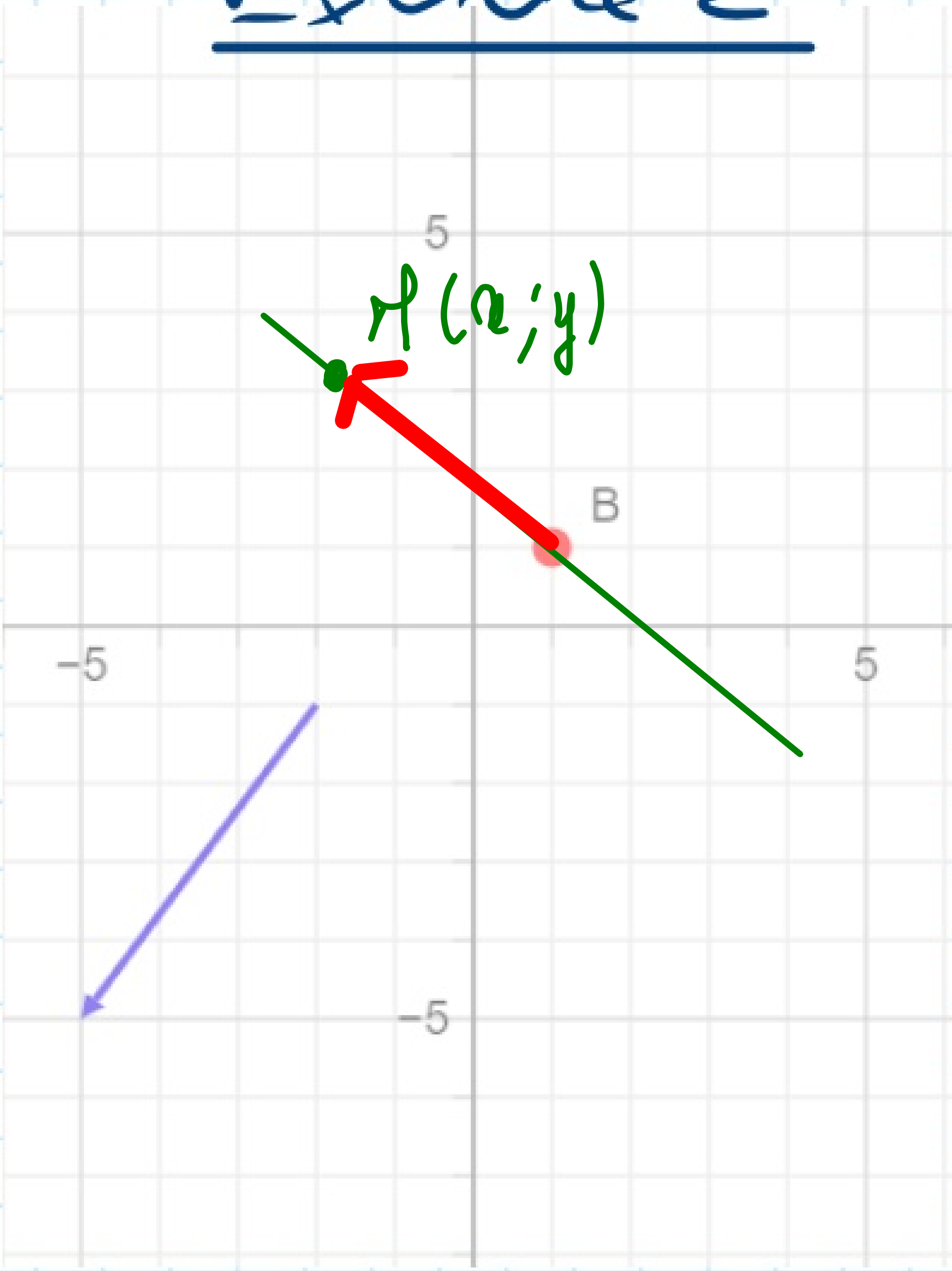
$\iff (x-3)\times(-5) - (-2)\times(y+5) = 0$

$\iff -5x + 15 + 2y + 10 = 0$

$\iff -5x + 2y + 25 = 0$

Exercice 2

Exercice 2



Soit $B(1;1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$
$M(x;y)$

Quelle est l'équation cartésienne de la droite (d') passant par B et de vecteur normal $\vec{n}$

$M(x;y) \in d' \iff \overrightarrow{BM} \perp \vec{n}$

$\iff \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0$

$\iff \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix} \cdot \vec{n}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} = 0$

Quelle est l'équation cartésienne de la droite (d') passant par B et de vecteur normal $\vec{n}$

$M(x;y) \in d' \iff \vec{BM} \perp \vec{n}$

$\iff \vec{BM} \cdot \vec{n} = 0$

$\iff \vec{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \iff (x-1)\times(-3) + (y-1)\times(-4) = 0$

$\iff -3x + 3 - 4y + 4 = 0 \iff -3x - 4y + 7 = 0$

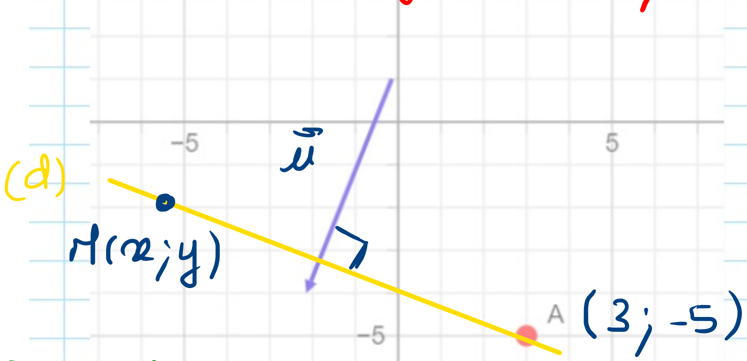
$\vec{AM} \,//\, \vec{u}$

det

Exercice 1

Vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$

Passe par $A(3;-5)$



$\vec{AM} \perp \vec{u}$

$M\in(d) \iff \vec{AM}\cdot\vec{u} = 0 \iff \begin{pmatrix}x-3\\y-(-5)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}=0$

$\iff -2(x-3)+(-5)\times(y+5)=0$

$\iff -2x+6-5y-25=0$

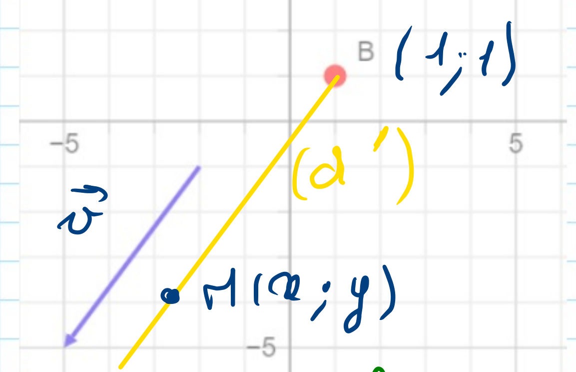
$\iff \boxed{-2x-5y-19=0}$

Equation cartésienne de (d)

Exercice 2

Vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$

Passant par $B(1;1)$



$\vec{BM} \parallel \vec{v}$ colinéaire, produit en croix

$M\in(d') \iff \det(\vec{BM};\vec{v}) = 0$

$\iff \det\left(\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}\right)=0$

$\iff (x-1)\times(-4)-(y-1)\times(-3)=0$

$\iff -4x+4+3y-3=0$

$\iff \boxed{-4x+3y+1=0}$

Equation cartésienne de (d')

PRODSCAL_EQUATION_CART_DROITE.html
PRODSCAL_EQUATION_CART_DROITE1.html
Exercice 1: avec vecteur normal
Exercice 2: avec vecteur directeur

GEOMETRIE DANS LE PLAN:
équation cartésienne d'un cercle

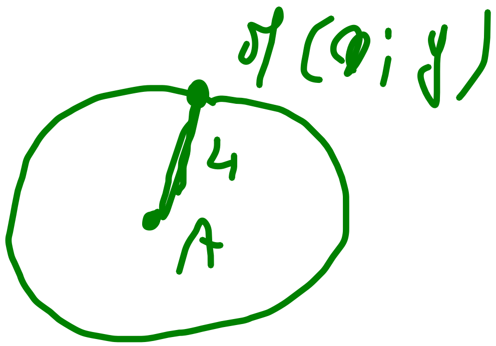
Exercice 1

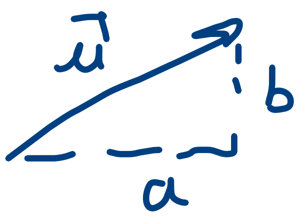
Soit P le cercle de centre A de coordonnées A(2;3) et de rayon 4 .
Donner une équation du cercle P:

$\underset{(x;y)}{M} \in P \iff AM = 4$

$\iff \left\| \vec{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} \right\| = 4$

$\iff \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 4$





$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$

Exercice 1

Soit P le cercle de centre A de coordonnées A(2;3) et de rayon 4 .
Donner une équation du cercle P:

$$M \in P \iff AM = 4$$

$$\iff \left\| \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} \right\|^2 = 4$$

$$\iff \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 4$$

$$\iff (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

$$\iff x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 16$$

$$\iff \boxed{x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0}$$

$$\underbrace{a}_{x} - \underbrace{b}_{2}$$

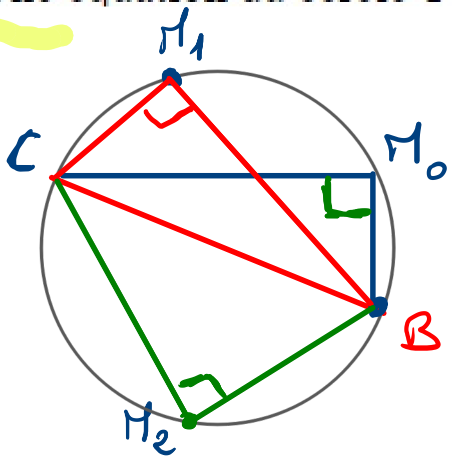
$$\boxed{a^2}$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Exercice 2

Soit T le cercle de diamètre [BC] avec B(4;6) et C(-3;-5).
Une équation du cercle T est:

$M(x;y)$



$M \in T \iff CMB$ rectangle en M

$\iff \vec{CM} \cdot \vec{BM} = 0$

$\iff \begin{pmatrix} x+3 \\ y+5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-4 \\ y-6 \end{pmatrix} = 0$

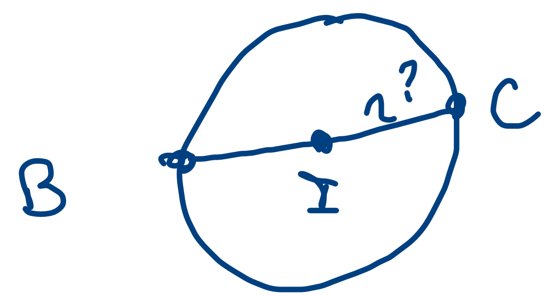
$\iff (x+3)(x-4)+(y+5)(y-6) = 0$

$\iff x^2 - 4x + 3x - 12 + y^2 - 6y + 5y - 30 = 0$

$\iff x^2 + y^2 - x - y - 42 = 0$

(autre méthode)

Soit T le cercle de diamètre [BC] avec B(4;6) et C(-3;-5).
Une équation du cercle T est: ?



$I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$IC = r$

PRODSCAL_EQUATION_CART_CERCLE.html

Exercice 1 (Centre-Rayon)

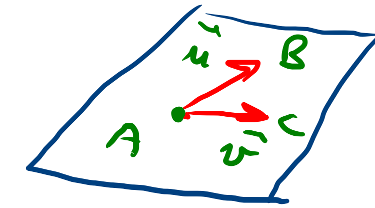
Exercice 2 (Diametre)

PRODSCAL_SYNTH_DEF1
PRODUIT_SCALAIRE_PLAN1
PRODUIT_SCALAIRE_PLAN2
PRODUIT_SCALAIRE_PLAN3
PRODUIT_SCALAIRE_PLAN4

PRODSCAL_EQUATION_CART_DROITE.html
Exercice 1: avec vecteur normal
Exercice 2: avec vecteur directeur

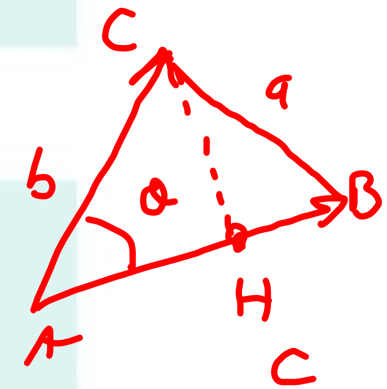
PRODSCAL_EQUATION_CART_CERCLE.html
Exercice 1 (Centre-Rayon)
Exercice 2 (Diametre)

1 Produit scalaire dans l'espace



Définition Produit scalaire dans l'espace

Étant donné trois points non alignés A, B et C de l'espace, et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est défini de la même façon que le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan (ABC).



Propriétés Différentes expressions du produit scalaire

- Avec le cosinus : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
- Avec le projeté : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$ où H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
- Avec les coordonnées : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- Avec les normes : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

$\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$

Propriétés Opérations avec les vecteurs

- Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Bilinéaire : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- Identité remarquable : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- Formules de polarisation : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}^2\| - \|\vec{v}^2\|\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

$\|\vec{v}^2\| = \|\vec{v} \cdot \vec{v}\|$
$= \|\vec{v}\|^2$

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ $(O ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Définition Base et repère orthonormés

Une base est dite orthonormée si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et si leurs normes sont égales.

Un repère est dit orthonormé si sa base est orthonormée.

Propriété Distance entre deux points de l'espace

Étant donné les points $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ dans un repère orthonormé alors la distance AB est donnée par la formule : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

$\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Propriétés Orthogonalité ou perpendicularité vectorielle

- Deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Elles ne sont donc pas sécantes car sinon on dit qu'elles sont perpendiculaires.
- Une droite et un plan sont orthogonaux si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs de base du plan.
- Deux plans sont perpendiculaires si deux vecteurs définissant l'un sont orthogonaux à deux vecteurs définissant l'autre.

Propriété Distance entre deux points de l'espace

Étant donné les points $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ dans un repère orthonormé alors la distance AB est donnée par la formule : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Propriétés Orthogonalité ou perpendicularité vectorielle

- Deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Elles ne sont donc pas sécantes car sinon on dit qu'elles sont perpendiculaires.
- Une droite et un plan sont orthogonaux si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs de base du plan.
- Deux plans sont perpendiculaires si deux vecteurs définissant l'un sont orthogonaux à deux vecteurs définissant l'autre.

Un plan est "engendré" par 2 vecteurs non colinéaires.

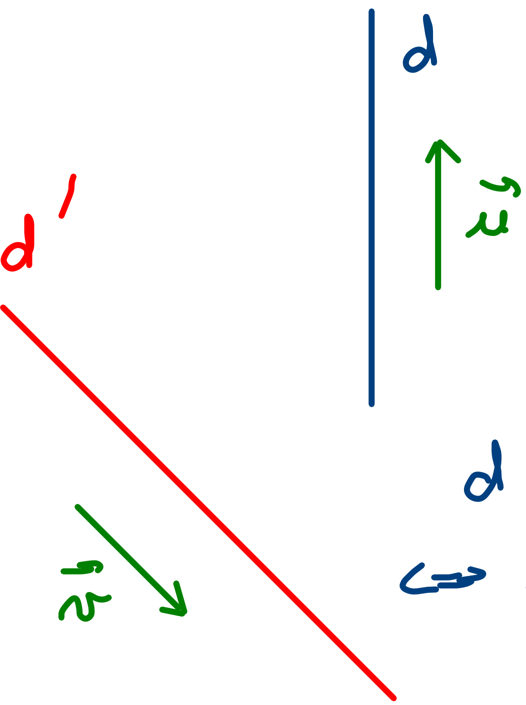
Un plan est "engendré" par 2 vecteurs non colinéaires.

Propriétés Orthogonalité ou perpendicularité vectorielle

- Deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Elles ne sont donc pas sécantes car sinon on dit qu'elles sont perpendiculaires.
- Une droite et un plan sont orthogonaux si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs de base du plan.
- Deux plans sont perpendiculaires si deux vecteurs définissant l'un sont orthogonaux à deux vecteurs définissant l'autre.

Propriétés — Orthogonalité ou perpendicularité vectorielle

- Deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Elles ne sont donc pas sécantes car sinon on dit qu'elles sont perpendiculaires.
- Une droite et un plan sont orthogonaux si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs de base du plan.
- Deux plans sont perpendiculaires si deux vecteurs définissant l'un sont orthogonaux à deux vecteurs définissant l'autre.

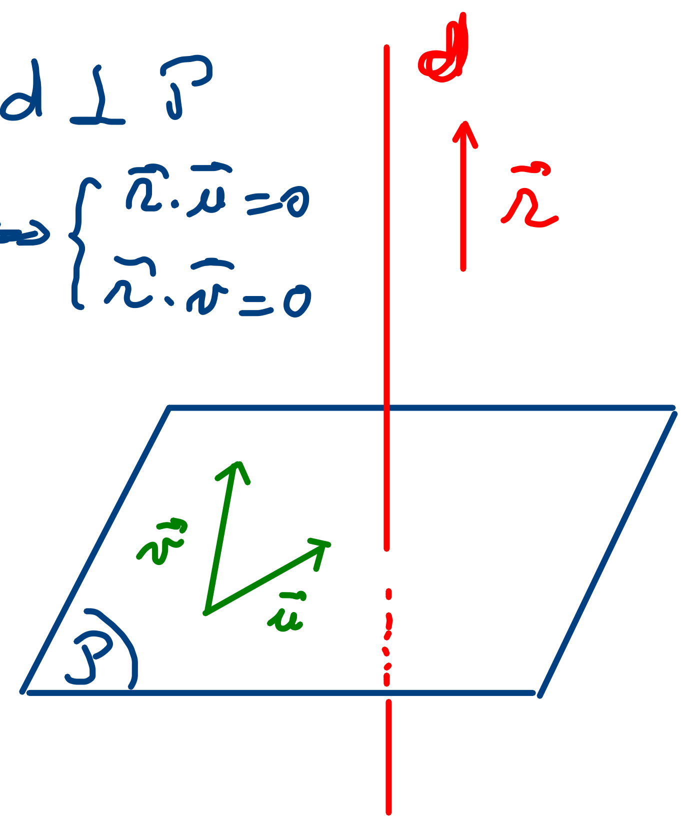


$d \perp d'$

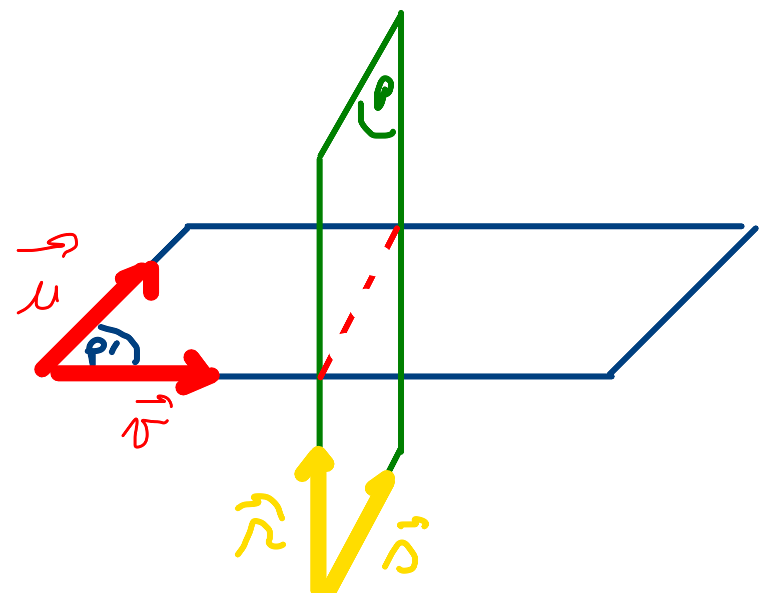
$\iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$d \perp P$

$\iff \begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{u}=0 \\ \vec{n}\cdot\vec{v}=0 \end{cases}$



$P \perp P' \iff \begin{cases} \vec{u}\perp\vec{n},\ \vec{u}\perp\vec{s} \\ \vec{v}\perp\vec{n},\ \vec{v}\perp\vec{s} \end{cases}$

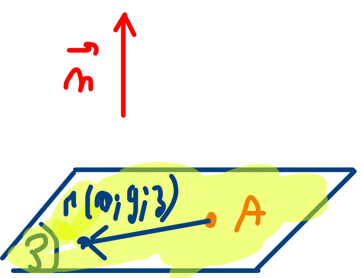


Exercice

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(2;2;-5)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\10\\1\end{pmatrix}$.

① Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

$x, y, z = \dots$



$M \in \mathcal{P} \iff \vec{AM} \perp \vec{n}$

$\iff \vec{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-2\\z+5\end{pmatrix} \cdot \vec{n}\begin{pmatrix}4\\10\\1\end{pmatrix} = 0$

Exercice 1

Soit P le plan passant par A(2;2;-5) et dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\10\\1\end{pmatrix}$

Donner une équation cartésienne du plan P (les coefficients doivent être entiers):
4x+(?)*y+(?)*z+(?) = 0 .

Exercice 2

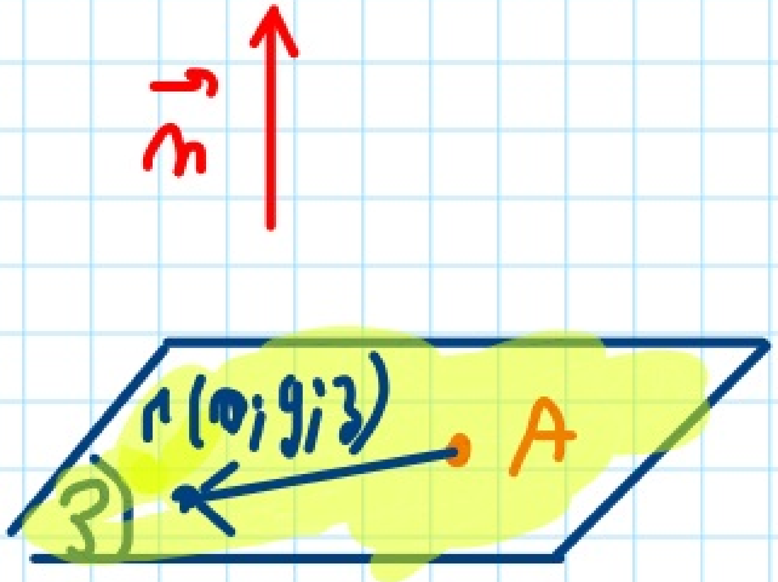
On considère le plan Q d'équation :
$-3x-8y-10z-1=0$
Compléter les valeurs manquantes:
Un vecteur normal au plan Q est :

$\vec{n}\begin{pmatrix}\square\\\square\\\square\end{pmatrix}$

Exercice 3

On considère le plan R d'équation :
$7x-10y-z-7=0$
Compléter la valeur manquante:
Le point A de coordonnées (-2 ; -2; ☐) appartient au plan R. .

EQUATION_CARTESIENNE_PLAN0
EQUATION_CARTESIENNE_PLAN0a
EQUATION_CARTESIENNE_PLAN1
EQUATION_CARTESIENNE_PLAN2
EQUATION_CARTESIENNE_PLAN3



$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$$

$$\iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z+5 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (x-2)\times 4 + (y-2)\times 10 + (z+5)\times 1 = 0$$

$$\iff 4x + 10y + z - 8 - 20 + 5 = 0$$

$$\iff \boxed{4x + 10y + z - 23 = 0}$$

$\iff (x-2)\times 4 + (y-2)\times 10 + (z+5)\times 1 = 0$

$\iff 4x + 10y + z - 8 - 20 + 5 = 0$

$\iff \boxed{4x + 10y + z - 23 = 0}$

UNE équation cartésienne de (P)

② Le point $K(1;2;-1)$ appartient-il à P.

On a $4\times 1 + 10\times 2 + (-1) - 23 = 0$

$K \in P$.

③ Mettre l'équation de (P) sous la forme $-4x + my + pz - q = 0$

.

$\Leftrightarrow$ $\boxed{4x + 10y + 3 - 23 = 0}$

UNE équation cartésienne de $(\mathcal{P})$

(2) Le point $K(1;2;-1)$ appartient-il à $\mathcal{P}$.

On a $4 \times 1 + 10 \times 2 + (-1) - 23 = 0$

$K \in \mathcal{P}$.

(3) Mettre l'équation de $(\mathcal{P})$ sous la forme $-4x + my + pz + q = 0$

$(4x + 10y + 3 - 23 = 0) \times (-1)$

$-4x - 10y - z + 23 = 0$ donc $m = -10$

$p = -1$

$q = 23$

Il y a une infinité d'équation cartésienne possible

③ Mettre l'équation de $(\mathcal{J})$ sous la forme $-4x + my + pz + q = 0$

$$(4x + 10y + z - 23 = 0) \times (-1)$$

$$-4x - 10y - z + 23 = 0$$ donc $m = -10$, $p = -1$, $q = 23$

$\boxed{\text{Il y a une infinité d'équation cartésienne possible}}$

Exercice

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x - ? \\ y - ? \\ z - ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a x + b y + c z + d = 0$$

Soit Q le plan d'équation $x - y + 2z + 1 = 0$

Exercice

$$\vec{AM} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x - ? \\ y - ? \\ z - ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

Soit Q le plan d'équation $x - y + 2z + 1 = 0$

Donne un vecteur normal à Q.

Corr : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q.

EQUATION_CARTESIENNE_PLAN2
EQUATION_CARTESIENNE_PLAN3

Rappel

Pivot de Gauss

Dans l'excercice suivant, toutes les **solutions sont des entiers relatifs**.
1795 secondes restantes (*29 minutes et 55 restantes*)

Exercice 1

$\begin{cases} 3x - 4y = 17 \\ -2x - 3y = 0 \end{cases}$ admet pour solutions x= ? et y= ? .

$\begin{cases} (3x - 4y = 17) \times 2 \\ (-2x - 3y = 0) \times 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 8y = 34 & (E_1) \\ -6x - 9y = 0 & (E_2) \end{cases}$

Exercice 2

$\begin{cases} -2x + 5y = -12 \\ -5x - 4y = 3 \end{cases}$ admet pour solutions x= ? et y= ? .

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 8y = 34 & (E_1) \\ 0 - 17y = 34 & (E_3) = (E_1) + (E_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 8 \times (-2) = 34 \\ y = -2 \end{cases}$

Rappel

ans l'excercice suivant, toutes les **solutions sont des entiers relatifs**.
795 secondes restantes (*29 minutes et 55 restantes*)

Exercice 1

$$\begin{cases} 3x-4y = 17 \\ -2x-3y = 0 \end{cases}$$ admet pour solutions x= ☐ ? et y= ☐ ? .

Exercice 2

$$\begin{cases} -2x+5y = -12 \\ -5x-4y = 3 \end{cases}$$ admet pour solutions x= ☐ ? et y= ☐ ? .

Pivot de Gauss

$$\begin{cases} (3x-4y=17)\times 2 \\ (-2x-3y=0)\times 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8y=34 & (E_1) \\ -6x-9y=0 & (E_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8y=34 & (E_1) \\ 0-17y=34 & (E_3)=(E_1)+(E_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8\times(-2)=34 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x = 34-16 \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$$

La solution du système est $(x;y)=(3;-2)$

SYSTEME_EQUATIONS5

INCIDENCE_SYNTHESE.ggb

DROITE:

PLAN:

Exercice 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives $x + 2y + z - 1 = 0$ et $2x - 3y - z + 2 = 0$.
Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

Incidences

2 plans → confondus
2 plans → sécants → droite
2 plans → //

à calculer.

Objectif :

$$\left.\begin{array}{l} P_1 : a_0 x + b_0 y + c_0 z + d_0 = 0 \\ \\ P_2 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \end{array}\right\}$$

→ Sécants : (d) : $\begin{cases} x = x_0 + a_2 t \\ y = y_0 + b_2 t \\ z = z_0 + c_2 t \end{cases}$

→ confondus : Deux équations sont équivalentes

→ //

$(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

Incidences

2 plans → confondus ; sécants → droite ; //

à calculer

Objectif :

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{P}_1 : a_0x + b_0y + c_0z + d_0 = 0 \\ \\ \mathcal{P}_2 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{array}\right\}$$

Sécants : $(d) : \begin{cases} x = x_0 + a_2 t \\ y = y_0 + b_2 t \\ z = z_0 + c_2 t \end{cases}$

confondus : Deux équations sont équivalentes

$$\begin{cases} -2x + 3y + z + 1 = 0 \\ -4x + 6y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

// Pas de solution

$$\begin{cases} -2x + 3y + z + 1 = 0 \\ -2x + 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y + z + 1 = 0 \\ -2x + 3y + z + 1 = -3 \end{cases}$$

Objectif :

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{P}_1 : a_0 x + b_0 y + c_0 z + d_0 = 0 \\ \\ \mathcal{P}_2 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \end{array}\right\} \quad (d) : \begin{cases} x = x_0 + a_2 t \\ y = y_0 + b_2 t \\ z = z_0 + c_2 t \end{cases}$$

à calculer.

$$M(x;y;z) \in (\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2) \iff \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

(Méthode)

$$\iff \begin{cases} x = t \\ 2y + z - 1 = -t \quad (1) \quad \times 3 \\ -3y - z + 2 = -2t \quad (2) \quad \times 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = \text{fonction de } t \\ z = \text{fonction de } t \end{cases}$$

$M(x;y;z) \in (P_1) \cap (P_2) \iff \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-3y-z+2=0 \end{cases}$

(Méthode)

$\iff \begin{cases} x = t \\ 2y+z-1 = -t \quad (E1) \times 3 \\ -3y-z+2 = -2t \quad (E2) \times 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = \text{fonction de } t \\ z = \text{fonction de } t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = t \\ 6y+3z-3 = -3t \quad (E_1)\times 3 = (E_3) \\ -6y-2z+4 = -4t \quad (E_2)\times 2 = (E_4) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = t \\ 6y+3z-3 = -3t \quad (E_3) \\ z+1 = -7t \quad (E_3)+(E_4) \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = t \\ 6y + 3z - 3 = -3t & (E_3) \\ z + 1 = -7t & (E_3) + (E_4) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = t \\ 6y + 3(-1 - 7t) - 3 = -3t \\ z = -1 - 7t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = t \\ 6y - 3 - 21t - 3 = -3t \\ z = -1 - 7t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = t \\ 6y = 6 + 18t \\ z = -1 - 7t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - 7t \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 3t \\ z \quad -1 - 7t \end{cases}}$$

$$\iff \begin{cases} x = t \\ 6y - 3 - 21t - 3 = -3t \\ z = -1 - 7t \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ 6y = 6 + 18t \\ z = -1 - 7t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - 7t \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 3t \\ z \quad -1 - 7t \end{cases}}$$

Exercice 2

Soit $\mathcal{P} : -2x + 3y - 4z + 7 = 0$

$\mathcal{P}' : 6x - 9y + 12z + 6 = 0$

$\times(-3)$?

Courte

$\vec{n}_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_{\mathcal{P}'} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$

sont les vecteurs normaux resp. de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$

$\vec{n}_{\mathcal{P}'} = -3\,\vec{n}_{\mathcal{P}} \Rightarrow \vec{n}_{P}$ et $\vec{n}_{P}'$ colinéaires

donc $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$

Mais $7 \times (-3) \neq 6$ donc strictement $\parallel$

Longue

$$\begin{cases} x = t \\ -2x + 3y - 4z + 7 = 0 \\ 6x - 9y + 12z + 6 = 0 \end{cases}$$

Résoudre l'équation.

Exercice 3

$$\begin{cases} P : -5x + 3y + 2z - 8 = 0 \\ P' : -10x + 6y + 4z - 16 = 0 \end{cases} \quad \times 2$$

Il s'agit de la même équation

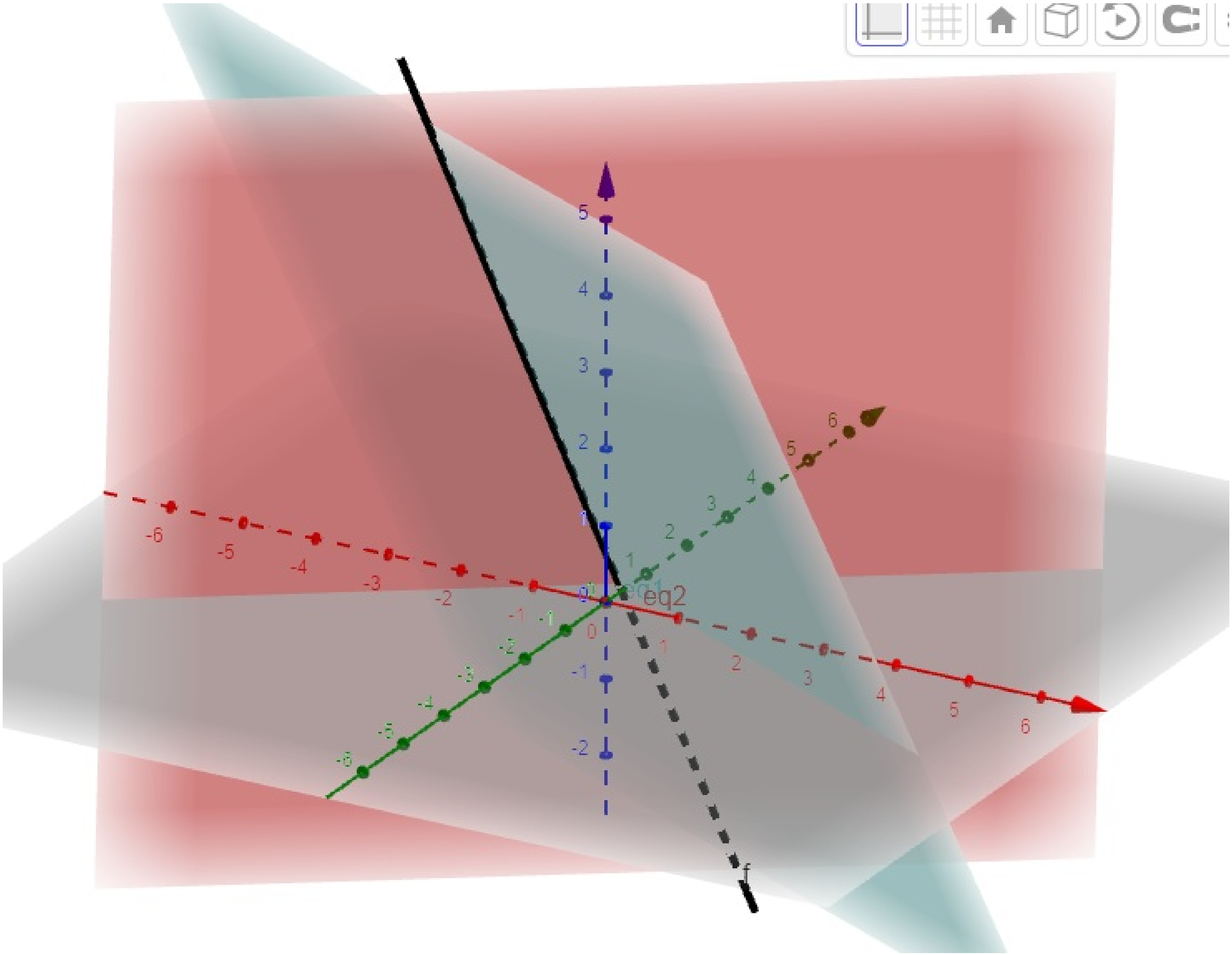
donc $P = P'$

$(M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow M(x; y; z) \in P')$

	z= -2t-5
$P) : -2x + 3y - 4z + 7 = 0$ $P') : 6x - 9y + 12z + 6 = 0$	◉ (P) et (P') sont parallèles (distincts) ○ (P) et (P') sont confondus ○ (P) et (P') sont sécants et leur droite d'intersection admet la représentation paramétrique : x=t y= z=
$P) : -5x + 3y + 2z - 8 = 0$ $P') : -10x + 6y + 4z - 16 = 0$	○ (P) et (P') sont parallèles (distincts) ◉ (P) et (P') sont confondus ○ (P) et (P') sont sécants et leur droite d'intersection admet la représentation paramétrique : x=t y= z=

```
▼ Array(4) i
  ▼ 0: Array(4)
      0: "\\((P):-12x-3y-3z-24=0\\)"
      1: "\\((P'):-12x-1y-5z-28=0\\)"
      2: "SECANTS"
    ▶ 3: (2) ['-2t-3', '-2t-5']
      length: 4
    ▶ [[Prototype]]: Array(0)
  ▼ 1: Array(4)
      0: "\\((P):-2x+3y-4z+7=0\\)"
      1: "\\((P'):6x-9y+12z+6=0\\)"
      2: "PARALLELES"
      3: null
      length: 4
    ▶ [[Prototype]]: Array(0)
  ▼ 2: Array(4)
      0: "\\((P):-5x+3y+2z-8=0\\)"
      1: "\\((P'):-10x+6y+4z-16=0\\)"
      2: "CONFONDUS"
      3: null
      length: 4
    ▶ [[Prototype]]: Array(0)
  ▼ 3: Array(4)
      0: "\\((P):13x+1y+4z-9=0\\)"
      1: "\\((P'):-8x-2y-2z+6=0\\)"
      2: "SECANTS"
    ▶ 3: (2) ['-t+1', '-3t+2']
      length: 4
    ▶ [[Prototype]]: Array(0)
```

EXOID 35 SYSTEME_EQUATIONS1 SYSTEME_EQUATIONS1
EXOID 36 SYSTEME_EQUATIONS2 SYSTEME_EQUATIONS2
EXOID 86 EQUATION_CARTESIENNE_PLAN1 EQUATION_CARTESIENNE_PLAN1
EXOID 87 INTERSECTION_PLANS_EQUATION_CARTESIENNE INTERSECTION_PLANS_EQUATION_CARTESIENNE

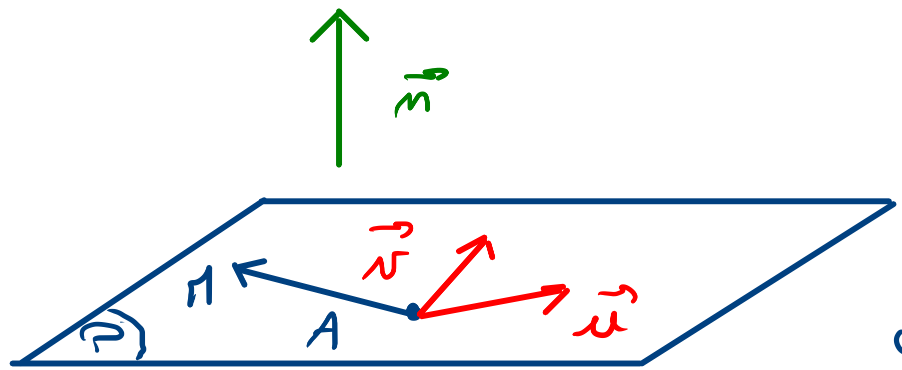


eq1
eq2
f

2 Plans de l'espace

Définition Vecteur normal

Étant donné le plan $(A, \vec{u}, \vec{v})$, un vecteur $\vec{n}$ est dit vecteur normal au plan s'il est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ou bien, si pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.



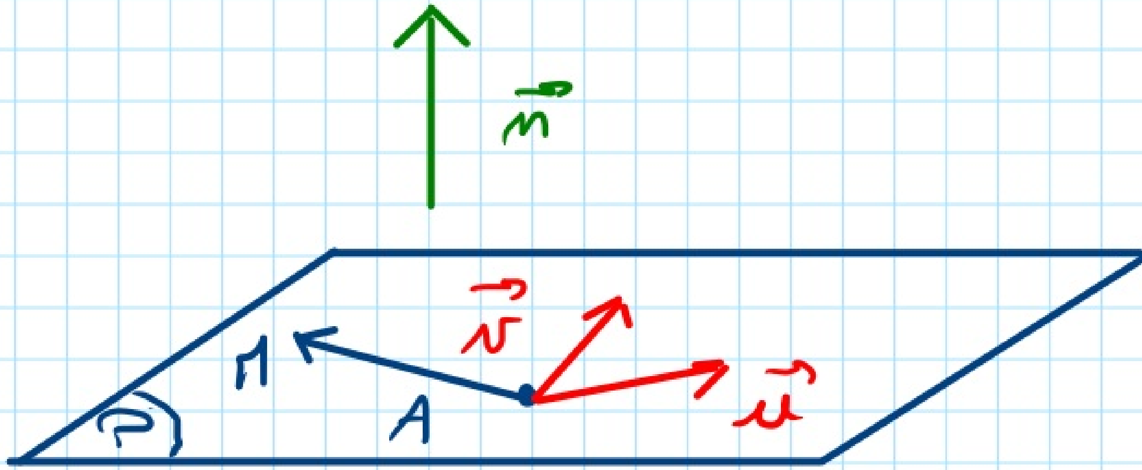
$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{n} \perp \vec{u} \\ \vec{n} \perp \vec{v} \end{array}}$$

ou

$$\boxed{\begin{array}{l} \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \\ \forall M \in P \end{array}}$$

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{n} \cdot (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha \vec{n} \cdot \vec{u} + \beta \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 + 0 = 0$$



$$\boxed{\begin{aligned} \vec{n} &\perp \vec{u} \\ \vec{n} &\perp \vec{v} \end{aligned}}$$

ou

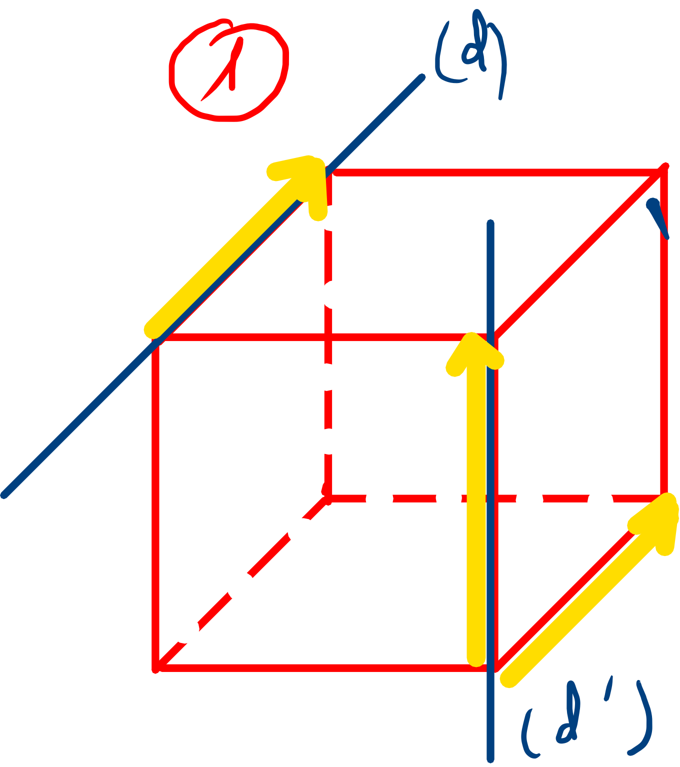
$$\boxed{\begin{aligned} &\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \\ &\forall M \in P \end{aligned}}$$

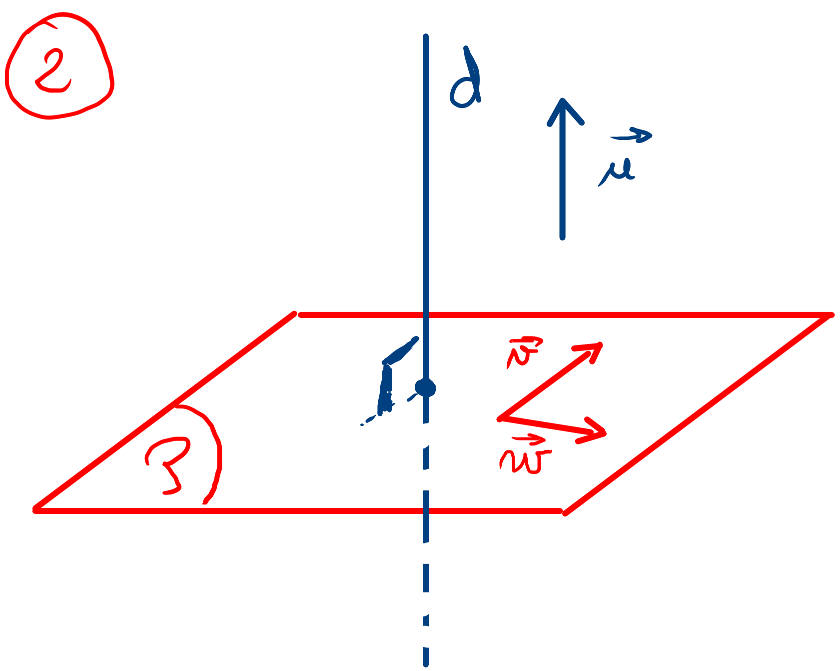
Propriétés Orthogonalité ou perpendicularité vectorielle

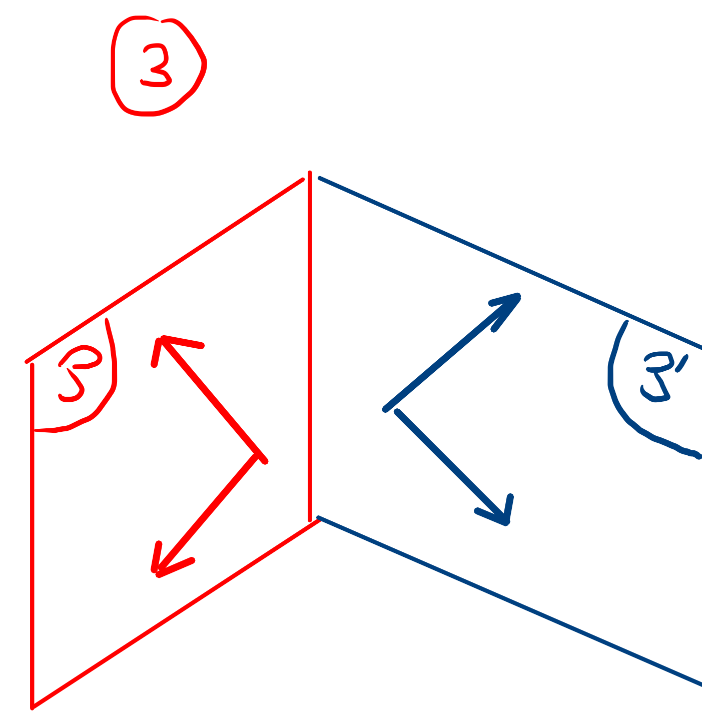
1 • Deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Elles ne sont donc pas sécantes car sinon on dit qu'elles sont perpendiculaires.

2 • Une droite et un plan sont orthogonaux si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs de base du plan.

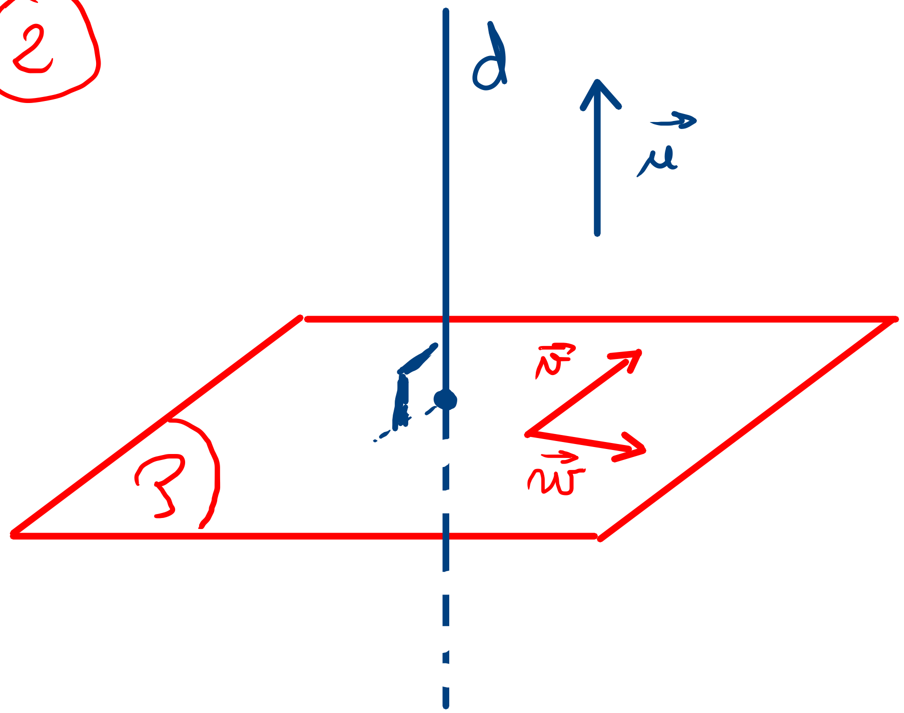
3 • Deux plans sont perpendiculaires si deux vecteurs définissant l'un sont orthogonaux à deux vecteurs définissant l'autre.



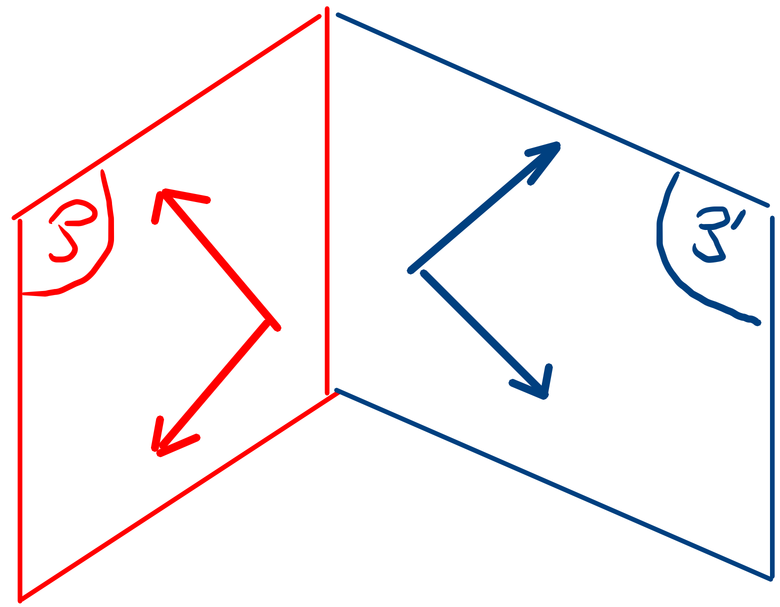


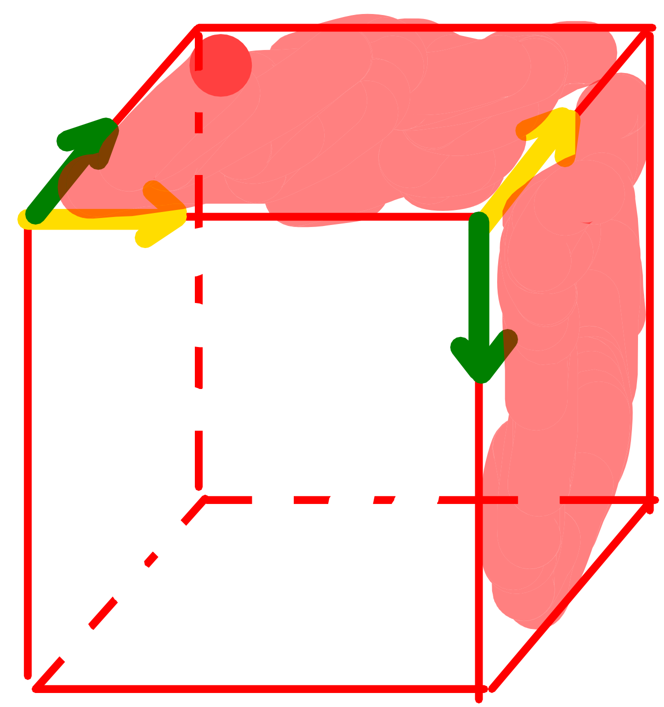


2



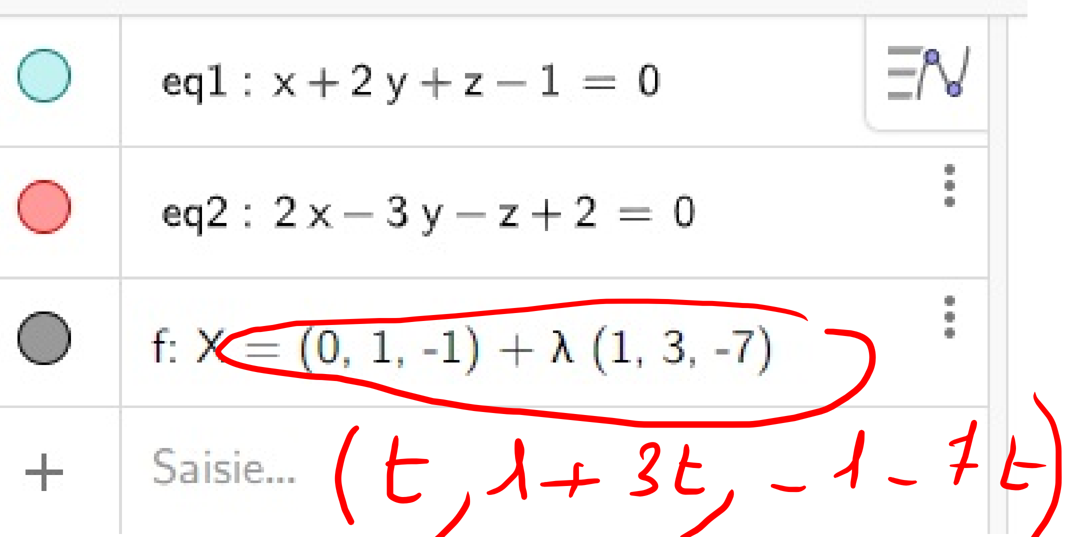
3





$$M(x;y;z) \in (P_1) \cap (P_2) \iff \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-3y-z+2=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = t \\ y = 1+3t \\ z = -1-7t \end{cases}$$



$(t, 1+3t, -1-7t)$

SYSTEME_EQUATIONS1
SYSTEME_EQUATIONS2

INTERSECTION_PLANS_EQUATION_CARTESIENNE.html
INTERSECTION_PLANS_EQUATION_CARTESIENNE1.html

Incidences Plan / Plan

P_1 et P_2 : équations cartésiennes

$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$

vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$

- $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$
  - strictement parallèles
    Equations non équivalentes
  - confondus
    Equations équivalentes
- sécants $\longrightarrow$ droite

$$\begin{cases} x = t \\ P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots t \\ y = \dots t \\ z = \dots t \end{cases}$$ représentation paramétrique.

INTERSECTION_PLAN_PLAN1
INTERSECTION_PLAN_PLAN2

Incidence droite / Plan

d_1 : représentation paramétrique $\rightarrow \vec{u}$ vecteur directeur

$\mathcal{P}_1$: équation cartésienne $\rightarrow \vec{n}$ vecteur normal

$\vec{u}$ et $\vec{n}$

- $\vec{u} \perp \vec{n}$
  - $d_1 \subset \mathcal{P}_1$

    $t = 0 \rightarrow x, y, z \rightarrow ax + by + cz + d = 0$
  - d_1 strictement $//\ \mathcal{P}_1$

    $t = 0 \rightarrow x, y, z \rightarrow ax + by + cz + d \neq 0$

  $$\begin{cases} x = \dots t \\ y = \dots t \\ z = \dots t \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

- Point d'intersection $\longrightarrow$ coordonnées

  $$\begin{cases} x = \dots t \\ y = \dots t \\ z = \dots t \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

INTERSECTION_DROITE_PLAN1
INTERSECTION_DROITE_PLAN2

$(P): 13x + 4y - 1z + 10 = 0$ $(P'): -2x - 2y + 2z - 2 = 0$	○ (P) et (P') sont parallèles (distincts) ○ (P) et (P') sont confondus ◉ (P) et (P') sont sécants et leur droite d'intersection admet la représentation paramétrique : x=t y= -4t-3 z= -3t-2
$(P): -3x - 5y - 3z + 8 = 0$ $(P'): 6x + 10y + 6z + 8 = 0$	◉ (P) et (P') sont parallèles (distincts) ○ (P) et (P') sont confondus ○ (P) et (P') sont sécants et leur droite d'intersection admet la représentation paramétrique : x=t y= z=

$x = t$

$$\begin{cases} 13t + 4y - z + 10 = 0 \\ -2t - 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4y - z = -10 - 13t \\ 2y + 2z = 2 + 2t \end{cases}$$

$$2 \to \begin{cases} 4y - z = -10 - 13t \\ 3z = -6 - 9t \end{cases}$$

$(P) : 5x - 3y + 5z + 9 = 0$ $(P') : -10x + 6y - 10z - 18 = 0$	○ (P) et (P') sont parallèles (distincts) ◉ (P) et (P') sont confondus ○ (P) et (P') sont sécants et leur droite d'intersection admet la représentation paramétrique : x=t y= z=
$(P) : 9x + 4y - 3z - 13 = 0$ $(P') : 4x + 2y - 2z - 6 = 0$	○ (P) et (P') sont parallèles (distincts) ○ (P) et (P') sont confondus ◉ (P) et (P') sont sécants et leur droite d'intersection admet la représentation paramétrique : x=t y=-3t+4 z=-t+1

Incidence droite / droite

2 représentations paramétriques de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$

$\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$

- $\vec{u}_1 // \vec{u}_2$
  - strictement parallèles
  - confondues
- non colinéaires
  - non coplanaires
  - sécantes

$$\begin{cases} x = \dots t \\ y = \dots t \\ z = \dots t \\ x = \dots s \\ y = \dots s \\ z = \dots s \end{cases} \iff \begin{cases} \dots t = \dots s \\ \dots t = \dots s \\ \dots t = \dots s \end{cases}$$

Exercice: plan/droite

$(P) : 2x+3y+4z-96=0$ $(d) : \begin{cases} x = -5+3t \\ y = -2-4t \\ z = 1-3t \end{cases}$	○ (d) est incluse dans (P) ○ (P) et (d) sont sécants et leur point d'intersection est I(; ;) ○ (d) est parallèle au plan (P)
$(P) : -4x+4y+4z-9=0$ $(d) : \begin{cases} x = -2+2t \\ y = 3+5t \\ z = 3-3t \end{cases}$	○ (d) est incluse dans (P) ○ (P) et (d) sont sécants et leur point d'intersection est I(; ;) ○ (d) est parallèle au plan (P)
$(P) : -2x-2y-2z-68=0$ $(d) : \begin{cases} x = 5-4t \\ y = 1+4t \\ z = -4-4t \end{cases}$	○ (d) est incluse dans (P) ○ (P) et (d) sont sécants et leur point d'intersection est I(; ;) ○ (d) est parallèle au plan (P)
$(P) : -6x-3y-3z-18=0$ $(d) : \begin{cases} x = -4-1t \\ y = 5-3t \\ z = -3+5t \end{cases}$	○ (d) est incluse dans (P) ○ (P) et (d) sont sécants et leur point d'intersection est I(; ;) ○ (d) est parallèle au plan (P)

$(P): 2x+3y+4z-96=0$ $(d): \begin{cases} x = -5+3t \\ y = -2-4t \\ z = 1-3t \end{cases}$
$(P): -4x+4y+4z-9=0$ $(d): \begin{cases} x = -2+2t \\ y = 3+5t \\ z = 3-3t \end{cases}$
$(P): -2x-2y-2z-68=0$ $(d): \begin{cases} x = 5-4t \\ y = 1+4t \\ z = -4-4t \end{cases}$
$(P): -6x-3y-3z-18=0$ $(d): \begin{cases} x = -4-1t \\ y = 5-3t \\ z = -3+5t \end{cases}$

droite / Plan

1

$(P): 2x+3y+4z-96=0$

$(d): \begin{cases} x = -5+3t \\ y = -2-4t \\ z = 1-3t \end{cases}$

On a donc

$2(-5+3t)+3(-2-4t)+4(1-3t)-96=0$

$-10+6t-6-12t+4-12t-96=0$

$-18t-108=0$

$t=\frac{108}{-18}$

$\boxed{t=-6}$

$\begin{cases} x=-5+3\times(-6)=-23 \\ y=-2-4\times(-6)=22 \\ z=1-3\times(-6)=19 \end{cases}$

Intersection $I(-23, 22, 19)$

②

$(P): -4x + 4y + 4z - 9 = 0$

$$(d): \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 + 5t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

$(P): -2x - 2y - 2z - 68 = 0$

$$(d): \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = 1 + 4t \\ z = -4 - 4t \end{cases}$$

$-4(-2+2t) + 4(3+5t) + 4(3-3t) = 0$

$\Leftrightarrow 8 - 8t + 12 + 20t + 12 - 12t = 0$

$\Leftrightarrow 32 = 0$ système Incompatible.

donc $(d) \mathbin{//} (P)$

3

$(P) : -2x - 2y - 2z - 68 = 0$

$$(d) : \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = 1 + 4t \\ z = -4 - 4t \end{cases}$$

$(P) : -6x - 3y - 3z - 18 = 0$

$$(d) : \begin{cases} x = -4 - 1t \\ y = 5 - 3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$$

$-2(5-4t) - 2(1+4t) - 2(-4-4t) - 68 = 0$

$-10 + 8t - 2 - 8t + 8 + 8t - 68 = 0$

$8t - 72 = 0$

$t = 9$

$$\begin{cases} x = 5 - 4 \times 9 = \\ y = 1 + 4 \times 9 = \\ z = -4 - 4 \times 9 = \end{cases}$$

Intersection

(4)

$$(P) : -6x - 3y - 3z - 18 = 0$$

$$(d) : \begin{cases} x = -4 - 1t \\ y = 5 - 3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$$

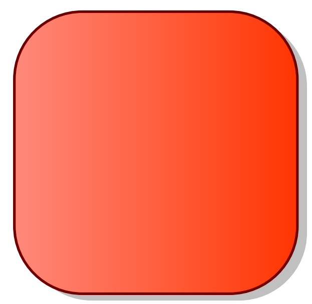
$$-6(-4-t) - 3(5-3t) - 3(-3+5t) - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow 24 + 6t - 15 + 9t + 9 - 15t - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

donc $(d) \subset P$

EXOID 399 INTERSECTION_DROITE_PLAN1



Incidence droite / droite

2 représentations paramétrique de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$

- $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$
  - $\vec{u}_1 // \vec{u}_2$
    - strictement parallèles
    - confondues
  - non parallèles
    - non coplanaires
    - sécantes

$$\begin{cases} x = \dots t \\ y = \dots t \\ z = \dots t \\ x = \dots s \\ y = \dots s \\ z = \dots s \end{cases} \iff \begin{cases} \dots t = \dots s \\ \dots t = \dots s \\ \dots t = \dots s \end{cases}$$

Si possible,
faire résoudre le système par la calculatrice.

Exercice droite/droite

$$(d_1) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$

$$(d_2) : \begin{cases} x = -1 - 2t' \\ y = -3 + 4t' \\ z = 4 + 4t' \end{cases}$$

1

On va résoudre :

$$\begin{cases} -1 + t = x_I = -1 - 2t' \\ -3 + 3t = y_I = -3 + 4t' \\ 4 - 2t = z_I = 4 + 4t' \end{cases}$$

Normalisation $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} t + 2t' = 0 \\ 3t - 4t' = 0 \\ -2t - 4t' = 0 \end{cases}$$

$\vec{u_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ non colinéaires

Normalisation $\Longleftrightarrow \begin{cases} t + 2t' = 0 \\ (3t - 4t' = 0) \times 2 \\ (-2t - 4t' = 0) \times 3 \end{cases}$

$\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}$

non colinéaires

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t + 2t' = 0 \\ 6t - 8t' = 0 \\ -6t - 12t' = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t + 2t' = 0 \\ 6t - 8t' = 0 \\ -20t' = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 6t = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

système compatible

$I\,(-1\,;-3\,;\,4)$

$$(d_1) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$

$$(d_2) : \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$$

②

$$(d_1) : \begin{cases} x = 3+4t \\ y = -3-2t \\ z = -3+2t \end{cases}$$

$$(d_2) : \begin{cases} x = 4+4t' \\ y = -4-2t' \\ z = 1+2t' \end{cases}$$

$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Les droites sont parallèles (strictement ? ou confondues ?)

$$\begin{cases} 3+4t = 4+4t' \\ -3-2t = -4-2t' \\ -3+2t = 1+2t' \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4t-4t' = 1 \\ -2t+2t' = -1 \\ 2t-2t' = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4t-4t' = 1 \\ -2t+2t' = -1 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

Incompatible donc strictement //

3

$$(d_1) : \begin{cases} x = -1-3t \\ y = -1+t \\ z = -1-4t \end{cases}$$

$$(d_2) : \begin{cases} x = -4-3t' \\ y = t' \\ z = -5-4t' \end{cases}$$

$$\vec{u_1}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{u_2}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\vec{u_1} \,//\, \vec{u_2}$

strictement // ou confondues.

$$\begin{cases} -1-3t = -4-3t' \\ -1+t = t' \\ -1-4t = -5-4t' \end{cases} \iff \begin{cases} -3t+3t' = -3 \\ (t-t' = 1)\times 4 \\ -4t+4t' = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3t+3t' = -3 \\ 4t-4t' = 4 \\ -4t+4t' = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} -3t+3t' = -3 \\ 4t-4t' = 4 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1-3t = -4-3t' \\ -1+t = t' \\ -1-4t = -5-4t' \end{cases} \iff \begin{cases} -3t+3t' = -3 \\ (t-t' = 1)\times 4 \\ -4t+4t' = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3t+3t' = -3 \\ 4t-4t' = 4 \\ -4t+4t' = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} (-3t+3t' = -3)\times 4 \\ (4t-4t' = 4)\times 3 \\ \cancel{0=0} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -12t+12t' = -12 \\ 12t-12t' = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} -12t+12t' = -12 \\ \cancel{0=0} \end{cases}$$

$$\iff (-12t+12t' = -12)^{\div 12} \iff \boxed{-t+t' = -1}$$

Infinité de solutions pour t et t'

$$(d_1) : \begin{cases} x = -1-3t \\ y = -1+t \\ z = -1-4t \end{cases}$$

$$(d_2) : \begin{cases} x = -4-3t' \\ y = t' \\ z = -5-4t' \end{cases}$$

Autre méthode

$t = 0$ $\quad A(-1,-1,-1) \in (d_1)$

$A \in d_2$? : $\begin{cases} -1 = -4-3t' \\ -1 = t' \\ -1 = -5-4t' \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} t' = -1 \\ t' = -1 \\ t' = -1 \end{cases}$ $\quad$ donc $A \in (d_2)$

Remarque si $\begin{cases} t' = 1 \\ t' = 2 \\ t' = 2 \end{cases}$ strict parallèle

4

$$(d_1) : \begin{cases} x = -1+t \\ y = -2-3t \\ z = -3-t \end{cases}$$

$$(d_2) : \begin{cases} x = 4-2t' \\ y = -1+t' \\ z = -4+2t' \end{cases}$$

$\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{u_2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ non colinéaires.

$$\begin{cases} -1+t = 4-2t' \\ -2-3t = -1+t' \\ -3-t = -4+2t' \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t+2t' = 5 \\ -3t-t' = 1 \\ (-t-2t' = -1)\times -3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t+2t' = 5 \\ -3t-t' = 1 \\ 3t+6t' = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t+2t' = 5 \\ -3t-t' = 1 \\ 5t' = 4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \\ t' = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$-3t = 1+\frac{4}{5} \Leftrightarrow t = \frac{1+\frac{4}{5}}{-3}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t+2t' = 5 \\ -3t - t' = 1 \\ -t - 2t' = -1 \end{cases} \times -3 \Longleftrightarrow \begin{cases} t+2t' = 5 \\ -3t - t' = 1 \\ 3t + 6t' = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+2t' = 5 \\ -3t - t' = 1 \\ 5t' = 4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t = 3\frac{1}{5} \\ t = -\frac{3}{5} \\ t' = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Système incompatible

(d_1) et (d_2)

non coplanaires

$$-3t = 1 + \frac{4}{5} \Leftrightarrow t = \frac{1+\frac{4}{5}}{-3} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{-3}{1}}$$

$$t = \frac{9}{-15}$$

$$t = \frac{-3}{5}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

$$t = 5 - 2t'$$

$$= 5 - 2 \times \frac{-3}{5} = 5 + \frac{6}{5}$$

$$= \frac{25+6}{5} = \frac{31}{5}$$

$(d_1) : \begin{cases} x = -1+t \\ y = -2-3t \\ z = -3-t \end{cases}$ $(d_2) : \begin{cases} x = 4-2t \\ y = -1+t \\ z = -4+2t \end{cases}$	○ (d1) et (d2) sont confondues ○ (d1) et (d2) sont sécantes et leur point d'intersection est I(; ;) ○ (d1) et (d2) sont parallèles (distinctes) ○ (d1) et (d2) sont non coplanaires

$(d_1) : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+t \\ y &=& -3+3t \\ z &=& 4-2t \end{array}\right.$ $(d_2) : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1-2t \\ y &=& -3+4t \\ z &=& 4+4t \end{array}\right.$	(d1) et (d2) sont confondues (d1) et (d2) sont sécantes et leur point d'intersection est I(; ;) (d1) et (d2) sont parallèles (distinctes) (d1) et (d2) sont non coplanaires
$(d_1) : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+4t \\ y &=& -3-2t \\ z &=& -3+2t \end{array}\right.$ $(d_2) : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4+4t \\ y &=& -4-2t \\ z &=& 1+2t \end{array}\right.$	(d1) et (d2) sont confondues (d1) et (d2) sont sécantes et leur point d'intersection est I(; ;) (d1) et (d2) sont parallèles (distinctes) (d1) et (d2) sont non coplanaires
$(d_1) : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1-3t \\ y &=& -1+t \\ z &=& -1-4t \end{array}\right.$ $(d_2) : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4-3t \\ y &=& t \\ z &=& -5-4t \end{array}\right.$	(d1) et (d2) sont confondues (d1) et (d2) sont sécantes et leur point d'intersection est I(; ;) (d1) et (d2) sont parallèles (distinctes) (d1) et (d2) sont non coplanaires
$(d_1) : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+t \\ y &=& -2-3t \\ z &=& -3-t \end{array}\right.$ $(d_2) : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4-2t \\ y &=& -1+t \\ z &=& -4+2t \end{array}\right.$	(d1) et (d2) sont confondues (d1) et (d2) sont sécantes et leur point d'intersection est I(; ;) (d1) et (d2) sont parallèles (distinctes) (d1) et (d2) sont non coplanaires

$t = x$

$t' = y$


```
▼ 0: Array(4)
    0: "\\((d_1):\\left\\{\\begin{array}{r c l}x &
    1: "\\((d_2):\\left\\{\\begin{array}{r c l}x &
    2: "SECANTES"
  ▶ 3: (3) [-1, -3, 4]
    length: 4
  ▶ [[Prototype]]: Array(0)
▼ 1: Array(4)
    0: "\\((d_1):\\left\\{\\begin{array}{r c l}x &
    1: "\\((d_2):\\left\\{\\begin{array}{r c l}x &
    2: "PARALLELES"
    3: null
    length: 4
  ▶ [[Prototype]]: Array(0)
▼ 2: Array(4)
    0: "\\((d_1):\\left\\{\\begin{array}{r c l}x &
    1: "\\((d_2):\\left\\{\\begin{array}{r c l}x &
    2: "CONFONDUES"
    3: null
    length: 4
  ▶ [[Prototype]]: Array(0)
▼ 3: Array(4)
    0: "\\((d_1):\\left\\{\\begin{array}{r c l}x &
    1: "\\((d_2):\\left\\{\\begin{array}{r c l}x &
    2: "NONCOPLANAIRES"
    3: null
    length: 4
```


Avec la calculatrice

POSITION_RELATIVE_DROITES1

Exercice

$(P) : 15x - 3y - 3z + 24 = 0$ $(P') : 15x + 1y - 4z + 2 = 0$	○ (P) et (P') sont parallèles (distincts) ○ (P) et (P') sont confondus ● (P) et (P') sont sécants et leur droite d'intersection admet la représentation paramétrique : x=t y= z=
$(P) : -4x + 5y - 2z - 2 = 0$ $(P') : -12x + 15y - 6z + 6 = 0$	● (P) et (P') sont parallèles (distincts) ○ (P) et (P') sont confondus ○ (P) et (P') sont sécants et leur droite d'intersection admet la représentation paramétrique : x=t y= z=

$-3 + 2t$

$2t - 3$

```
▼ Array(2) i
  ▼ 0: Array(4)
      0: "\\((P):15x-3y-3z+24=0\\)"
      1: "\\((P'):15x+1y-4z+2=0\\)"
      2: "SECANTS"
    ▶ 3: (2) ['t+6', '4t+2']
      length: 4
    ▶ [[Prototype]]: Array(0)
  ▼ 1: Array(4)
      0: "\\((P):-4x-5y-2z-2=0\\)"
      1: "\\((P'):-12x-15y-6z+6=0\\)"
      2: "PARALLELES"
      3: null
      length: 4
    ▶ [[Prototype]]: Array(0)
    length: 2
```

$$\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = -3t \end{cases}$$

LIMITES_INFINIES_BPLUS_BMOINS1.html

1) $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{7x}{25 - x^2} = \dfrac{\boxed{}\ ?}{\boxed{}\ ?} = \boxed{}\ ?$

2) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{-10 - 3x}{3 - x} = \dfrac{\boxed{}\ ?}{\boxed{}\ ?} = \boxed{}\ ?$

3) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{5x}{x^2 - 9} = \dfrac{\boxed{}\ ?}{\boxed{}\ ?} = \boxed{}\ ?$

4) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3x - 5}{x - 3} = \dfrac{\boxed{}\ ?}{\boxed{}\ ?} = \boxed{}\ ?$

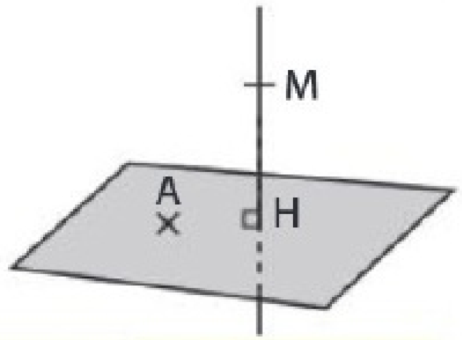
Projection orthogonale

Définition Projeté orthogonal d'un point

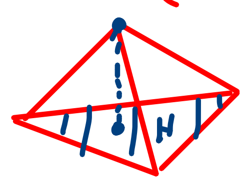
Le projeté orthogonal d'un point sur une droite (ou un plan) est le point d'intersection de la droite (ou du plan) et de la perpendiculaire à cette droite (ou à ce plan) passant par le point donné.

Propriété Distance d'un point à un plan

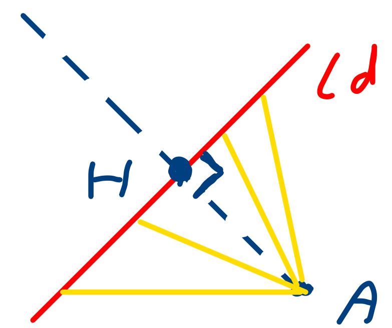
On appelle distance d'un point M à un plan, la longueur MH où H est le projeté orthogonal de M sur le plan. Cette distance est la plus courte distance entre le point M et un point du plan.



Intérêt : 1 calcul volume de pyramide

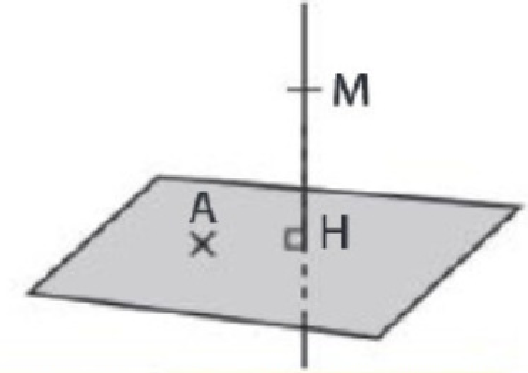


2 Distance minimale :

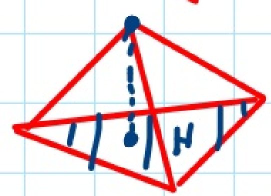


Propriété Distance d'un point à un plan

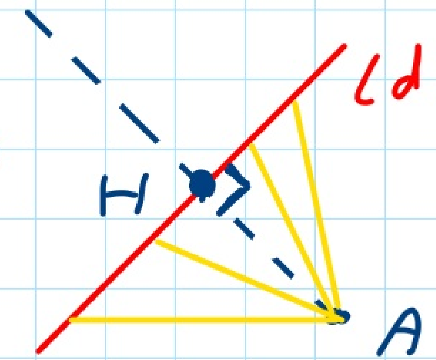
On appelle distance d'un point M à un plan, la longueur MH où H est le projeté orthogonal de M sur le plan. Cette distance est la plus courte distance entre le point M et un point du plan.



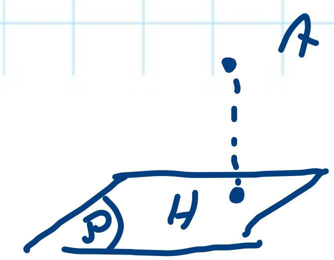
Intérêt : ① calcul volume de pyramide



② Distance minimale :



Exercice (Classique)



Soit le plan P d'équation cartésienne $P : 3x + 5y - 2z + 18 = 0$
et A le point de coordonnées $A(10; 6; 1)$.
Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan P.
Les coordonnées du point H sont (; ;)

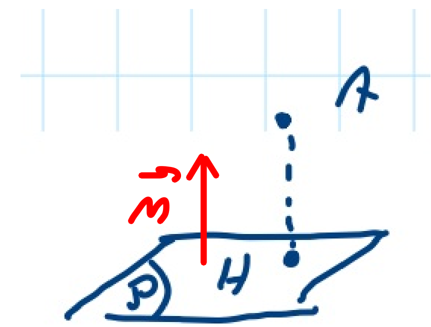
Exercice (Classique)

Soit le plan P d'équation cartésienne $P : 3x + 5y - 2z + 18 = 0$
et A le point de coordonnées $A(10; 6; 1)$.
Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan P.
Les coordonnées du point H sont (; ;)

$(x;y;z)$

$H \in P \cap d \iff H \in (P)$ et $\vec{AH} \,//\, \vec{n}$

et projeté orth.



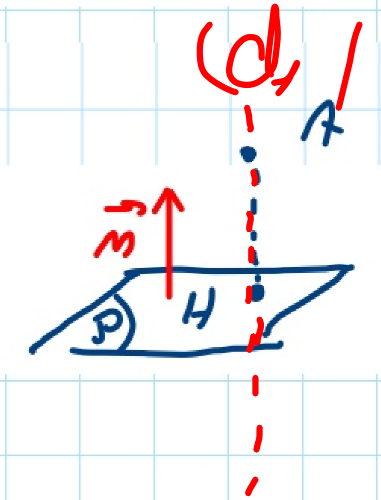
$$\iff 3x + 5y - 2z + 18 = 0$$

$$\vec{AH}\begin{pmatrix} x - 10 \\ y - 6 \\ z - 1 \end{pmatrix} = t.\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$(x;y;z)$

$H \in \mathcal{P} \cap d \iff H \in (\mathcal{P})$ et $\vec{AH} \,//\, \vec{n}$

et projet. orth.



$\iff \quad 3x + 5y - 2z + 18 = 0$

$$\vec{AH}\begin{pmatrix} x - 10 \\ y - 6 \\ z - 1 \end{pmatrix} = t.\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + 5y - 2z + 18 = 0 \\ x - 10 = 3t \\ y - 6 = 5t \\ z - 1 = -2t \end{cases}$$

représentat. paramétrique de la droite (d_1)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y - 2z + 18 = 0 \\ x - 10 = 3t \\ y - 6 = 5t \\ z - 1 = -2t \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x - 10 = 3t \\ y - 6 = 5t \\ z - 1 = -2t \end{matrix}\right\} \text{représentation paramétrique de la droite } (d_1)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3(10+3t) + 5(6+5t) - 2(1-2t) + 18 = 0 \\ x = 10 + 3t \\ y = 6 + 5t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3(10+3t) + 5(6+5t) - 2(1-2t) + 18 = 0 \\ x = 10 + 3t \\ y = 6 + 5t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 9t + 30 + 30 + 25t - 2 + 4t + 18 = 0 \\ \text{''} \\ \text{''} \\ \text{''} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 38t = -76 \\ x = 10 + 3t \\ y = 6 + 5t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ x = 4 \\ y = -4 \\ z = 5 \end{cases}$$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC)

b) $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

donc l'équation de (ABC) est de la forme :

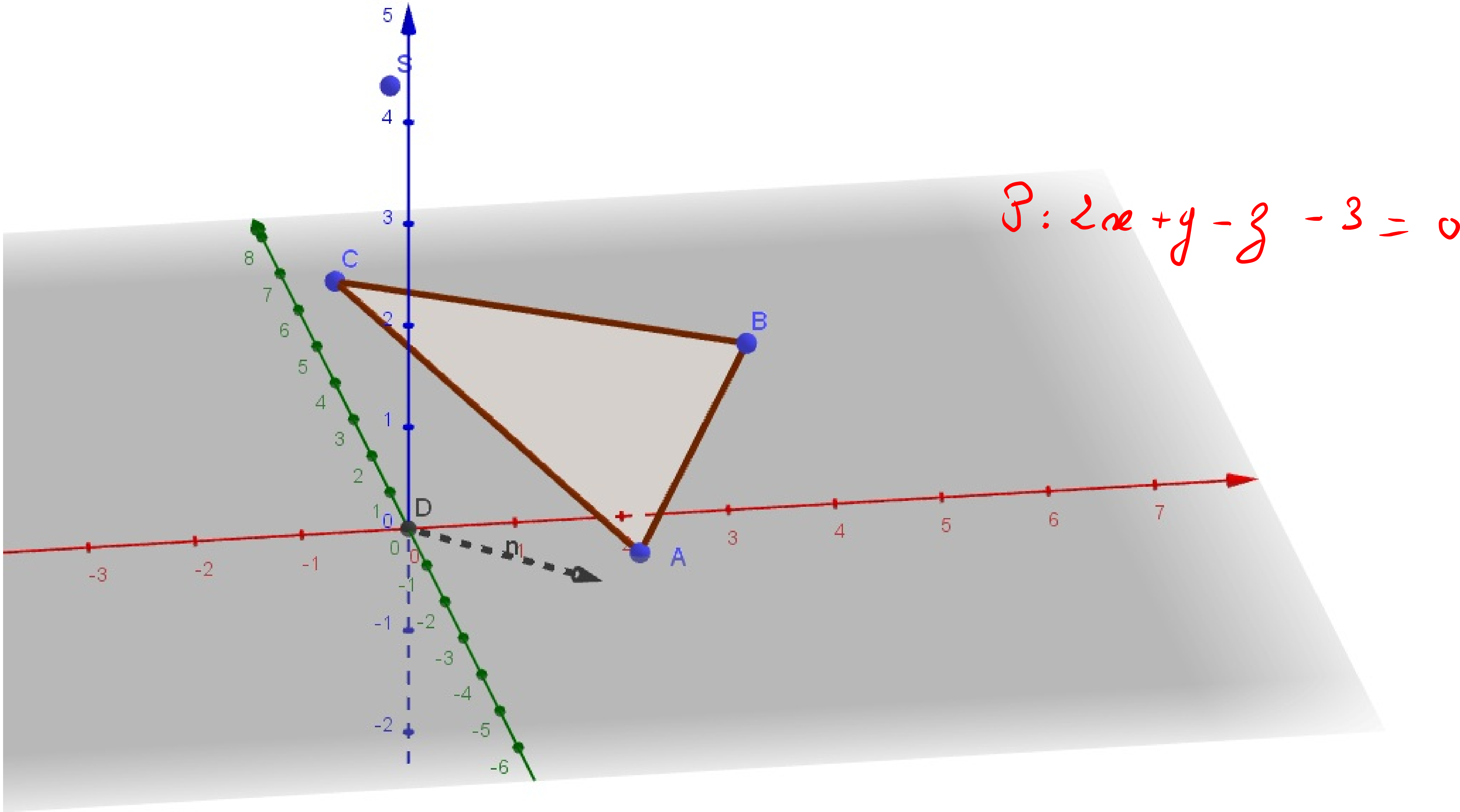
$$(ABC) : 2x + 1y - 1z + d = 0$$

De plus $A \in (ABC) \iff 2 \times 2 + 1 \times (-1) - 1 \times 0 + d = 0$

$A(2\,;-1\,;0)$ $\iff 4 - 1 + d = 0$

$\iff d = -3$

donc $(ABC) : \boxed{2x + y - z - 3 = 0}$



BAC_2023_REF1

c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

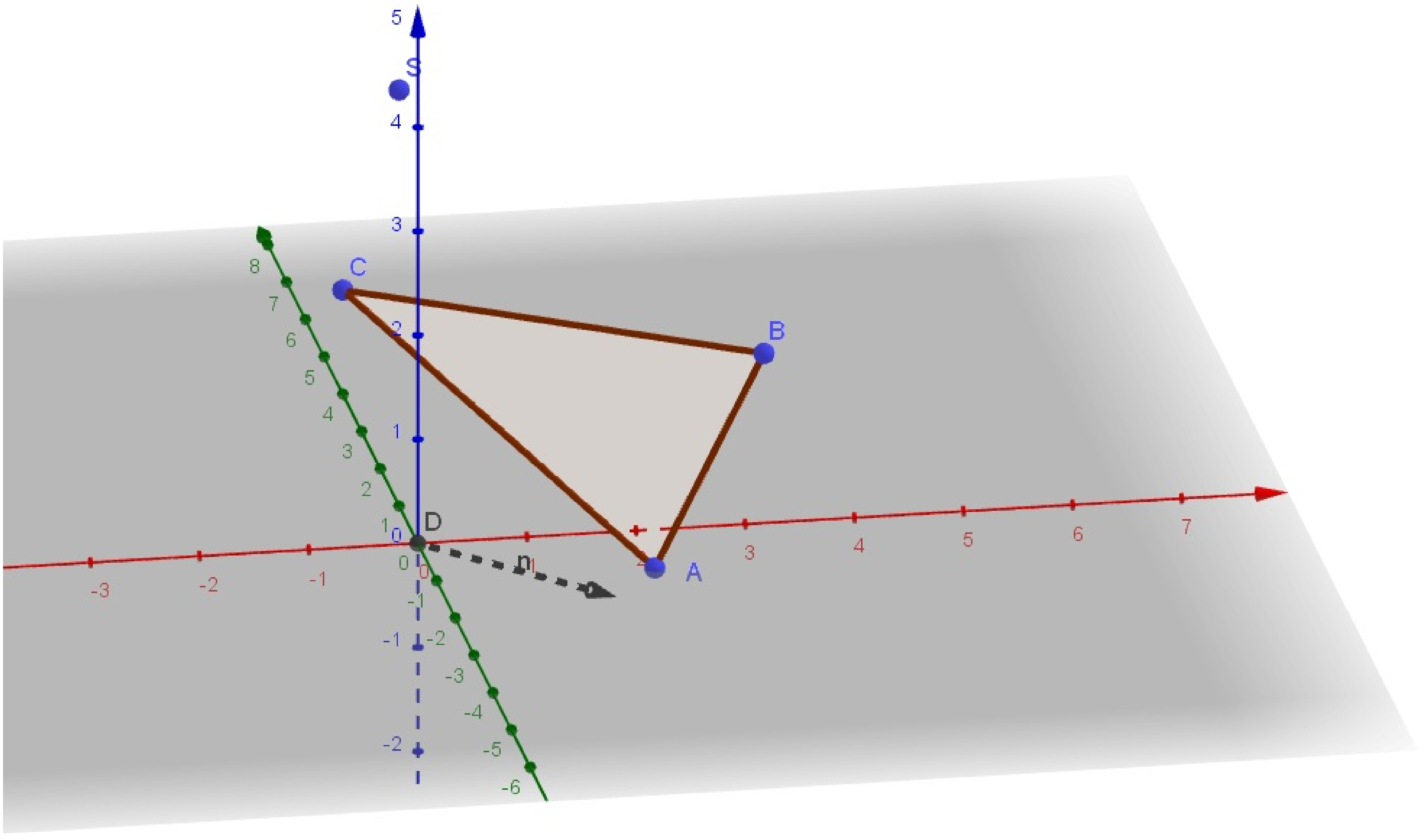
$(ABC) : 2x + y - z - 3 = 0$

$S(0\,;1\,;4) \in (ABC)$

$\iff 2 \times 0 + 1 - 4 - 3 = 0$

$\iff -6 = 0$ absurde

donc $S \notin (ABC)$



S
C
B
A
D
n

$(ABC) : 2x + y - z - 3 = 0$

$S(0 ; 1 ; 4)$

a) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc c'est un vecteur directeur de (d)

$2x + 1y - 1z - 3 = 0$

De plus $S(0 ; 1 ; 4) \in (d)$

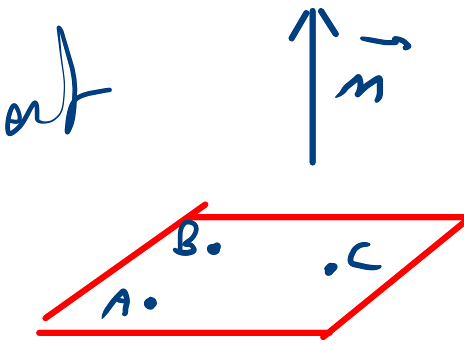
$$(d) : \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 1 + 1t \\ z = 4 + (-1)t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

a) D'après le cours "$\vec{n} \perp (ABC)$" si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs formant une base du plan (ABC)



$(\vec{AB}, \vec{AC})$ forment une base de (ABC) car ils sont non colinéaires : dét$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \dots$ (voir plus fond)

D'après le cours "$\vec{n} \perp (ABC)$" si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs formant une **base** du plan (ABC)

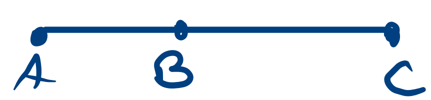
$(\vec{AB}, \vec{AC})$ forment une base de (ABC) car ils sont non colinéaires : dét$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \dots$ (voir plus tard)

(Boeuf) En effet $\vec{AB} = k\vec{AC} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} 1 = -2k \\ 0 = k \times 5 \\ 2 = k \times 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = 0 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Système incompatible donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non colinéaires

(Bagelle) Si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ étaient colinéaires, ABC ne serait pas un triangle rectangle.



On a alors

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 2 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \times (-2) + 1 \times 5 + (-1) \times 1 = 0$$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC) car orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC)

b) $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

donc l'équation de (ABC) est de la forme :

$$(ABC) : 2x + 1y - 1z + d = 0$$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC)

b) $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

donc l'équation de (ABC) est de la forme :

$(ABC) : 2x + 1y - 1z + d = 0$

De plus $A \in (ABC) \iff 2 \times 2 + 1 \times (-1) - 1 \times 0 + d = 0$

$A(2;-1;0)$ $\iff 4 - 1 + d = 0$

$\iff d = -3$

donc $(ABC) : \boxed{2x + y - z - 3 = 0}$

Exercice 2 : Intersection de (P) et (P') ?

INTERSECTION_PLANS_EQUATION_CARTESIENNE
INTERSECTION_PLANS_EQUATION_CARTESIENNE1

Exercice 3 : Intersection de (d) et (P)

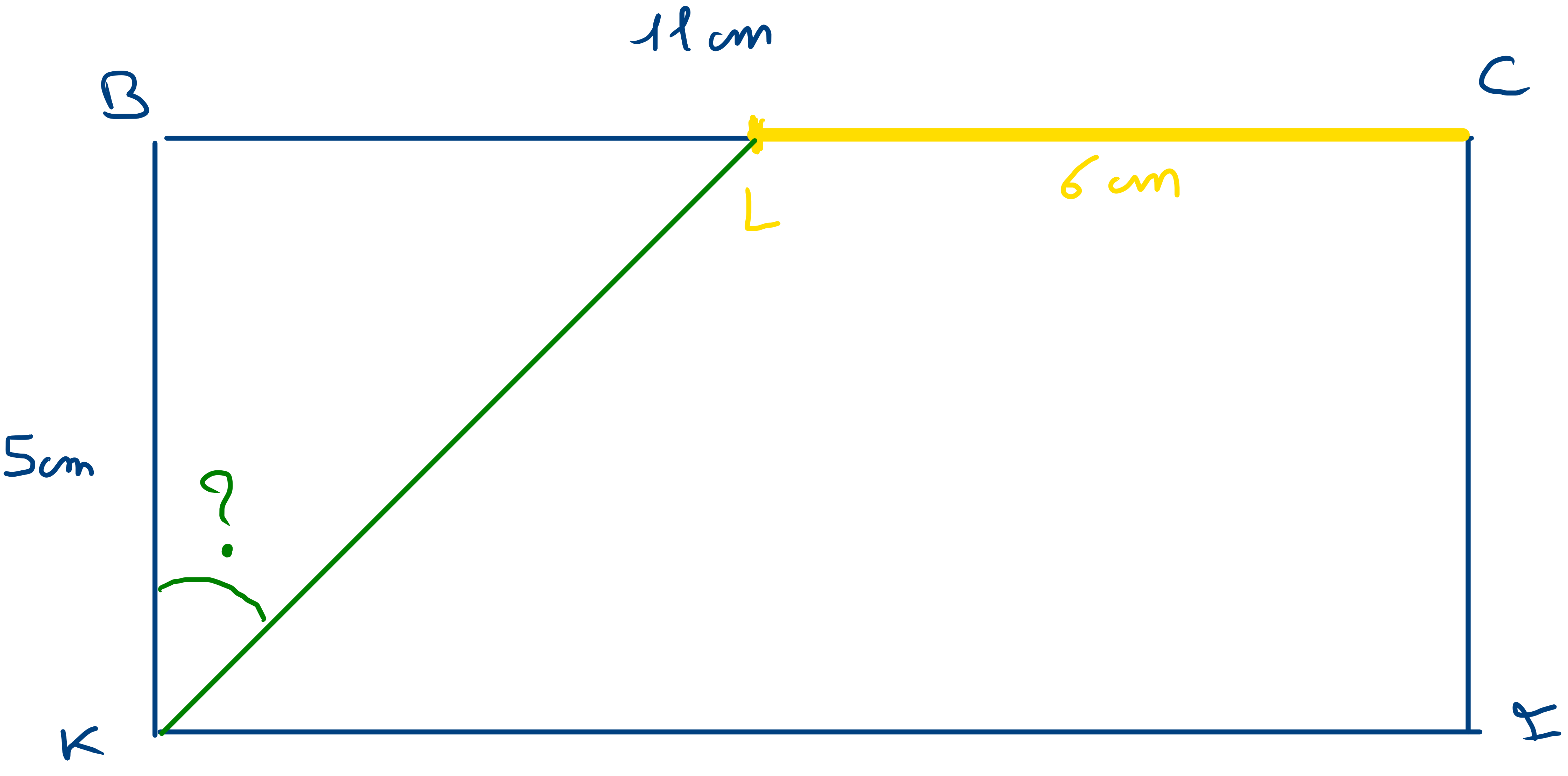
INTERSECTION_DROITE_PLAN1

Exercice 4 : $(d) \perp (P)$

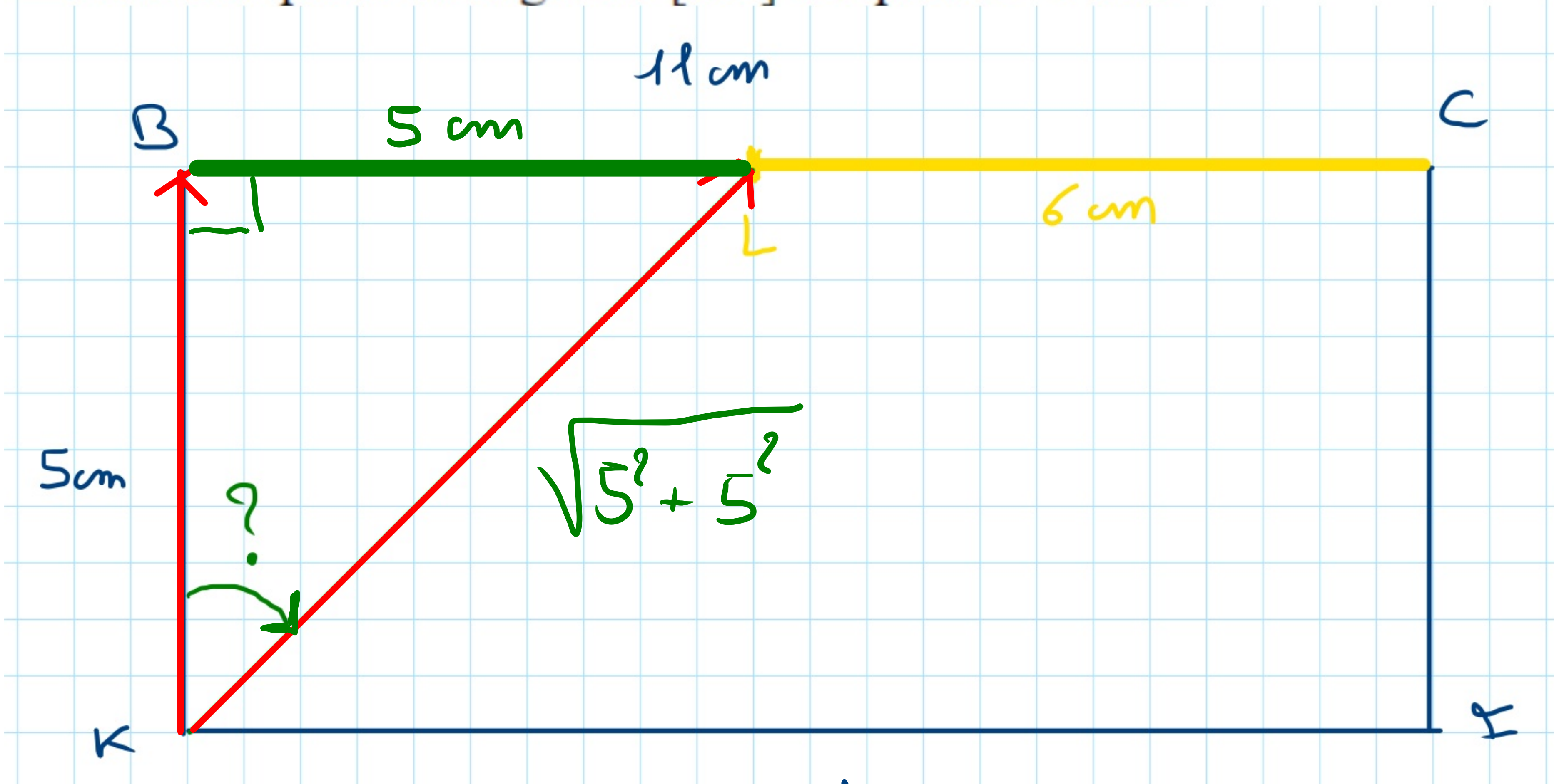
PROJECTION_ORTHO1

GEOMETRIE DANS LE PLAN:
Angles et produit scalaire

On considère un rectangle BCIK tel que BC=11 cm et KB=5 cm
Soit L un point du segment [BC] tel que LC=6 cm.



On considère un rectangle BCIK tel que BC=11 cm et KB=5 cm
Soit L un point du segment [BC] tel que LC=6 cm.

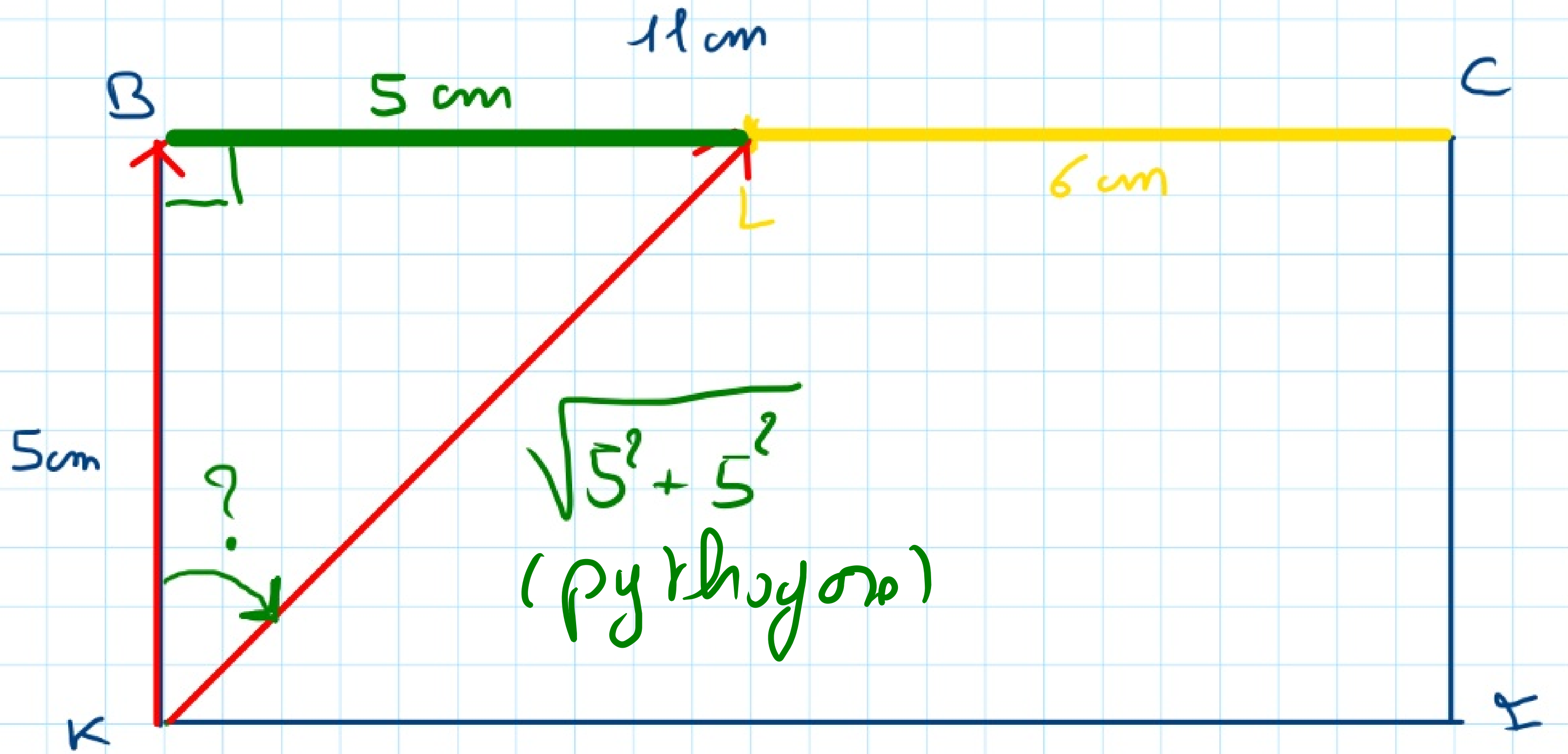


Sans trigonométrie :

$(\vec{KB}, \vec{KL})$

$$\vec{KB}\cdot\vec{KL} = \|\vec{KB}\| \times \|\vec{KL}\| \times \cos(?)$$

$$5 \times 5 = 5 \times \sqrt{50} \times \cos(?)$$



Sans trigonométrie :

$(\vec{KB}, \vec{KL})$

$$\vec{KB} \cdot \vec{KL} = \|\vec{KB}\| \times \|\vec{KL}\| \times \cos(?)$$

$$5 \times 5 = 5 \times \sqrt{50} \times \cos(?)$$

$$\cos(?) = \frac{5 \times 5}{5 \times \sqrt{50}}$$

$\cos^{-1}((5*5)/(5*\sqrt{50}))$

45

$(ABC) : 2x + y - z - 3 = 0$

$S(0 ; 1 ; 4)$

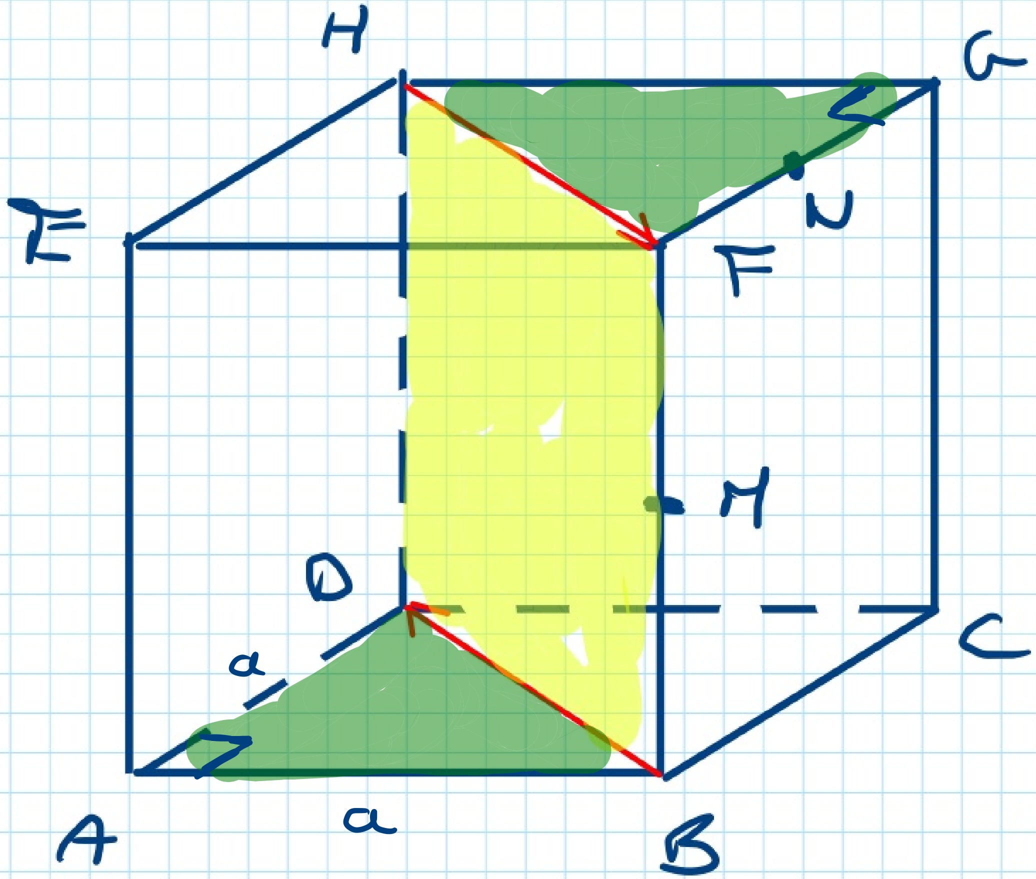
a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc c'est un vecteur directeur de (d)

$2x + 1y - 1z - 3 = 0$

De plus $S(0 ; 1 ; 4) \in (d)$

$$(d) : \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 1 + 1t \\ z = 4 + (-1)t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{HF}$



$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DB}$

$= -\|\overrightarrow{BD}\| \times \|\overrightarrow{DB}\|$

$= -\sqrt{a^2+a^2} \times \sqrt{a^2+a^2}$

(Pythagore dans le triangle ABD)

$= -\sqrt{2a^2} \times \sqrt{2a^2}$

$= -\sqrt{2a^2}^{\,2}$

$= -2a^2$

$$H(x;y;z) \in (d) \cap (ABC) \iff \begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = 4-t \\ 2x+y-z-3=0 \end{cases}$$

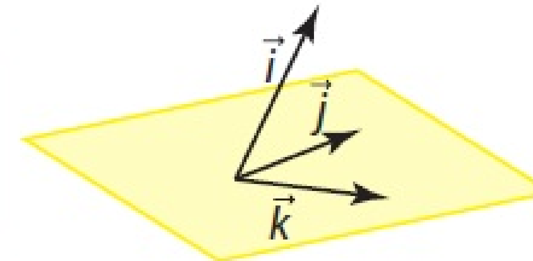
$$\iff \begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = 4-t \\ 2\times 2t+(1+t)-(4-t)-3=0 \end{cases} \quad \dots$$

$$\iff \begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = 4-t \\ 6t-6=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ t = 1 \end{cases} \quad \text{donc } H(2;2;3)$$

③ A propos des "Bases"

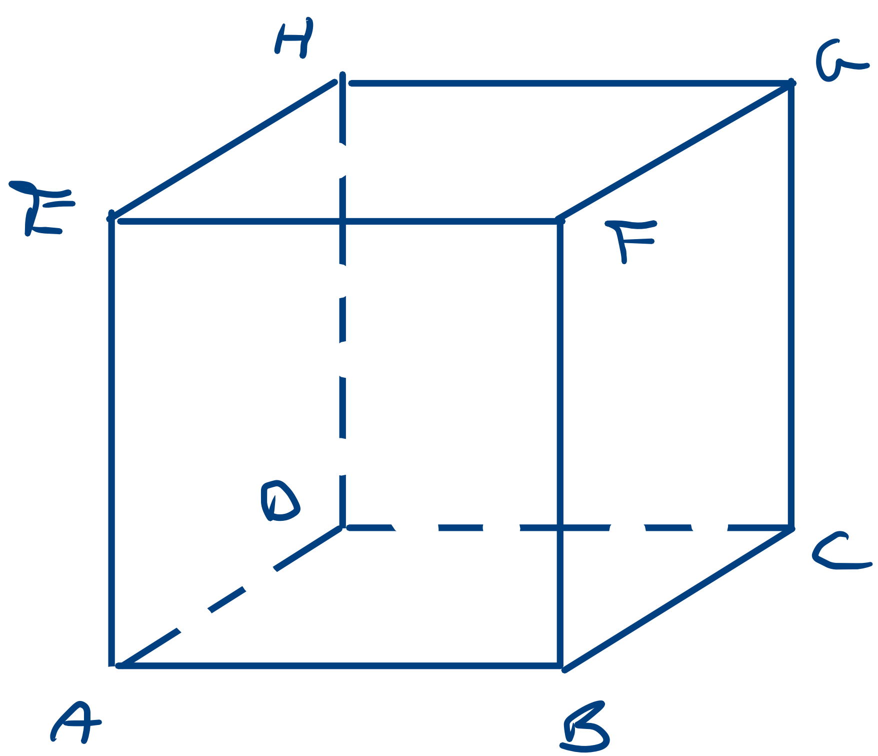
Définition Base

Trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ constituent une base de l'espace si et seulement si chacun de ces trois vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des deux autres.



Exemple

Dans un cube ABCDEFGH, aucun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG}$ n'est une combinaison linéaire des deux autres donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG})$ est une base de l'espace.



En effet les points A, B, C et D sont non coplanaires.

Définition Base orthonormée

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de l'espace si et seulement si $(\vec{i}, \vec{j}, k)$ est une base et si $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

Exercice 2 : Intersection de (P) et (P') ?

INTERSECTION_PLANS_EQUATION_CARTESIENNE
INTERSECTION_PLANS_EQUATION_CARTESIENNE1

Exercice 3 : Intersection de (d) et (P)

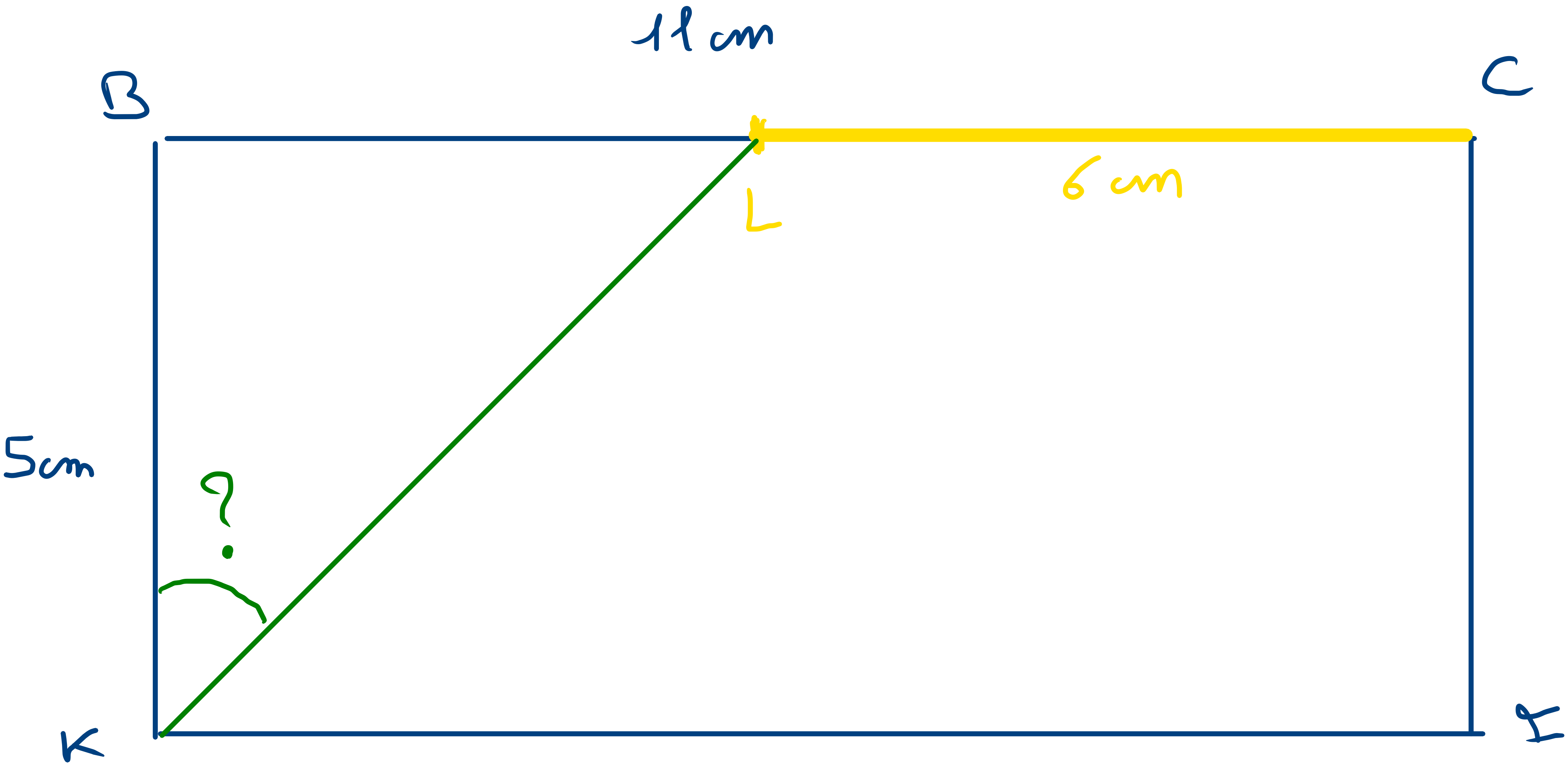
INTERSECTION_DROITE_PLAN1

Exercice 4 : $(d) \perp (P)$

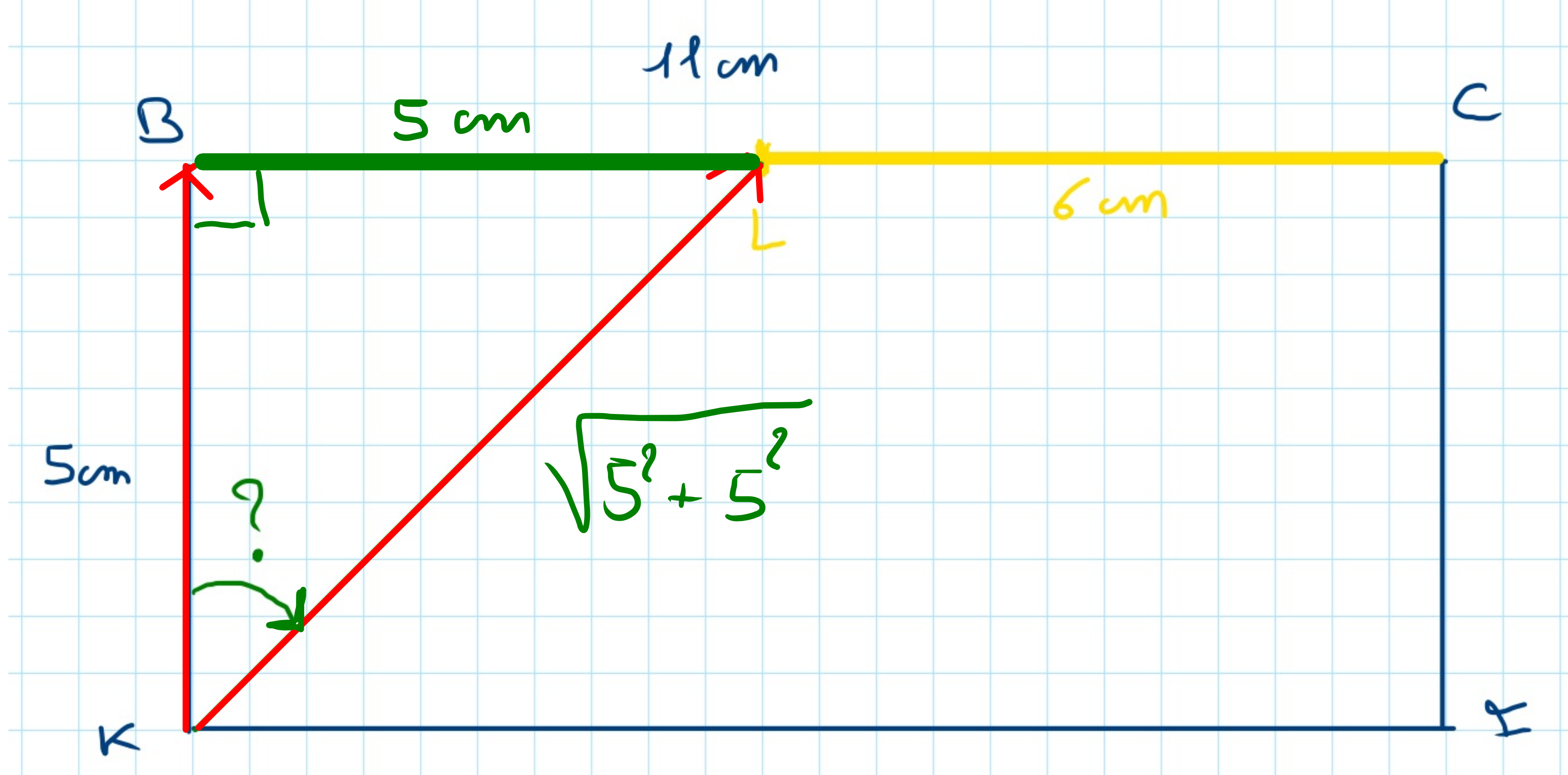
PROJECTION_ORTHO1

GEOMETRIE DANS LE PLAN:
Angles et produit scalaire

On considère un rectangle BCIK tel que BC=11 cm et KB=5 cm
Soit L un point du segment [BC] tel que LC=6 cm.



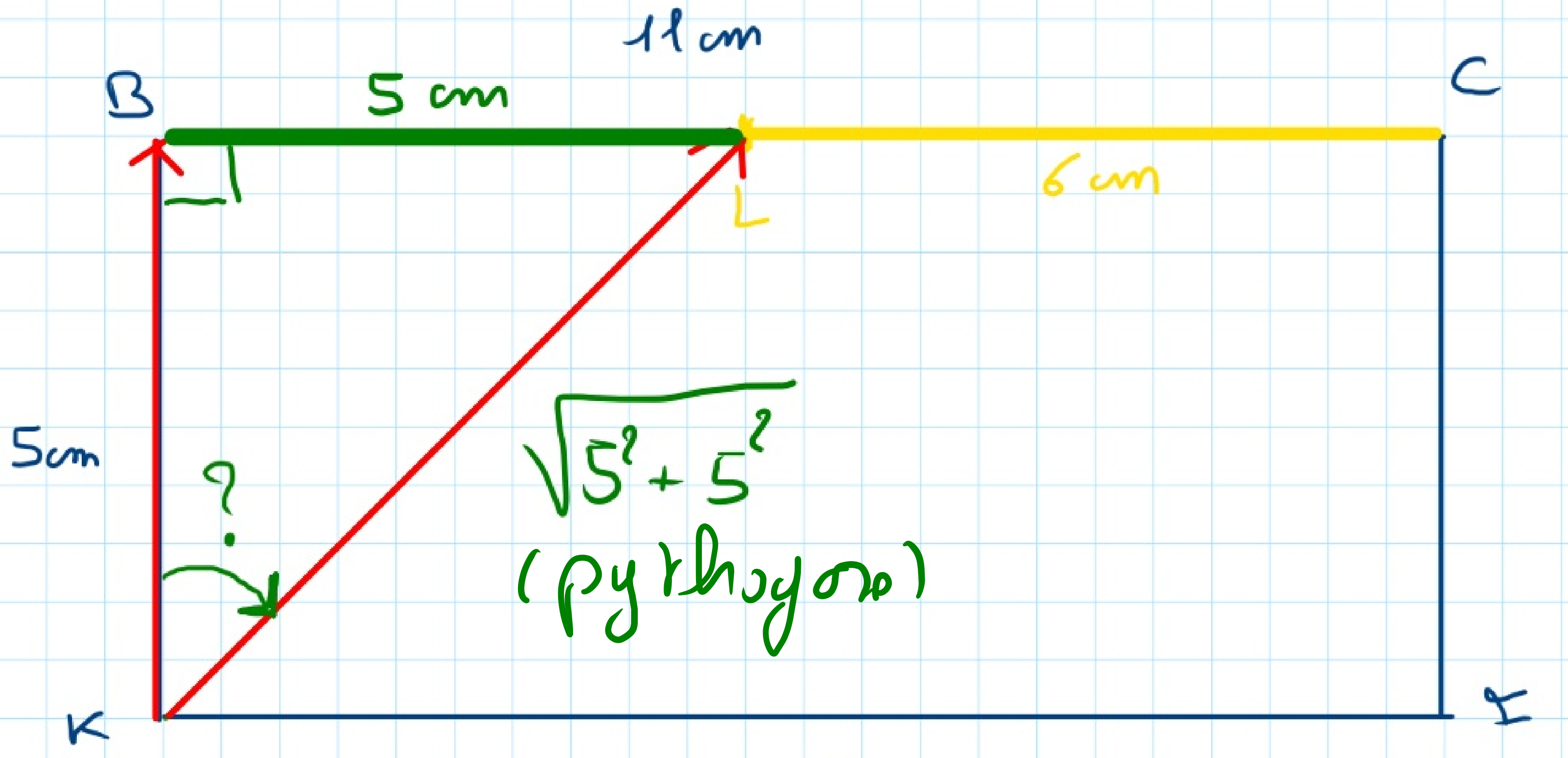
On considère un rectangle BCIK tel que BC=11 cm et KB=5 cm
Soit L un point du segment [BC] tel que LC=6 cm.



Sans trigonométrie : $(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KL})$

$$\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{KL} = \|\overrightarrow{KB}\| \times \|\overrightarrow{KL}\| \times \cos(?)$$

$$5 \times 5 = 5 \times \sqrt{50} \times \cos(?)$$



Sans trigonométrie :

$(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KL})$

$$\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{KL} = \|\overrightarrow{KB}\| \times \|\overrightarrow{KL}\| \times \cos(?)$$

$$5 \times 5 = 5 \times \sqrt{50} \times \cos(?)$$

$$\cos(?) = \frac{5 \times 5}{5 \times \sqrt{50}}$$

$\cos^{-1}((5*5)/(5*\sqrt{50}))$

45