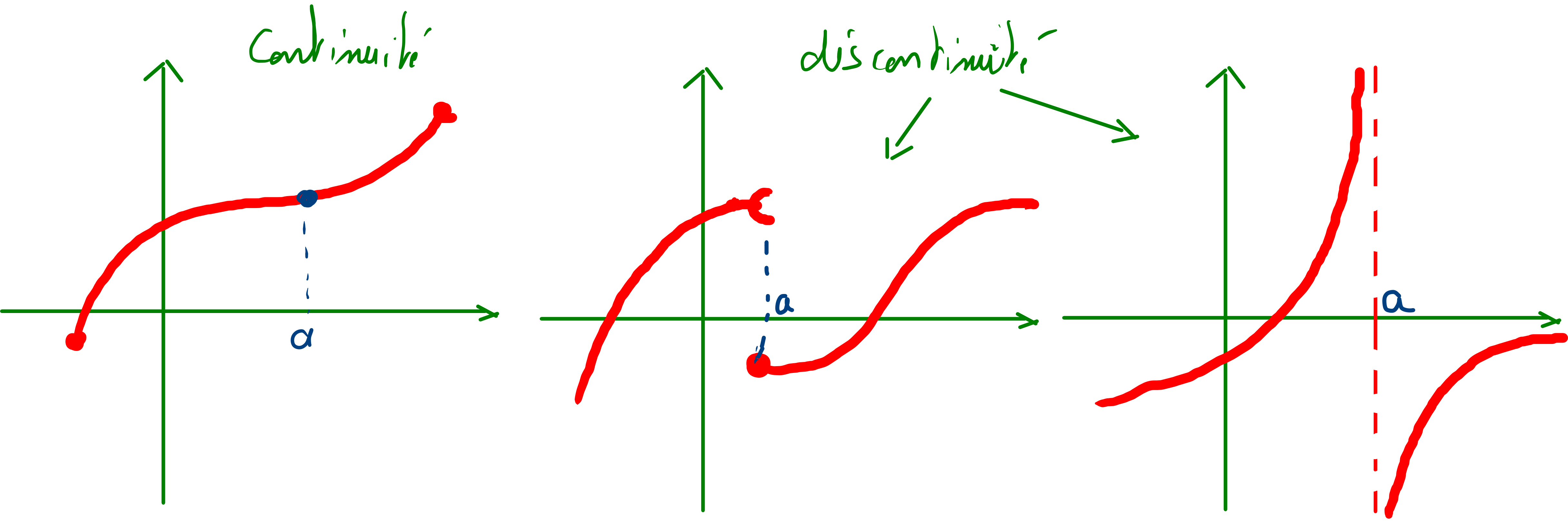
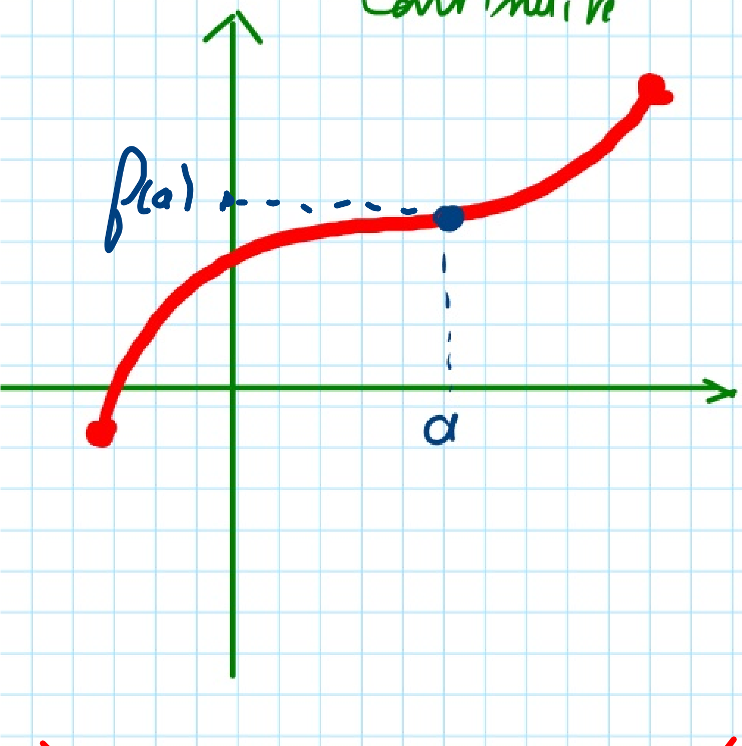
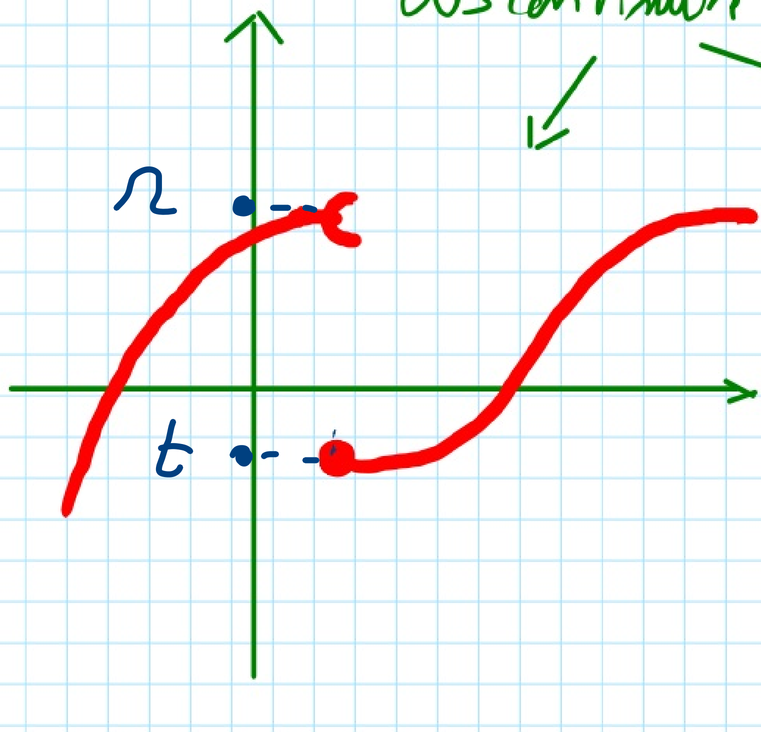
CHAPITRE 7
CONTINUITE

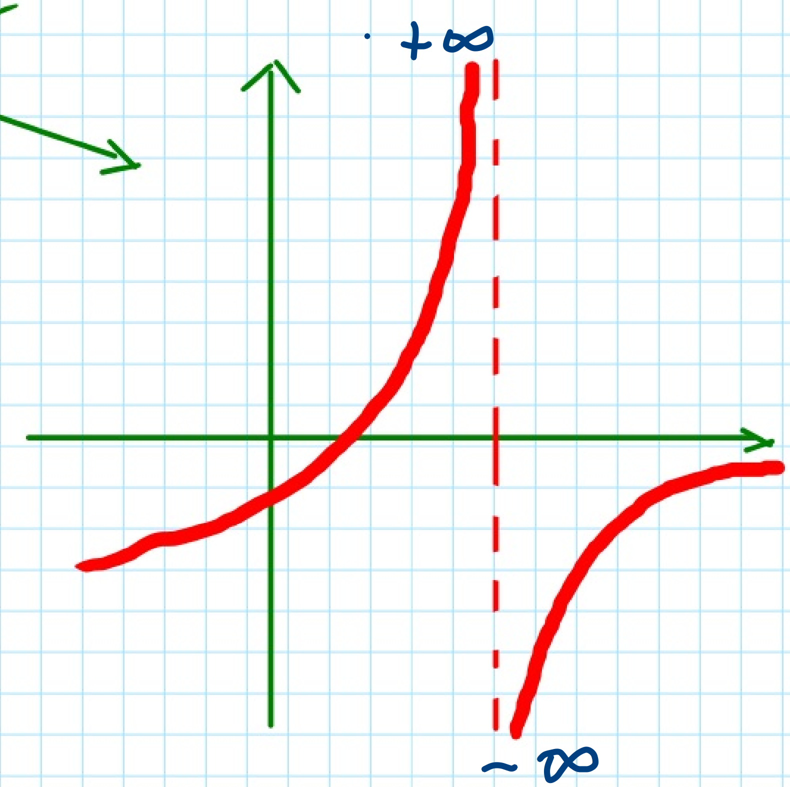


Continuité



discontinuité



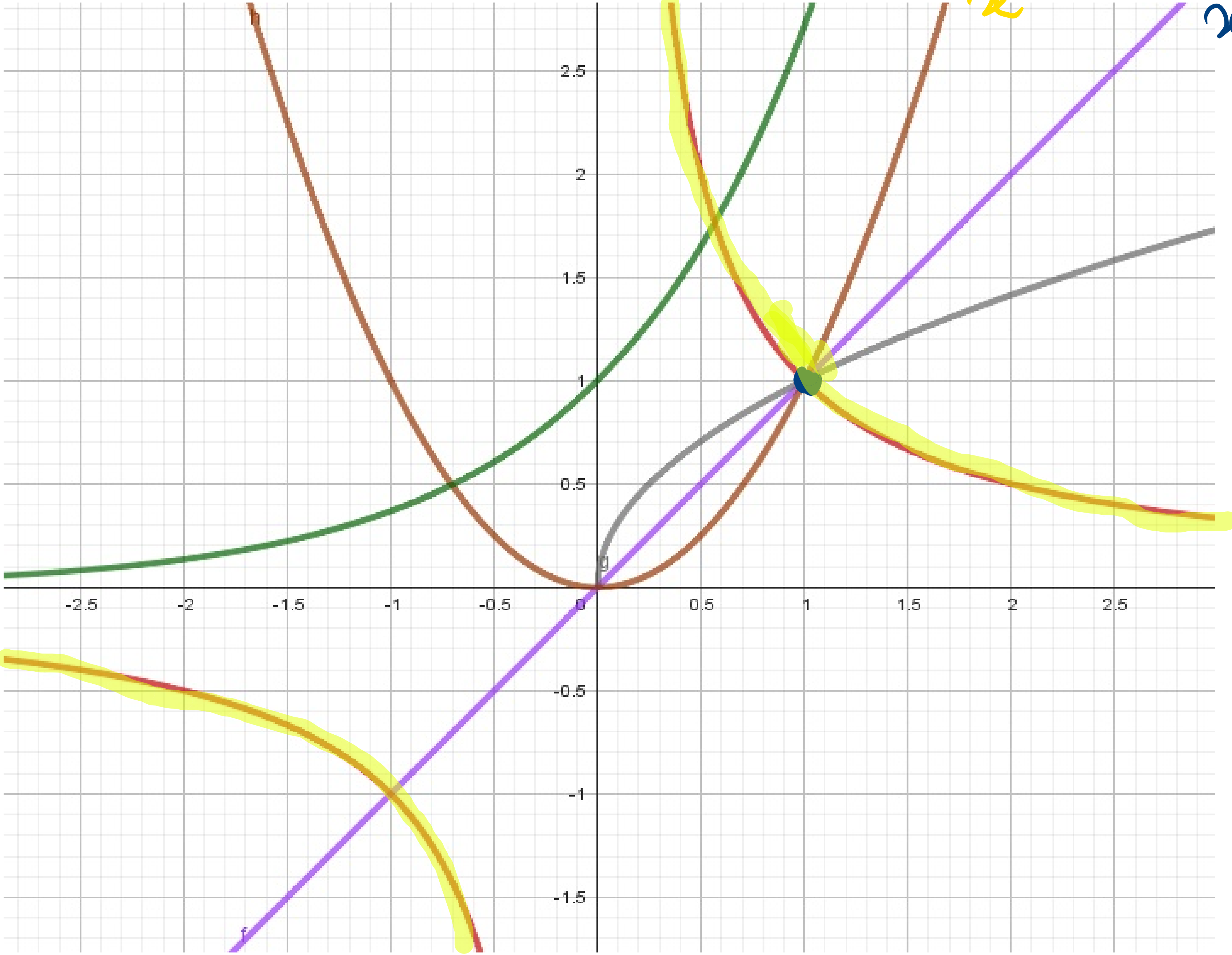


$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

$$= f(a)$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

Fonctions usuelles



1 Définition et propriétés

Définition Continuité

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant le réel a. On dit que la fonction f est

continue en a si et seulement si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$$

Exemples

1

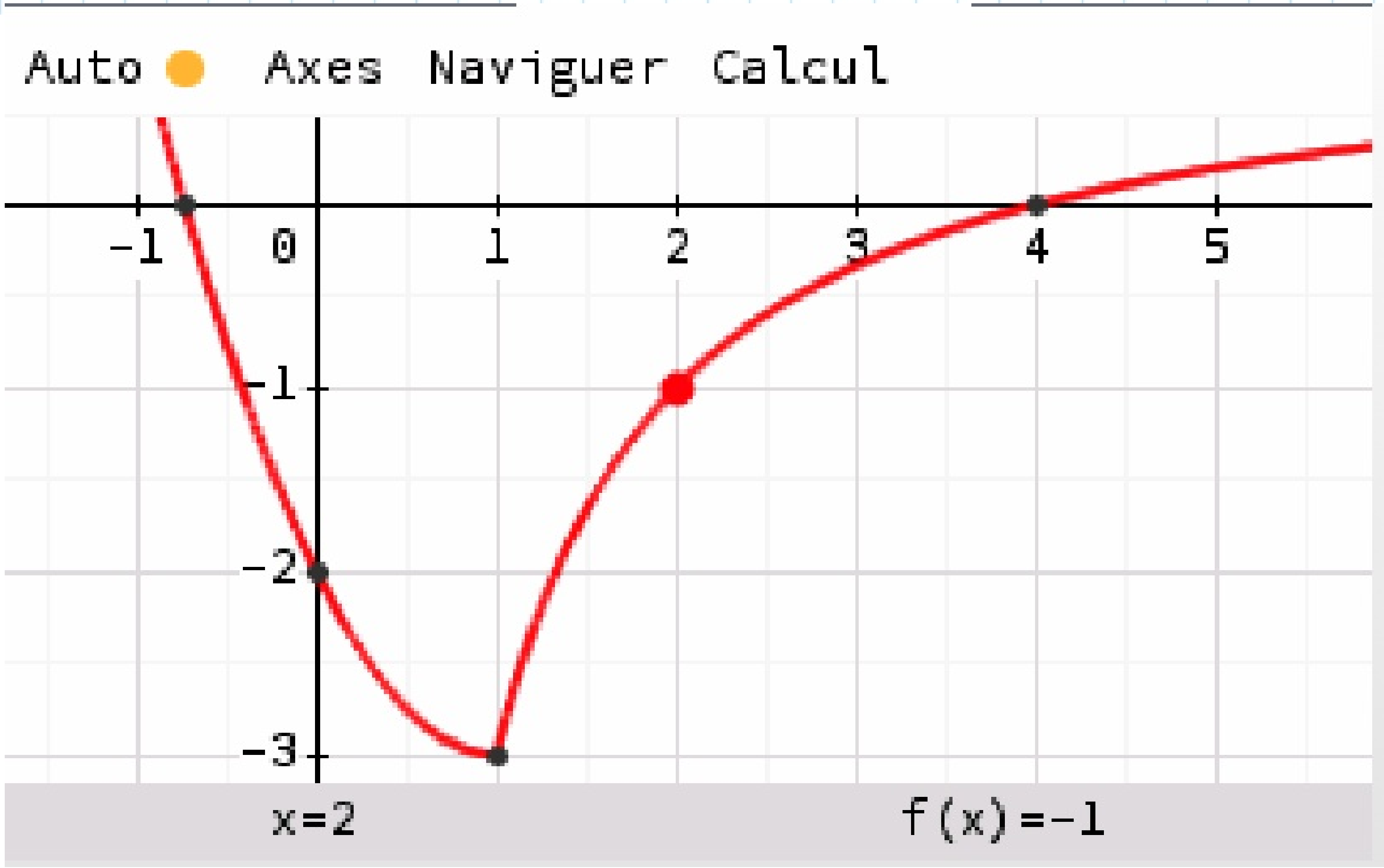
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x-4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Fonction définie par morceaux

Exemples

(1)
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x-4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Fonction définie par morceaux



Exemples

(1)
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x-4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Fonction définie par morceaux

$$\boxed{\text{Si } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1) \text{ alors } f \text{ est continue}}$$

Solution :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (x^2 - 2x - 2) = -3$$

$1^2 - 2 \times 1 - 2$

Si $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = f(1)$

alors f est continue

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x-4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solution :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (x^2 - 2x - 2) = -3$

  $1^2 - 2 \times 1 - 2$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left(\dfrac{x-4}{x}\right) = -3$

  $\dfrac{1-4}{1}$

- $f(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 2 = -3$

Solution :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (x^2 - 2x - 2) = -3$

  $1^2 - 2 \times 1 - 2$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(\frac{x-4}{x}\right) = -3$

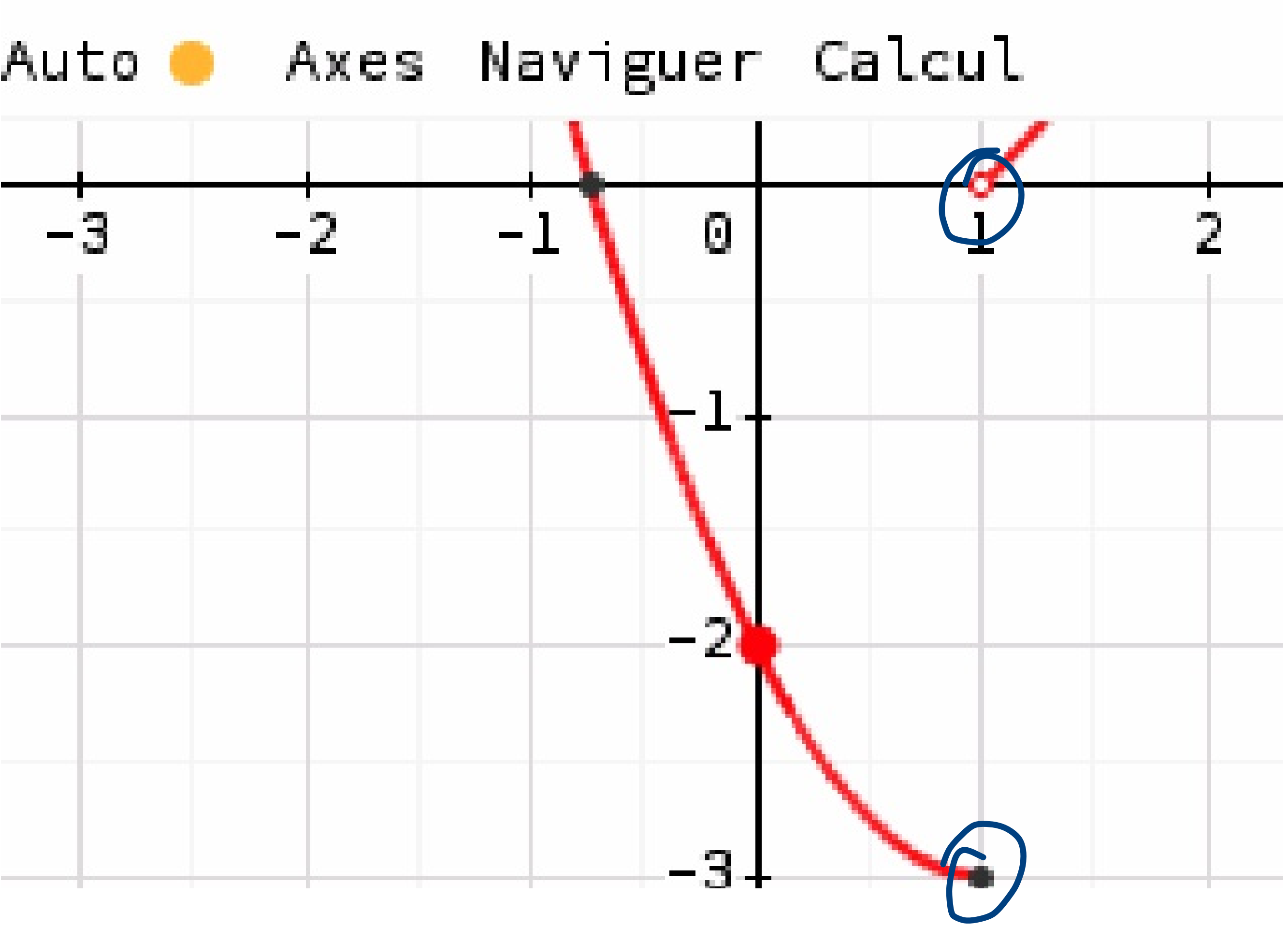
  $\frac{1-4}{1}$

- $f(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 2 = -3$

Donc f est continue

②
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

② $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x^2 - 2x - 2$

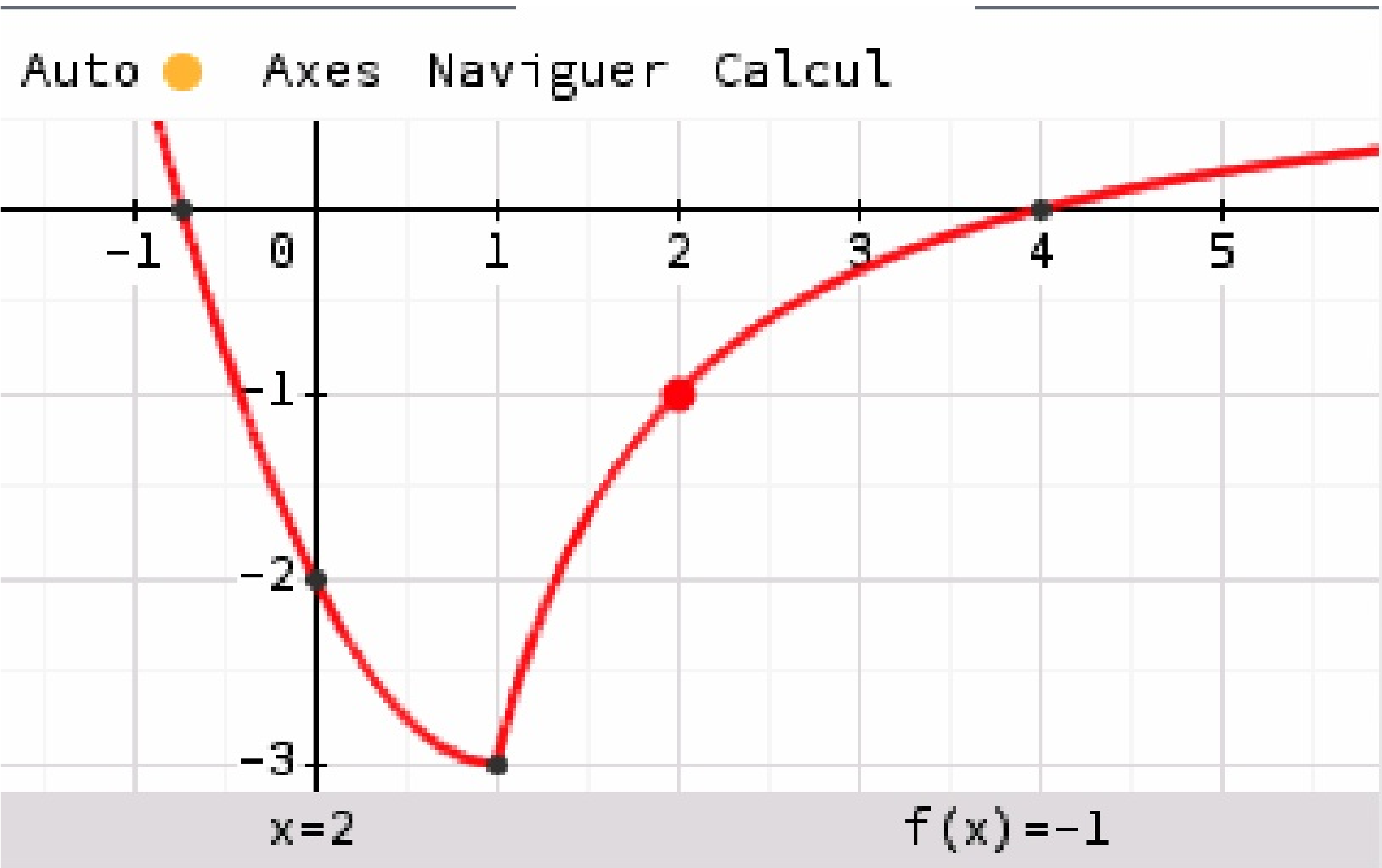
$= -3$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x - 1$

$= 0$

Non continuité en 1

② $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$


Auto
Axes
Naviguer
Calcul
-1
0
1
2
3
4
5
-1
-2
-3
x=2
f(x)=-1

Exercice 1

Pour les fonctions suivantes définies par morceaux, calculer les limites à gauche et à droite et dire si elle est c ou non.

1) On considère la fonction définie par morceaux suivantes: $\begin{cases} f(x) = -5x - 5 \ si \ x \leqslant -1 \\ f(x) = \dfrac{0}{-2+x} \ si \ x > -1 \end{cases}$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f(x) =$ 0 et $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x) =$ 0 donc la fonction f est

2) On considère la fonction définie par morceaux suivantes: $\begin{cases} f(x) = 2\ln(x+2) - 1 \ si \ x \leqslant -1 \\ f(x) = \dfrac{3}{-2+x} \ si \ x > -1 \end{cases}$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f(x) =$ -1 et $\lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ x>4}} f(x) =$ -1 donc la fonction f est

3) On considère la fonction définie par morceaux suivantes: $\begin{cases} f(x) = 5x - 3 \ si \ x \leqslant -4 \\ f(x) = \dfrac{20}{3+x} \ si \ x > -4 \end{cases}$

On a $\lim\limits_{x\to -4} f(x) =$ -23 et $\lim\limits_{x\to -4} f(x) =$ -20 donc la fonction f est

FONCTIONS_CONTINUE_MORCEAUX1

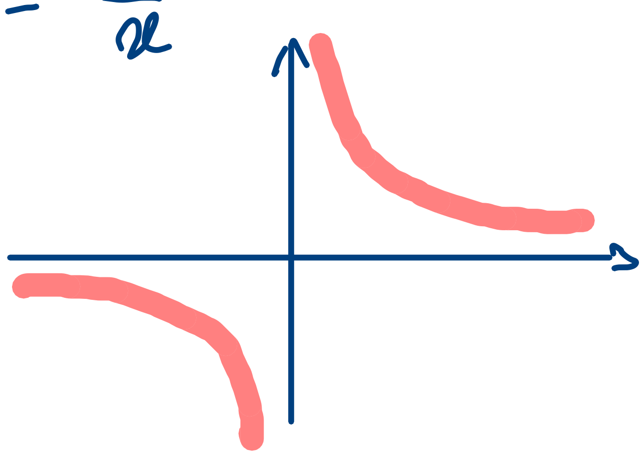
ENSEMBLE_DEFINITION4

ENSEMBLE_DEFINITION5

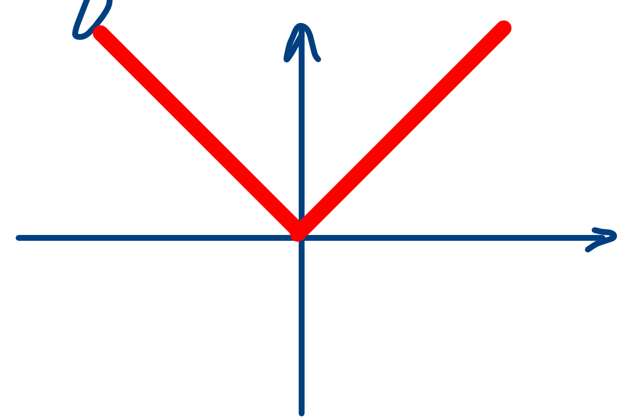
Propriétés Continuité des fonctions usuelles p112

- Les fonctions puissance $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$.
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$.
- La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions sinus $x \mapsto \sin x$ et cosinus $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- D'une façon générale, toutes fonctions construites par somme, produit, quotient ou composition à partir des fonctions mentionnées ci-dessus sont continues sur leur ensemble de définition.

1 $f(x) = \frac{1}{x}$



2 $f(x) = |x|$



• **D'une façon générale, toutes fonctions construites par somme, produit, quotient ou composition à partir des fonctions mentionnées ci-dessus sont continues sur leur ensemble de définition.**

<u>Exemple</u> $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

définie sur $\mathbb{R}$ $(x^2+1 \neq 0)$

Est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

(C'est à dire pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'est-elle continue en a ?)

Exemple ①

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+1}$$

définie sur $\mathbb{R}$ $(x^2+1 \neq 0)$

Est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

(C'est à dire pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est-elle continue en a ?)

Méthode : Décrire la fonction en termes d'opérations ou de composée de fonctions de référence

f est le quotient de la fonction $x \mapsto 1$ (constante) et $x \mapsto x^2+1$ (Polynome) donc continue.

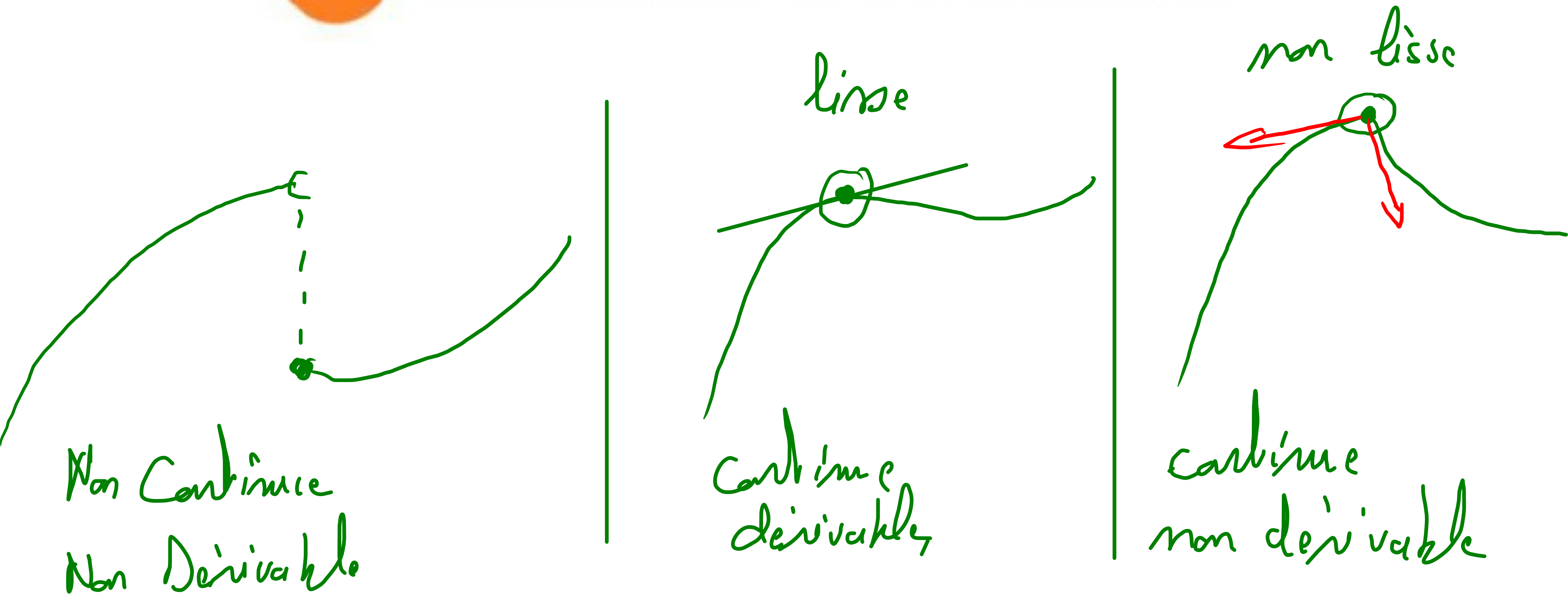
<u>Méthode</u> : Décrire la fonction en termes d'opérations ou de composée de fonctions de référence

f est le quotient de la fonction $x \mapsto 1$ (constante) et $x \mapsto x^2+1$ (Polynome) donc continue.

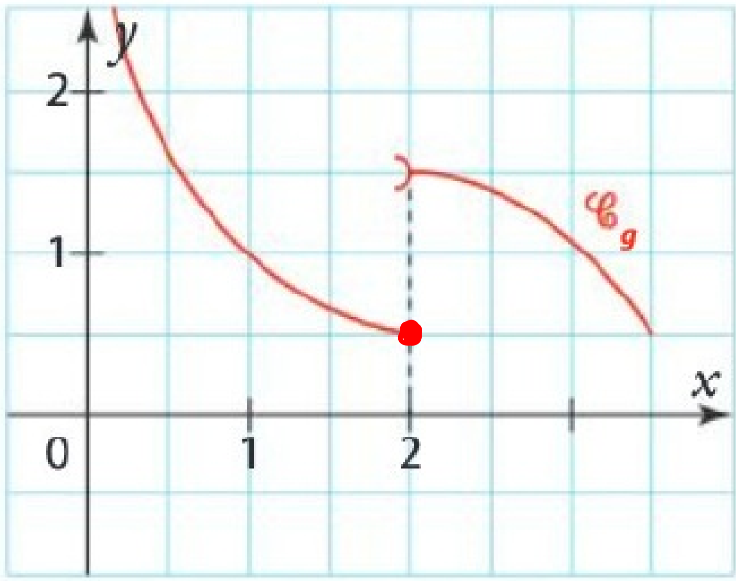
<u>Exemple ②</u> $g(x) = e^{x^2-3}$ $D_g = \mathbb{R}$

g est la composée de $x \mapsto x^2-3$ (Polynome) par $x \mapsto e^x$ (exponentielle) donc continue.

2 Continuité et dérivabilité

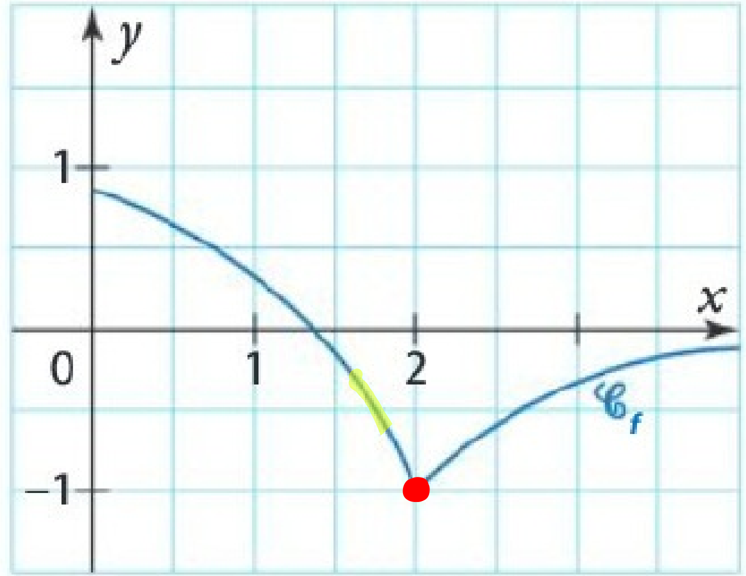


2 Continuité et dérivabilité



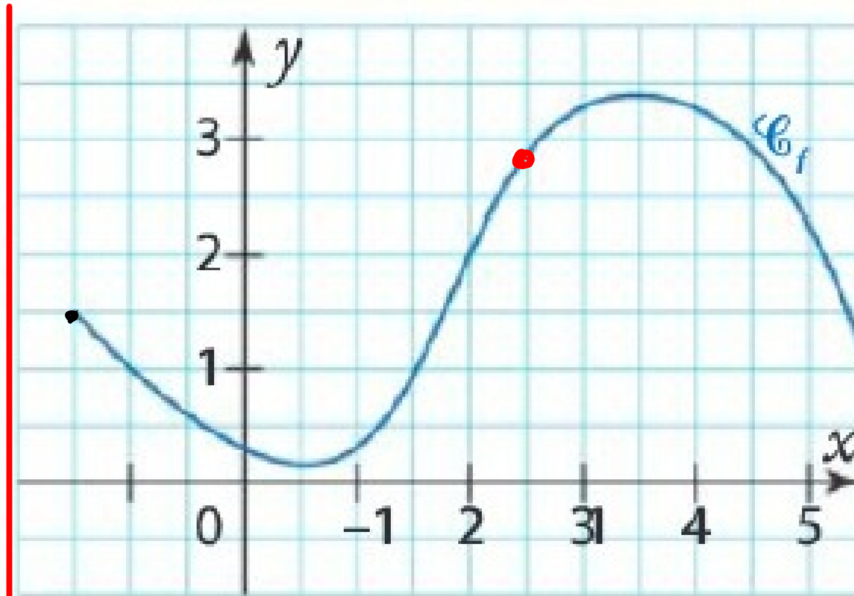
DISCONTINUE

NON DERIVABLE en 2



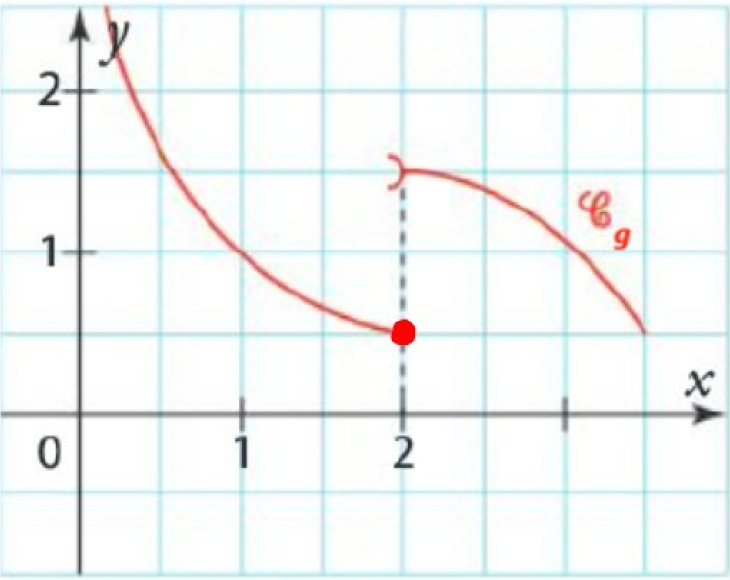
CONTINUE

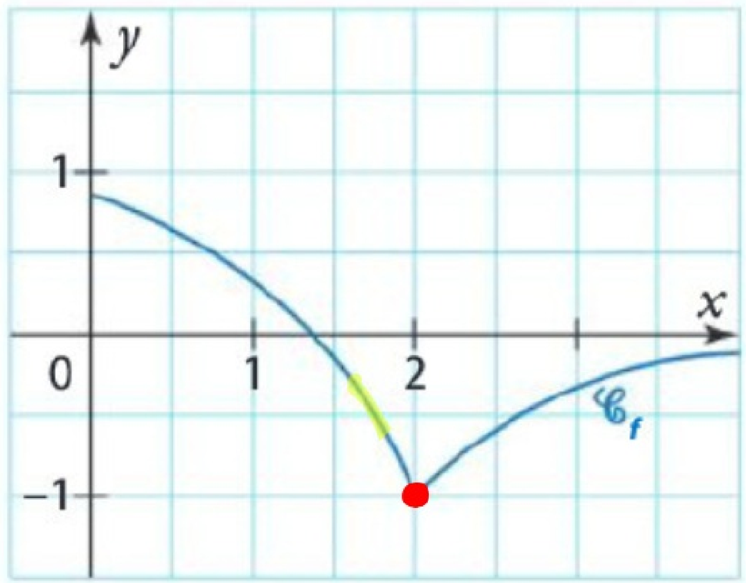
NON DERIVABLE en 2

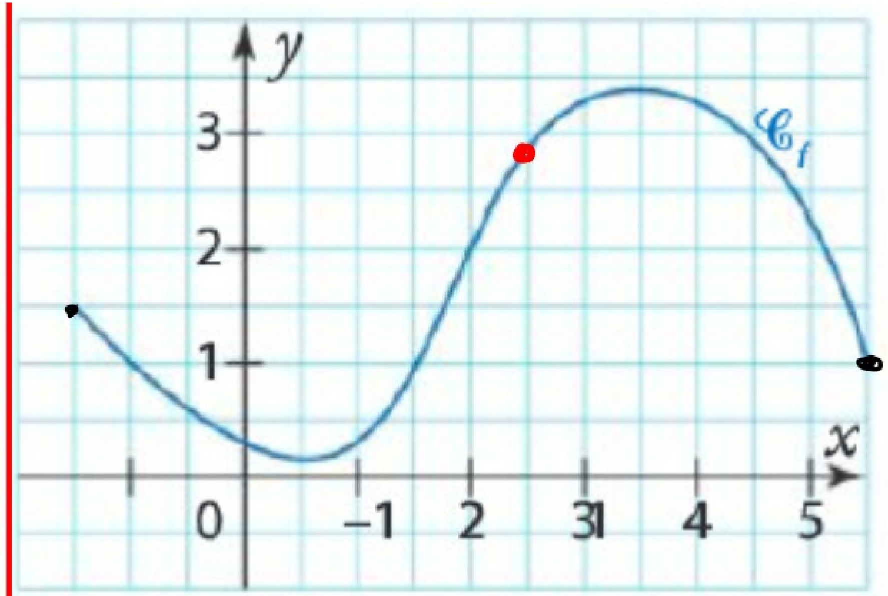


CONTINUE

DERIVABLE en 2,5







DISCONTINUE
NON DERIVABLE
en 2

CONTINUE
NON DERIVABLE
en 2

CONTINUE
DERIVABLE
en 2,5

"Si une fonction est dérivable en a, sa représentation graphique se 'confond' avec une droite au voisinage de a"

Intuition
avec un zoom

"Si une fonction est dérivable en a, sa représentation graphique se 'confond' avec une droite au voisinage de a"

Intuition

avec un zoom

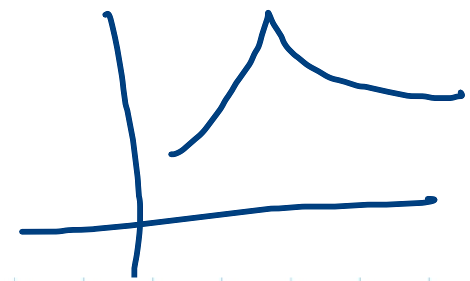
Théorème **Continuité et dérivabilité**

Lisse $\Rightarrow$ continue

Réciproque fausse

1. Si une fonction f est dérivable en un point a alors f est continue en a.
2. Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I alors f est continue sur I.

Réciproque fausse :



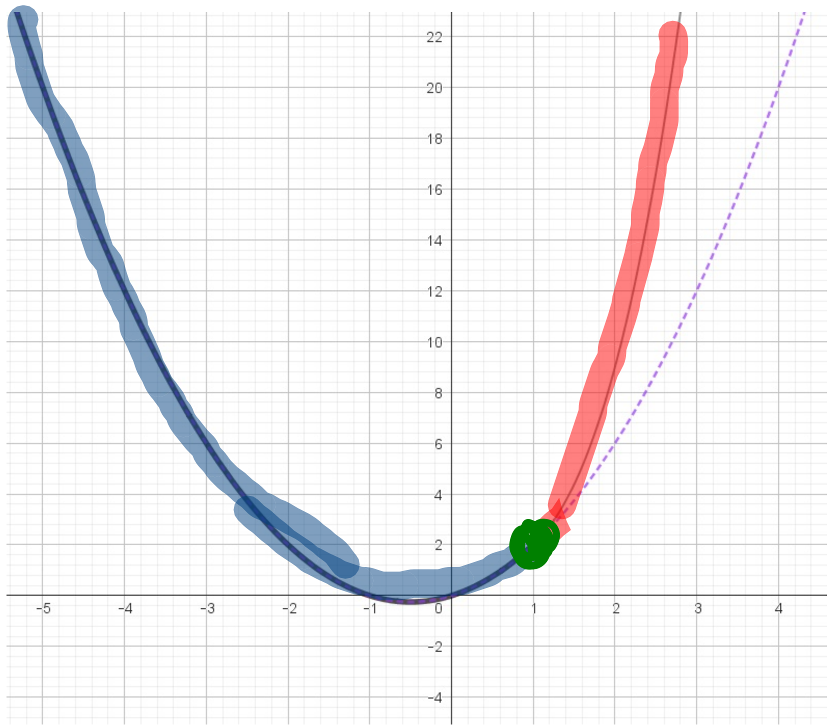
Exemples

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x^3 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

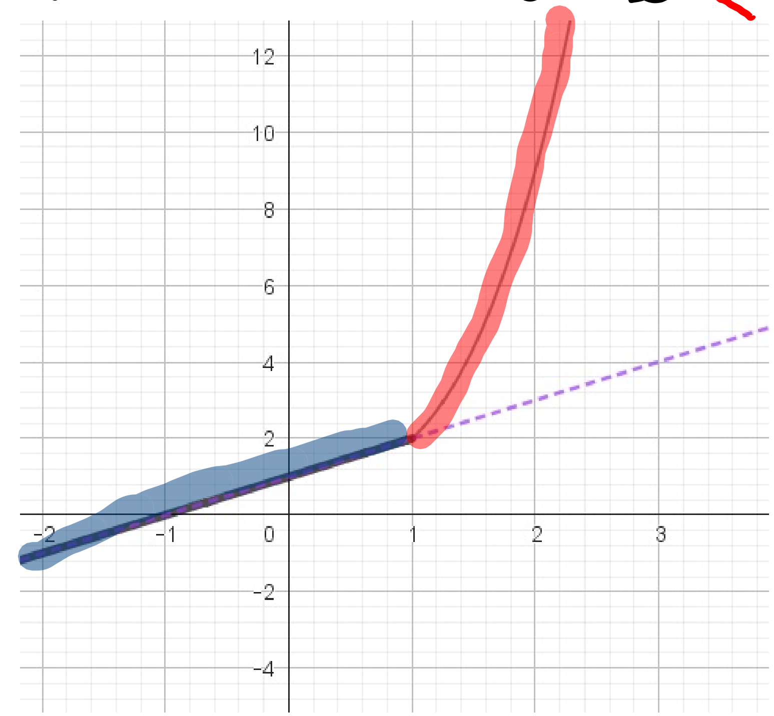
$$\begin{cases} g(x) = x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \\ g(x) = x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Exemples

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x^3 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} g(x) = x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \\ g(x) = x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x & \text{si } x \le 1 \\ f(x) = x^3 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- <u>Continuité</u>

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x^2 + x = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x^3 + 1 = 2$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

f est continue

- **Continuité**

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x^2 + x = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x^3 + 1 = 2$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

f est continue

- **Dérivée à gauche de 1**

$$f_g'(x) = (x^2 + x)' = 2x + 1$$

$$f_g'(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

- **dérivée à droite de 1**

$$f_d'(x) = (x^3 + 1)' = 3x^2$$

$$f_d'(x) = 3 \times 1^2 = 3$$

- Dérivée à gauche de 1

$f'_g(x) = (x^2 + x)' = 2x + 1$

$f'_g(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$

- dérivée à droite de 1

$f'_d(x) = (x^3 + 1)' = 3x^2$

$f'_d(1) = 3 \times 1^2 = 3$

f est dérivable

Pour g

$$\begin{cases} g(x) = x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \\ g(x) = x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

continuité $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = 2$, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = 2$, $g(1) = 2$

g continue

f est dérivable

Pour g

$$\begin{cases} g(x) = x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \\ g(x) = x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Continuité

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = 2$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = 2$, $g(1) = 2$

g continue

Dérivabilité

dérivée à gauche

$g'_G(x) = (x^2 + x)' = 2x + 1$

$g'_G(1) = 3$

dérivée à droite

$g'_D(x) = (x + 1)' = 1$

$g'_D(1) = 1$

non dérivable

3 Continuité et suite

Théorème **Point fixe**

Soit une suite (u_n) définie par un premier terme et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ.
Si la fonction associée f est continue en ℓ, alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

P123

30 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}(1 + u_n^2)$. On admet que la suite (u_n) est décroissante et convergente vers ℓ.
Déterminer ℓ.

Notation : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}(1+u_n^2) \end{cases}$. On suppose $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell$

P123

30 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}(1+u_n^2)$. On admet que la suite (u_n) est décroissante et convergente vers ℓ.
Déterminer ℓ.

Notation : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}(1+u_n^2) \end{cases}$. On suppose $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ avec $f : x \longmapsto \frac{1}{4}(1+x^2)$

Comme f est continue (Polynôme) et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

D'après le théorème du point fixe $f(\ell) = \ell$

Notation : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}(1+u_n^2) \end{cases}$. On suppose $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ avec $f : x \longmapsto \frac{1}{4}(1+x^2)$

Comme f est continue (Polynôme) et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

D'après le théorème du point fixe $f(\ell) = \ell$

(1) Equation $f(\ell) = \ell$

$$\frac{1}{4}(1+\ell^2) = \ell \Leftrightarrow 1+\ell^2 = 4\ell$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 - 4\ell + 1 = 0$$

Comme f est continue (Polynôme) et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$

D'après le théorème du point fixe $f(\ell) = \ell$

① Equation $f(\ell) = \ell$

$$\frac{1}{4}(1+\ell^2) = \ell \iff 1+\ell^2 = 4\ell$$

$$\iff \ell^2 - 4\ell + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 = 12 > 0$$

$$\left(\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3} \right)$$

$$x_0 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \simeq 0,2679$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{3} \simeq 3,732$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 = 12 > 0$

$$\left(\begin{aligned} \sqrt{12} &= \sqrt{4 \times 3} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned} \right)$$

$$x_0 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \simeq 0{,}2679$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{3} \simeq 3{,}732$$

② Théorème du point fixe :

$$\ell = 2 - \sqrt{3} \simeq 0{,}27$$

ou

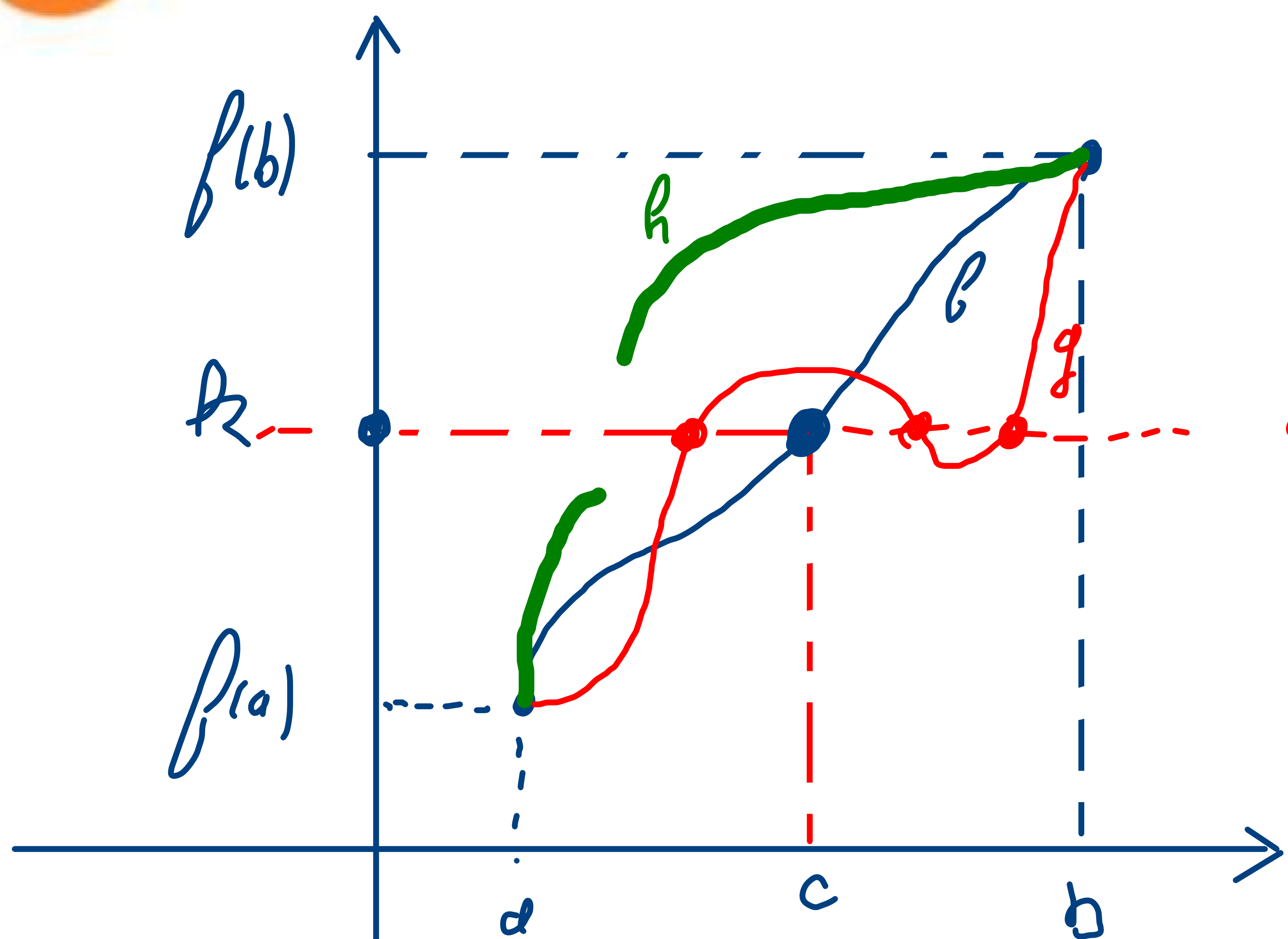
$$\ell = 2 + \sqrt{3} \simeq 3{,}73 \text{ impossible}$$

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}(1 + u_n^2) \end{cases}$$

et $(u_n) \searrow$ donc $\ell \leq 3$

donc $\boxed{\ell = 2 - \sqrt{3}}$

4 Continuité et équation



L'équation $f(x) = k$ admet une unique solution
L'équation $g(x) = k$ admet plusieurs solution
si f est continue

$h(x) = k$ n'a pas de solution

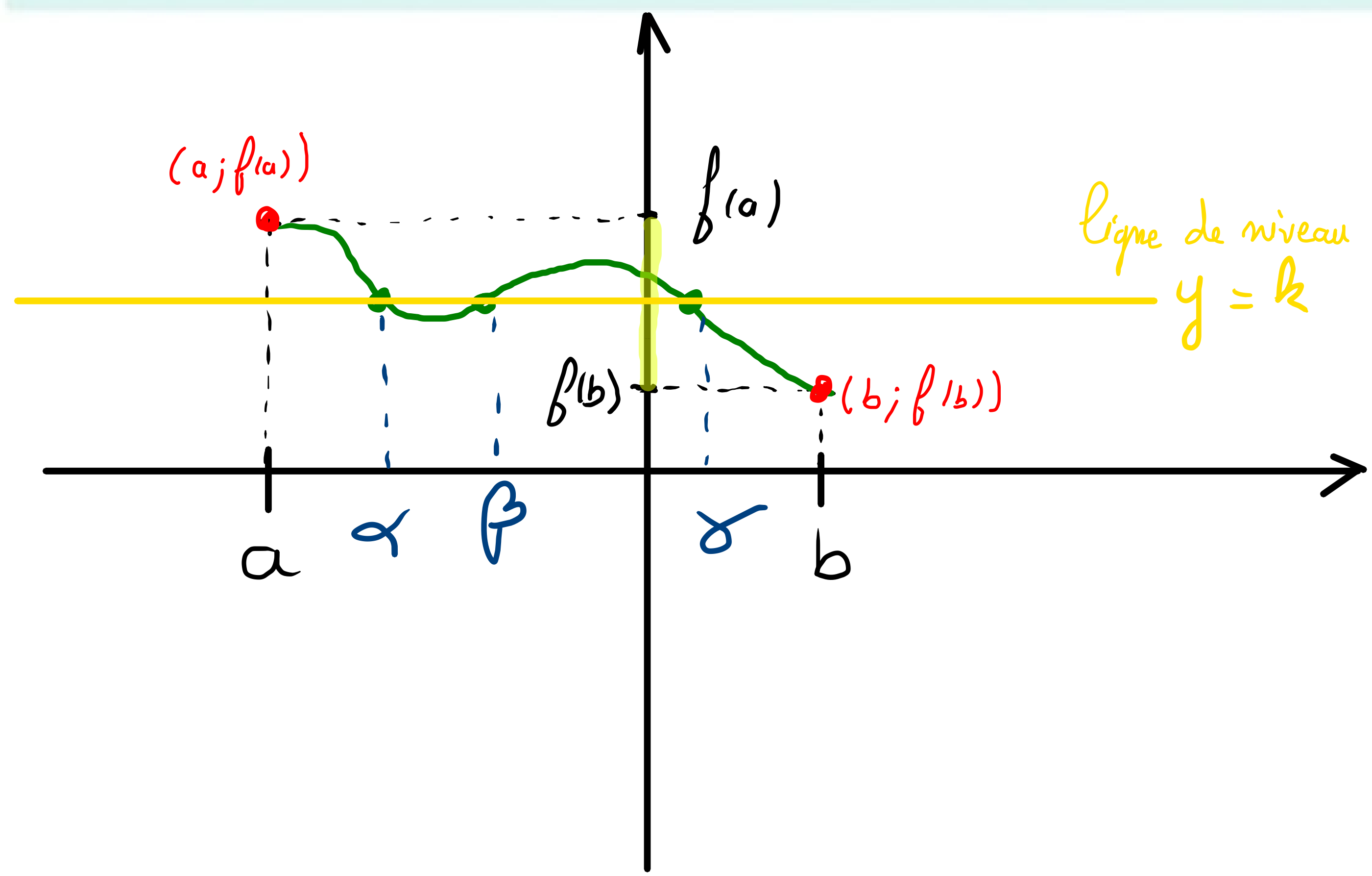
4 Continuité et équation

T.V.I.

Théorème Valeurs intermédiaires

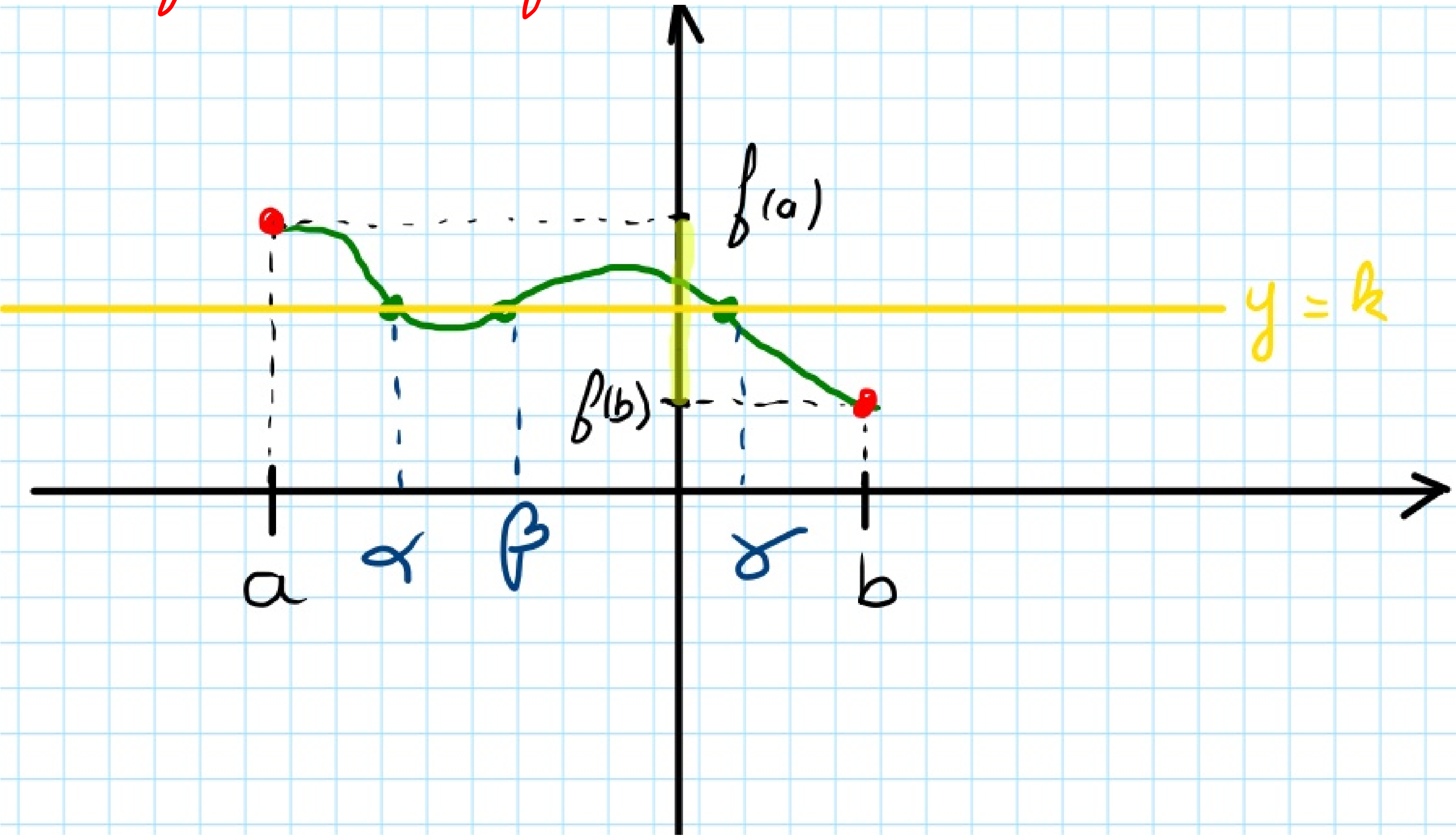
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $[a ; b]$.



Ici l'équation $f(x) = k$ admet 3 solutions : α, β et γ

$f(a) > k$ et $f(b) < k$

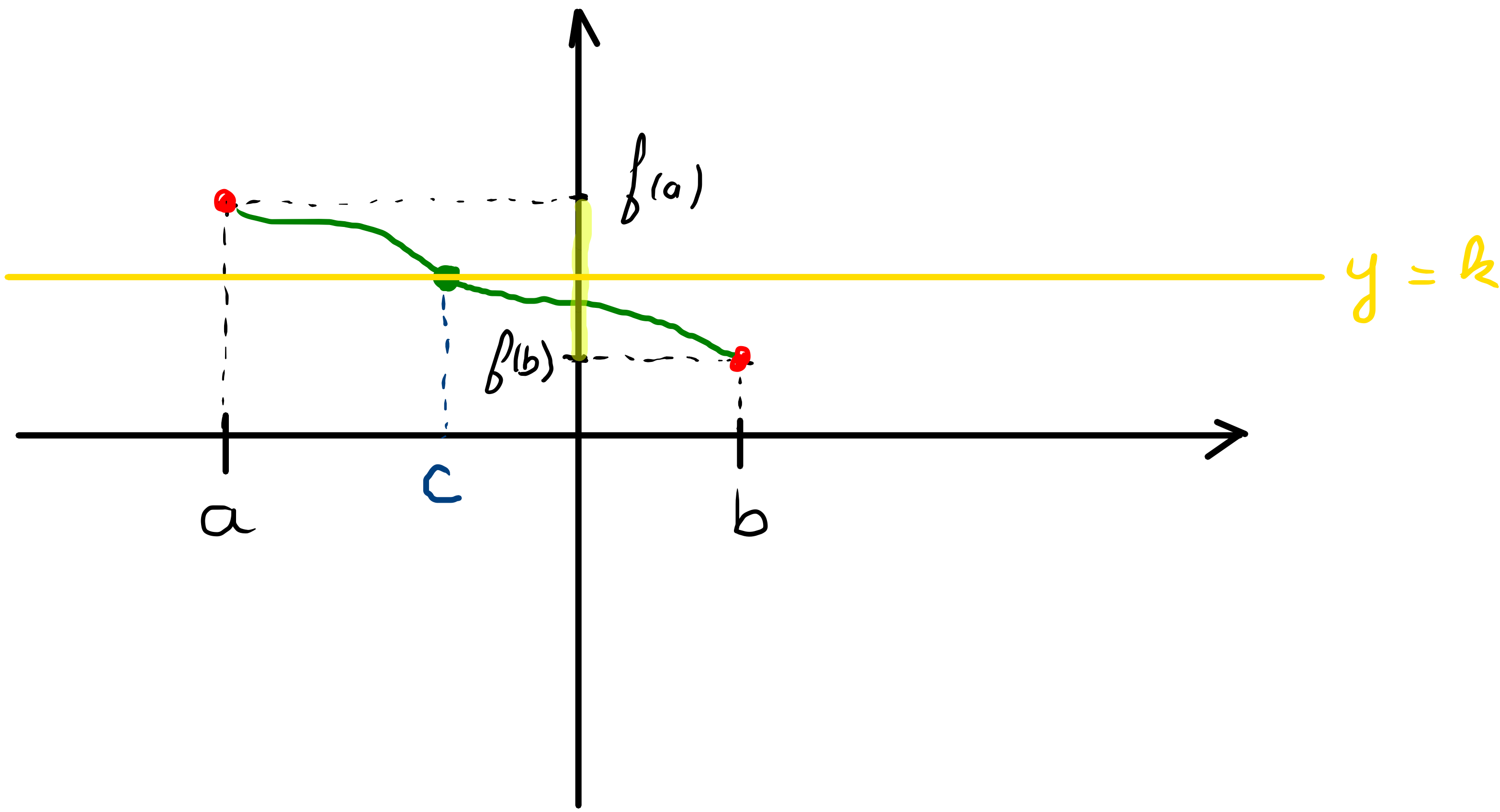


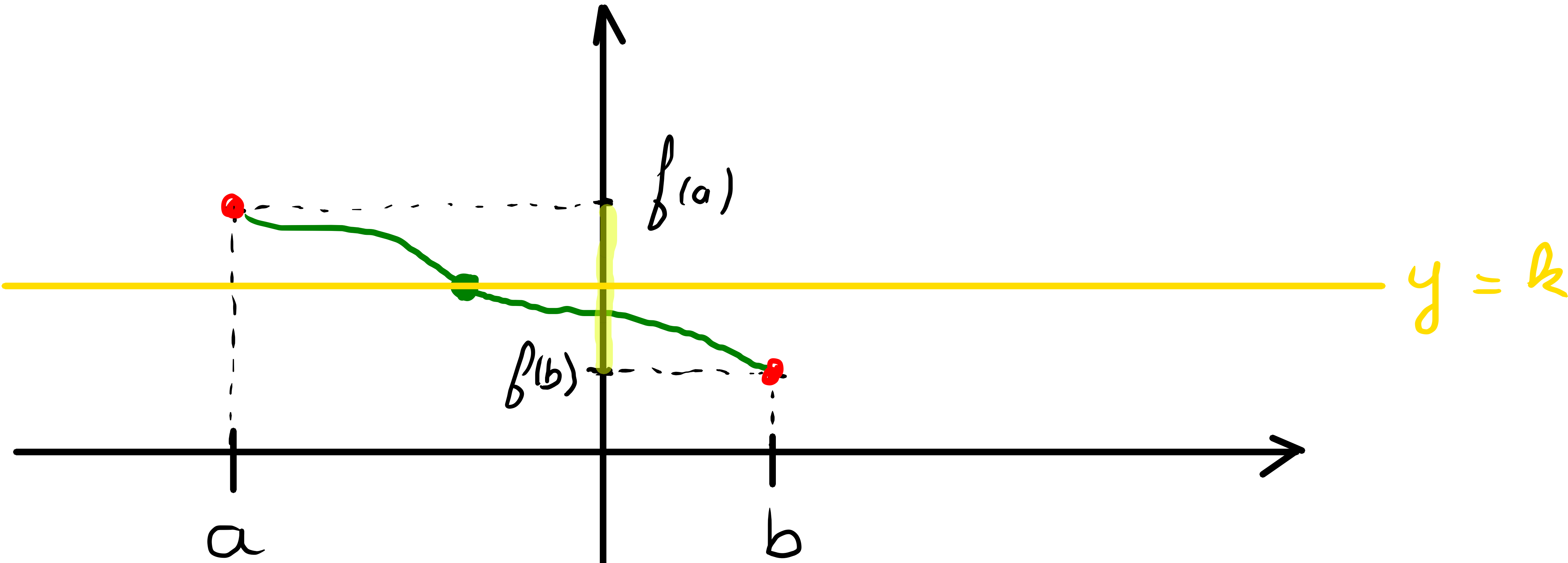
Ici l'équation $f(x) = k$ admet 3 solutions : α, β et γ donc admet au moins une solution

Théorème **Bijection**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution c dans l'intervalle $[a\,;b]$.





p 117

Méthode 4

Trouver le nombre de solutions d'une équation

p 117

Méthode 4 Trouver le nombre de solutions d'une équation

Soit la fonction f définie sur $[-2\,;+\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

Déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x)=0 puis donner une valeur approchée de ces solutions si elles existent.

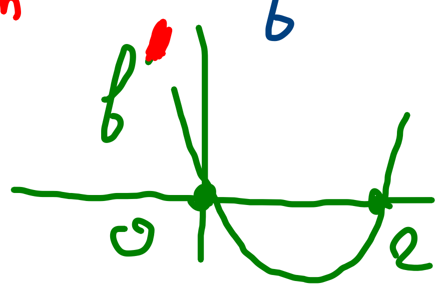
- f est une fonction polynôme donc dérivable sur $[-2\,;+\infty[$

objectif : tableau de variation

$f'(x) = 3x^2 - 3\times 2x = 3x^2 - 6x$

$= 3x \times x - 3x \times 2$

$= 3x(x-2)$



$3x^2 - 6x + 0$

$\Delta = 36 \ldots$

$x_0 = 0 \quad x_1 = 2$

$$f'(x) = 3x^2 - 3\times 2x = 3x^2 - 6x$$
$$= 3x\times x - 3x\times 2$$
$$= 3x(x-2)$$

$3x^2 - 6x + 0$

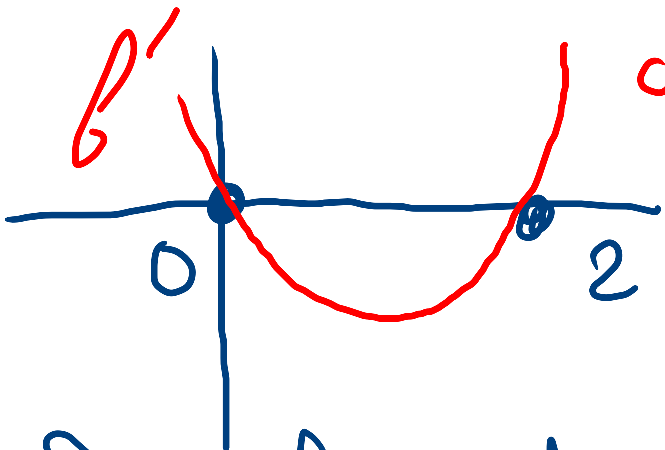
$\Delta = 36$ $\quad x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \dots$

$x_1 = \dots$

f' admet deux racines : $x_1 = 0$ $\quad x = 0$

ou

$x_2 = 2$ $\quad (x-2) = 0$



$a = 3 > 0$

• Tableau de variation

x	-2		0		2		$+\infty$
signe de f'		+	0	−	0	+	
Variation de f		↗		↘		↗	

- Tableau de variation

x	-2		0		2		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de f	-17	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

!

f et non f'

$$\begin{cases} f(-2) = (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 + 3 = -17 \\ f(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 + 3 = 3 \\ f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 3 = -1 \end{cases}$$

$f(\alpha) = 0$

x	-2		0		2		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	-17	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-2) = (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 + 3 = -17$

$f(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 + 3 = 3$

$f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 3 = -1$

$$x^3\left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{\underbrace{x^3}_{x^2 \times x}} + \frac{3}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\underbrace{x^3}_{+\infty} - \underbrace{3x^2}_{+\infty} + 3) = \ ?$$

On a une F.I.

$$= \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3}\right)$$

$$= \text{“} (+\infty) \times (1 - 0 + 0) \text{”} = +\infty$$

(Théorèmes d'opérations sur les limites)

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3.$

x	-2		0		2		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	-17	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

D'après le T.V.I. $f(x) = 0$ admet au moins une solution.

D'après le Théorème de la bijection :

$f(x) = \boxed{0}$

ligne de niveau

• Sur $[-2 ; 0]$

(1) f est continue

(2) $f(-2) = -17$, $f(0) = 3$ et $0 \in [-17 ; 3]$

(3) f strictement croissante

D'après le T.V.I. $f(x)=0$ admet au moins une solution.

D'après le Théorème de la bijection :

$f(x) = \boxed{0}$ ligne de niveau

- Sur $[-2;0]$

(1) f est continue

(2) $f(-2)=-17$, $f(0)=3$ et $-17<0<3$

(3) f strictement croissante

$f(x)=0$ admet une unique solution α

- De même, il y a une unique solution β sur $[0;2]$.

- Sur $[2;+\infty[$:

$f(\alpha) = \boxed{0}$

ligne de niveau

- Sur $[-2;0]$

(1) f est continue

(2) $f(-2) = -17$, $f(0) = 3$ et $-17 < 0 < 3$

(3) f strictement croissante

$0 \in [-17;3]$

$f(x) = 0$ admet une unique solution α

- De même, il y a une unique solution β sur $[0;2]$

- Sur $[2;+\infty[$:

(1) f est continue

(2) $f(2) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$0 \in [-1;+\infty[$

- De même, il y a une unique solution β sur $[0;2]$.

- Sur $[2;+\infty[$:

(1) f est continue

(2) $f(2) = -1$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$0 \in [-1;+\infty[$

(3) f est strictement $\nearrow$ sur $[2;+\infty[$

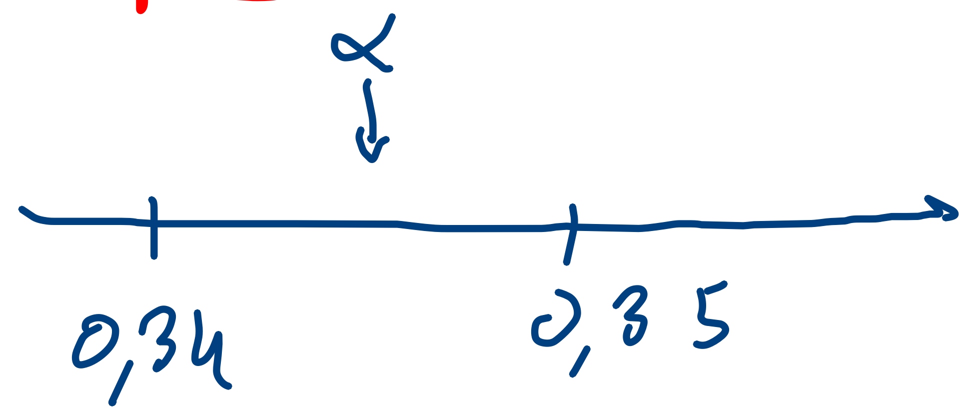
D'après le th. de la bijection $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2;+\infty[$

$\alpha = \underbrace{0,34}\,5\,6\,7$ à 10^{-2}

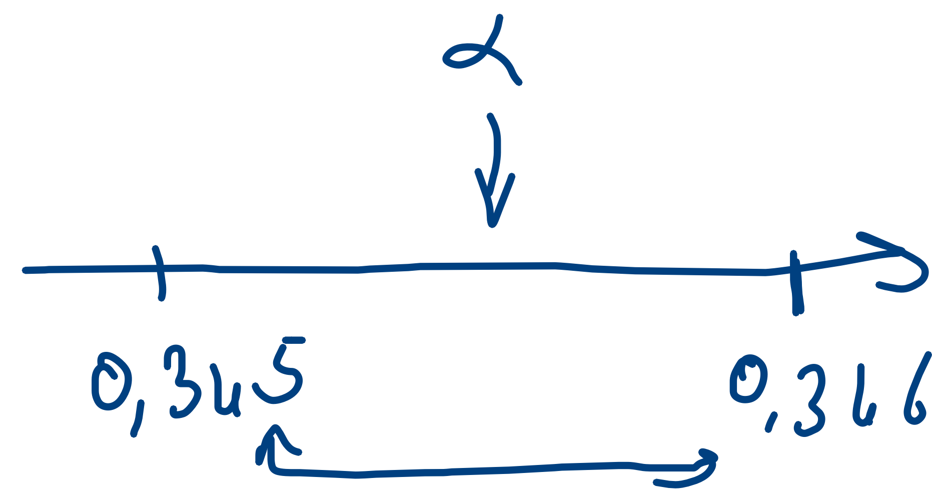
$\simeq 0,35$

encadrement à 10^{-2}

$0,34 \leq \alpha \leq 0,35$



10^{-3}

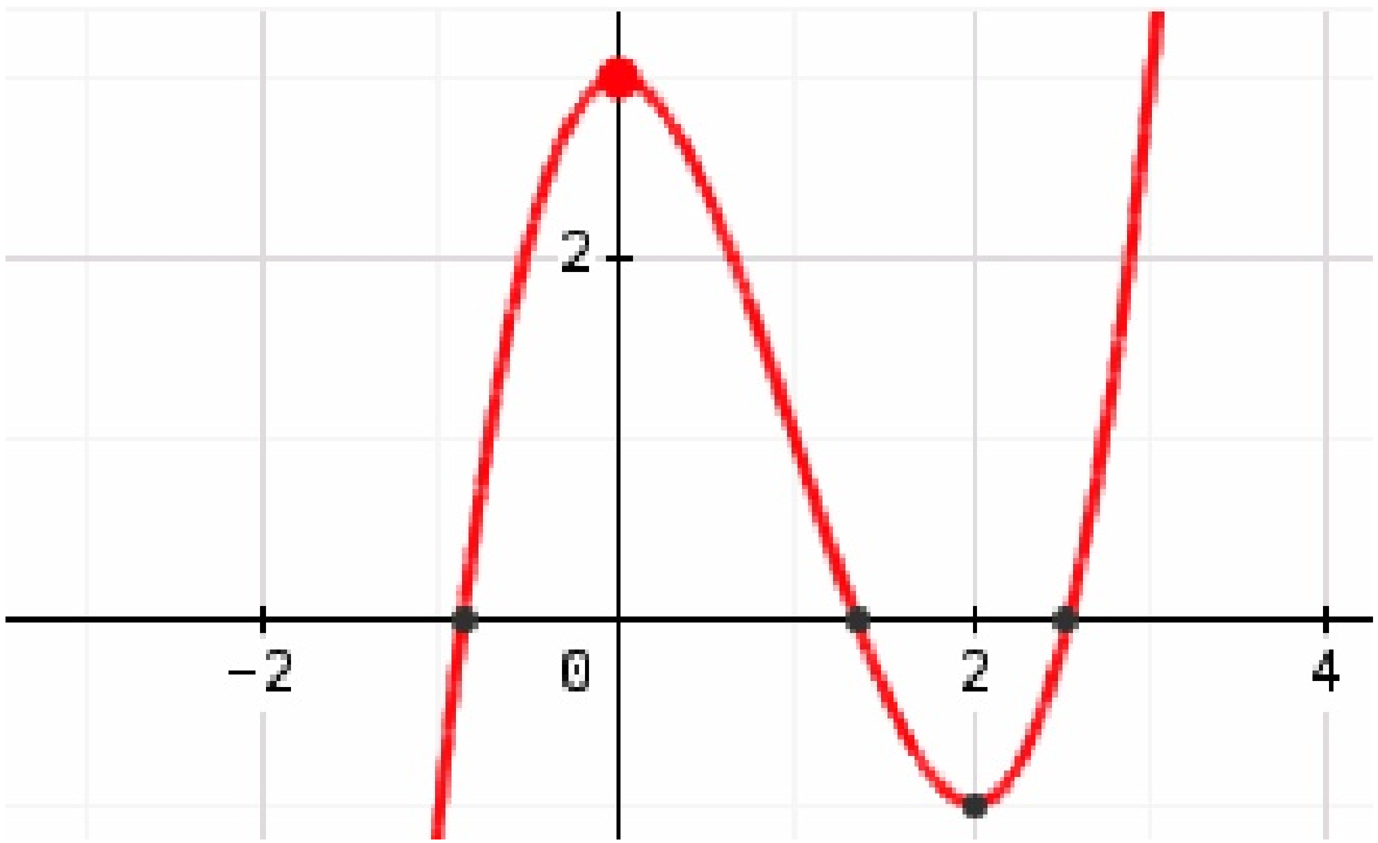


x	-2		0		2		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	-17	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

x=-0.8793852

x=1.347296

x=2.532089



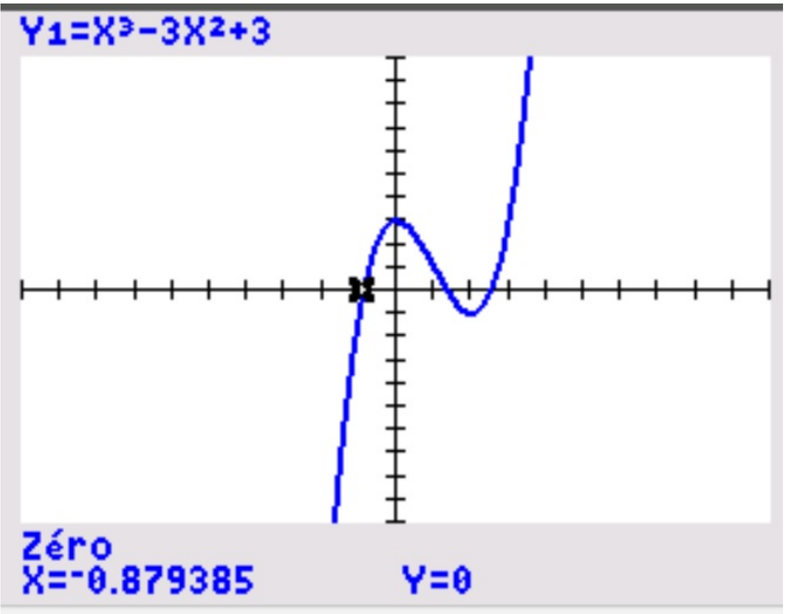
A 10^{-2} près

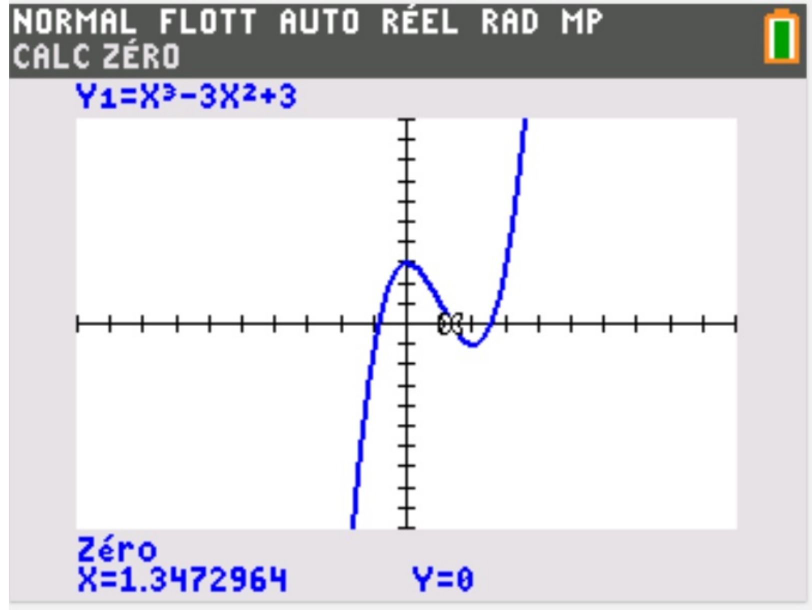
$x_0 \simeq -0,88$

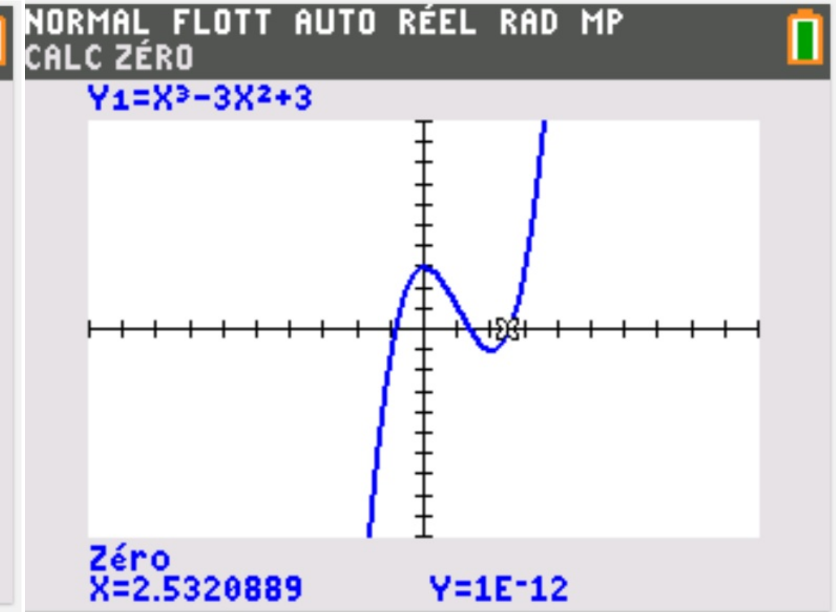
$x_1 \simeq 1,35$

$x_2 \simeq 2,53$

d'après la calculatrice.



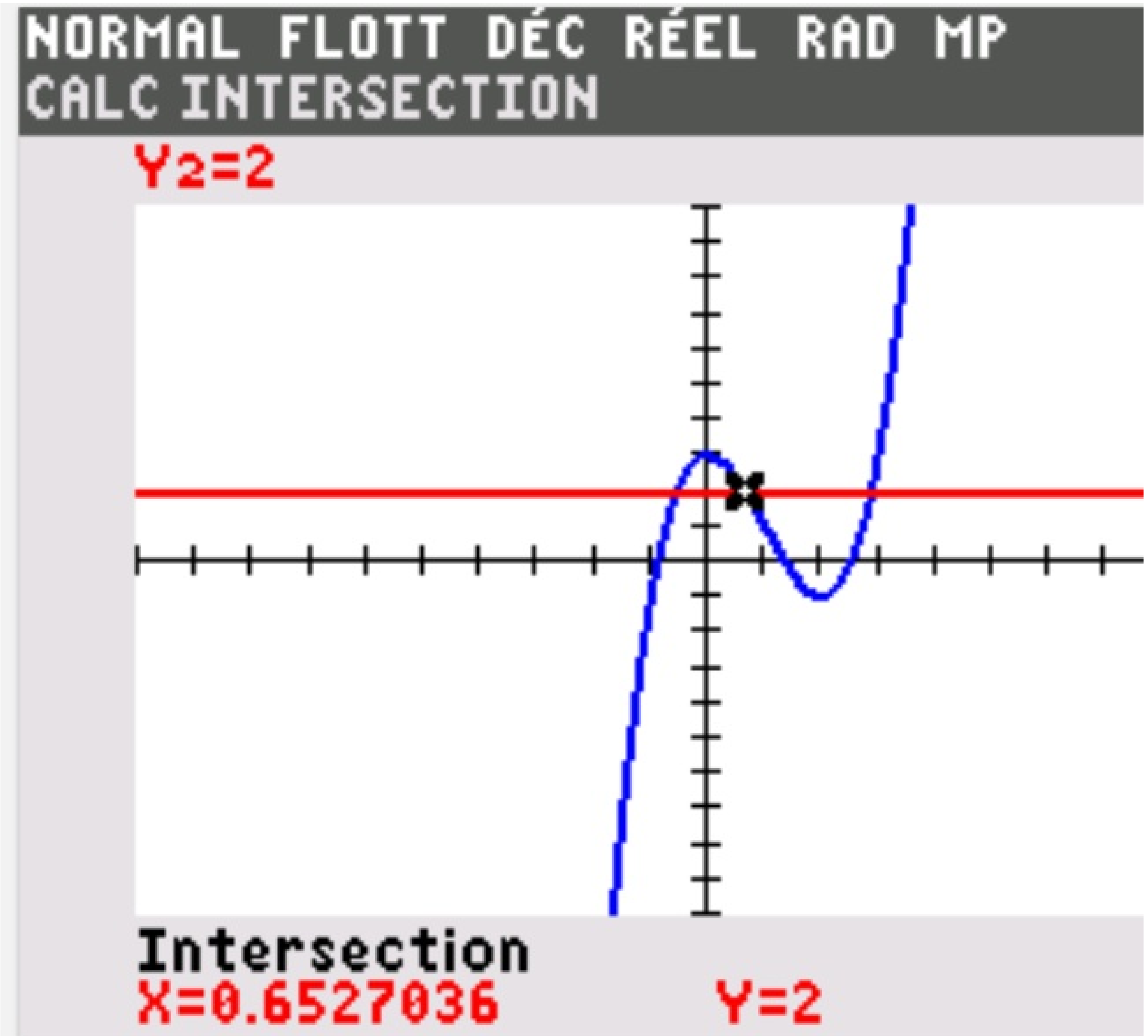




Par un programme de Dichotomie avec la calculatrice (avec une table de valeurs) on trouve $x_1 \simeq -0,88$

$x_2 \simeq 1,35$ et $x_3 \simeq 2,53$

On peut aussi dessiner f et $g(x) = 2$



$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3.$$

Utiliser "calculs" → "Intersection"

$f(x) = 2$

pour :

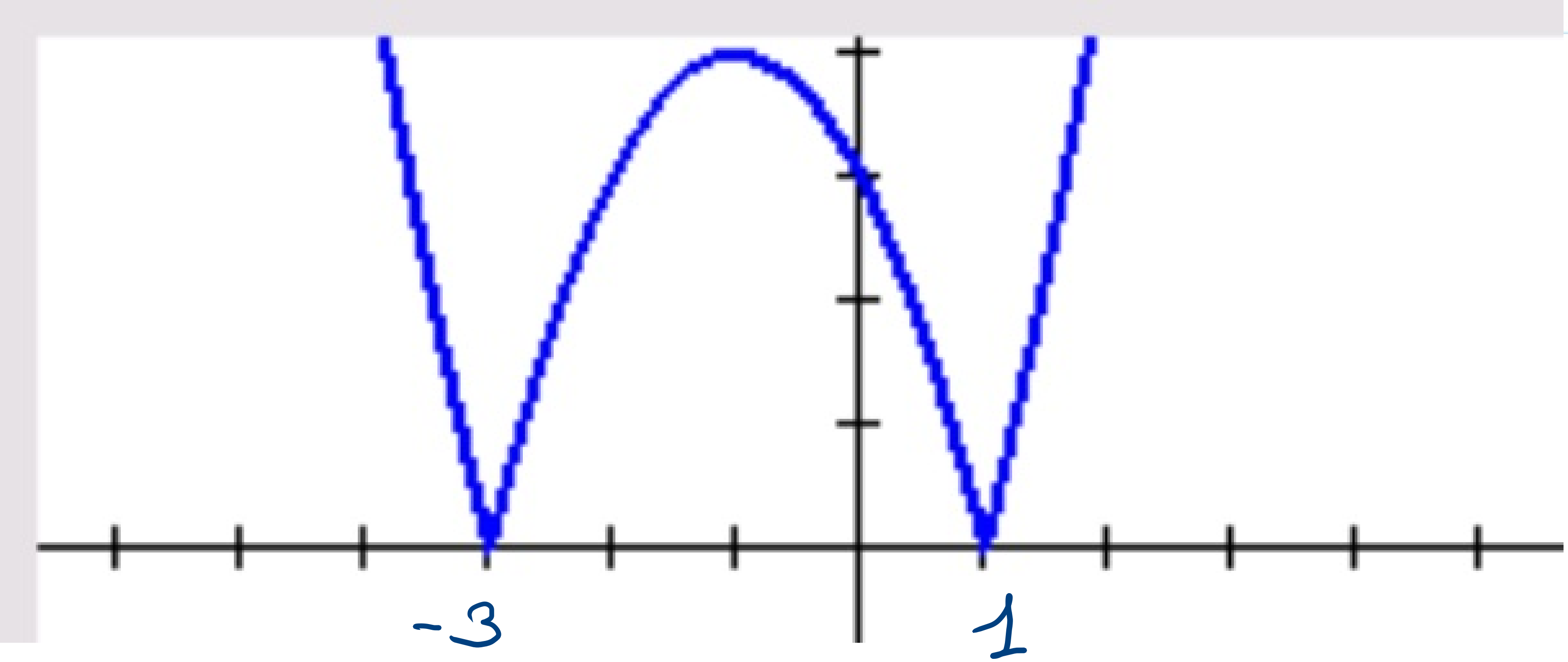
$\alpha \simeq 0{,}65$

THEOREME_BIJECTION1.html
THEOREME_BIJECTION1a.html

Méthode 2 Étudier la continuité et la dérivabilité en un point

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$.

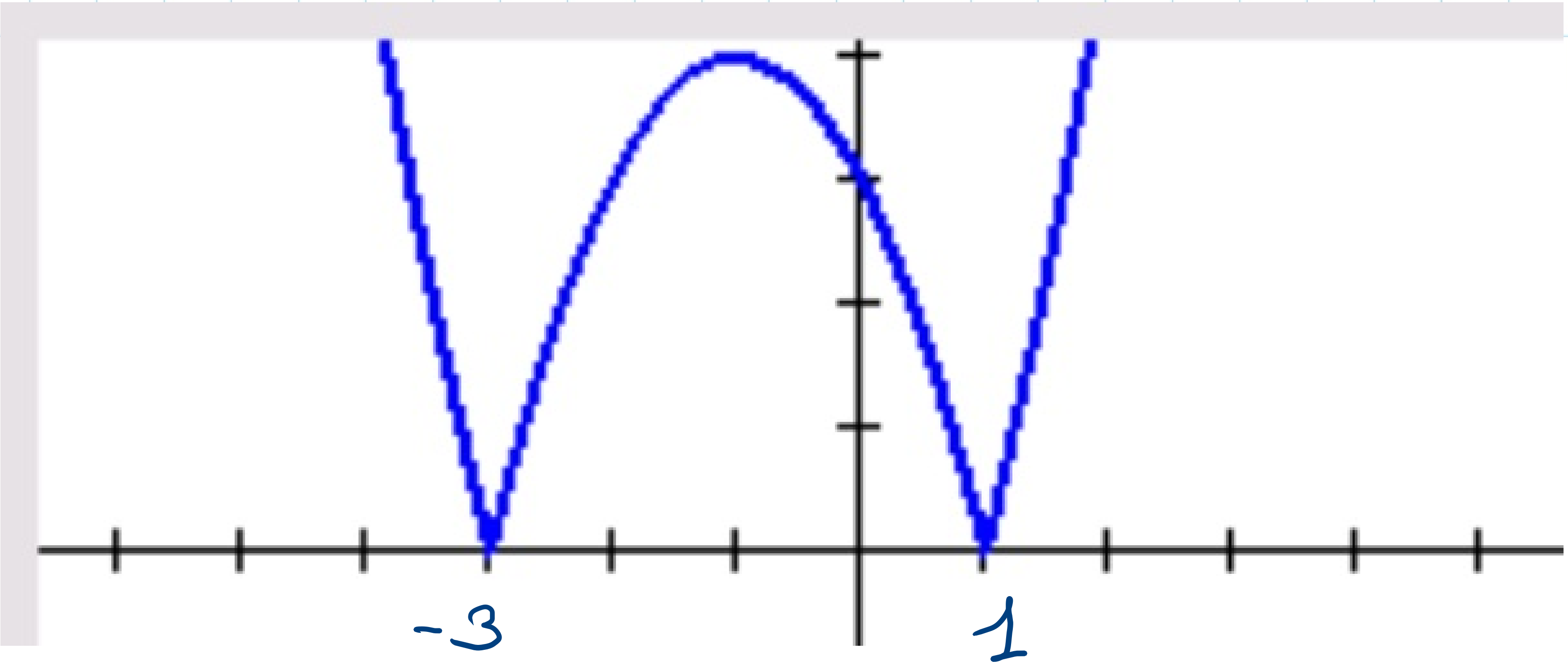


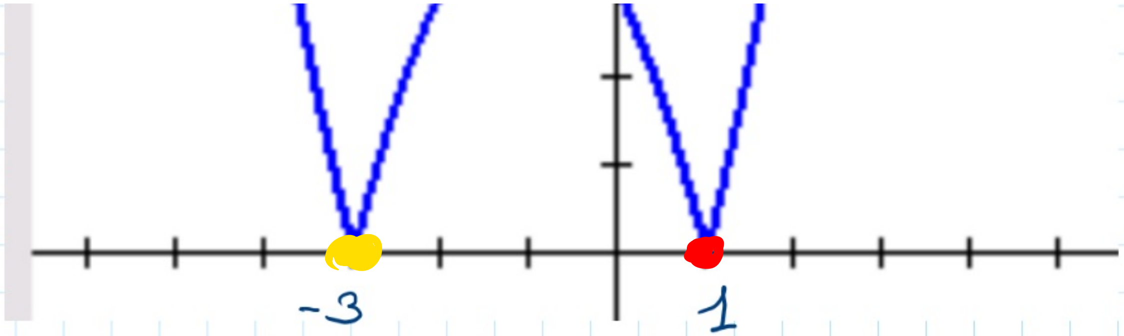
Méthode 2

Étudier la continuité et la dérivabilité en un point

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$.



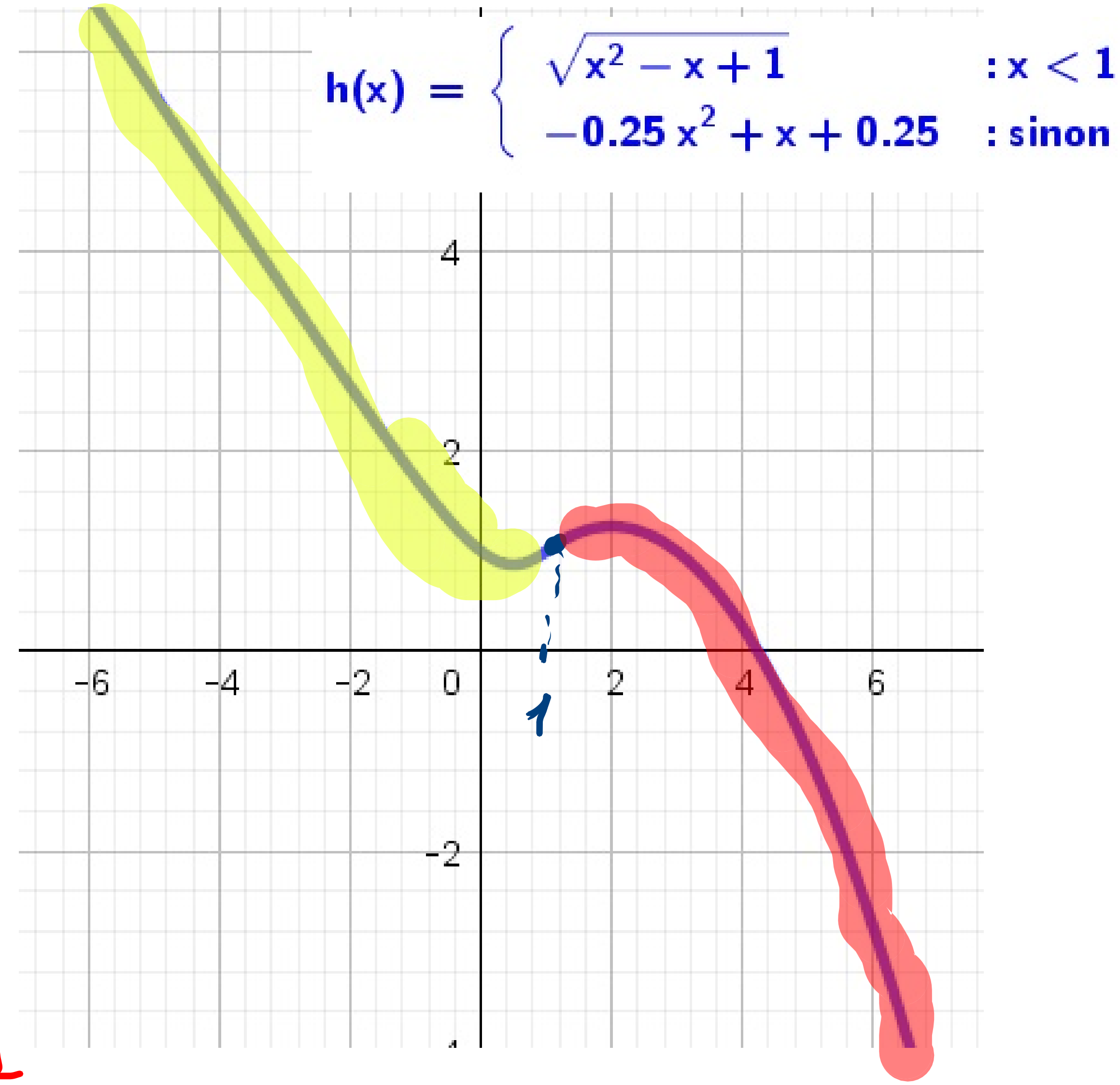


1° La fonction est continue sur $\mathbb{R}$:
en effet f est la composée de deux fonctions de référence : une fonction polynome et la fonction valeur absolue qui sont continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2° La fonction n'est pas dérivable en -3 et 1 car elle n'admet pas de tangente en $(-3 ; f(-3))$ et $(1 ; f(1))$

Exercice

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + x + \dfrac{1}{4} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$



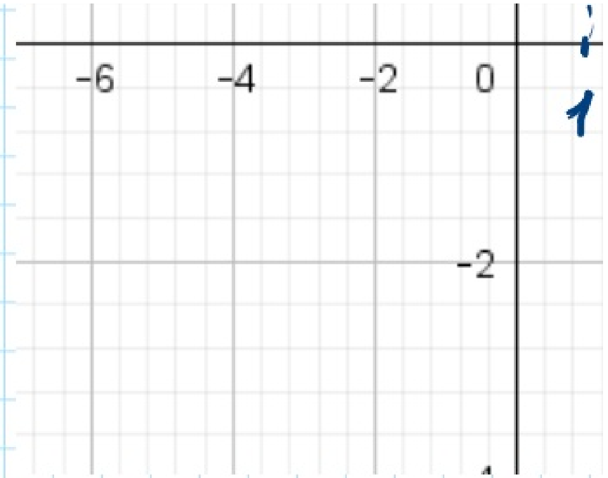
1° Continuité en 1

$$f(1) = \sqrt{1^2 - 1 + 1} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \text{"}\sqrt{1^2 - 1 + 1}\text{"} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \text{"}-\frac{1}{4} \times 1^2 + 1 + \frac{1}{4}\text{"} = 1$$

1° Continuité en 1



$$f(1) = \sqrt{1^2 - 1 + 1} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = "\sqrt{1^2 - 1 + 1}" = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = "-\frac{1}{4} \times 1^2 + 1 + \frac{1}{4}" = 1$$

Comme $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1) = 1$

f est continue en 1. Et elle est continue sur $]-\infty ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$ (fonction de référence)

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = f(1) = 1$

f est continue en 1. Et elle est continue sur $]-\infty ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$ (fonction de référence)

2° Dérivabilité en 1

$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ si $x \leqslant 1$

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$ si $x > 1$.

- **Si $x \leq 1$**

$f'(x) = [\sqrt{u}]' = [v \circ u]'$

$$x \xrightarrow{u : x \mapsto x^2 - x + 1} x^2 - x + 1 \xrightarrow{v : X \mapsto \sqrt{X}} \sqrt{x^2 - x + 1}$$

2° Dérivabilité en 1

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} \quad \text{si } x \leqslant 1$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4} \quad \text{si } x > 1.$$

• **Si $x \leq 1$**

$$f'(x) = \left[\sqrt{u}\,\right]' = [v \circ u]'$$

$$x \xrightarrow{u : x \mapsto x^2 - x + 1} x^2 - x + 1 \xrightarrow{v : X \mapsto \sqrt{X}} \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$= u' \times v'(u)$$

$$u(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow u'(x) = 2x - 1$$

$$v(x) = \sqrt{x} \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = (2x - 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$f'(1) = (2 \times 1 - 1) \times \frac{1}{2\sqrt{1^2 - 1 + 1}} = 1 \times \frac{1}{2 \times \sqrt{1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$x \xrightarrow{u\,:\,x \mapsto x^2 - x + 1} x^2 - x + 1 \xrightarrow{v\,:\,X \mapsto \sqrt{X}} \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$= u' \times v'(u)$$

$u(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow u'(x) = 2x - 1$

$v(x) = \sqrt{x} \Rightarrow v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = (2x - 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$f'(1) = (2 \times 1 - 1) \times \frac{1}{2\sqrt{1^2 - 1 + 1}} = 1 \times \frac{1}{2 \times \sqrt{1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ si $x \leqslant 1$

$f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + x + \dfrac{1}{4}$ si $x > 1$.

- $x > 1$

$$f'(x) = -\frac{1}{4} \times 2x + 1$$

$$f'(1) = -\frac{1}{4} \times 2 \times 1 + 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$2\sqrt{x}$

$$f'(x) = (2x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$f'(1) = (2\times 1 - 1) \times \frac{1}{2\sqrt{1^2 - 1 + 1}} = 1 \times \frac{1}{2\times\sqrt{1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

- $x > 1$

$$f'(x) = -\frac{1}{4} \times 2x + 1$$

$$f'(1) = -\frac{1}{4} \times 2 \times 1 + 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

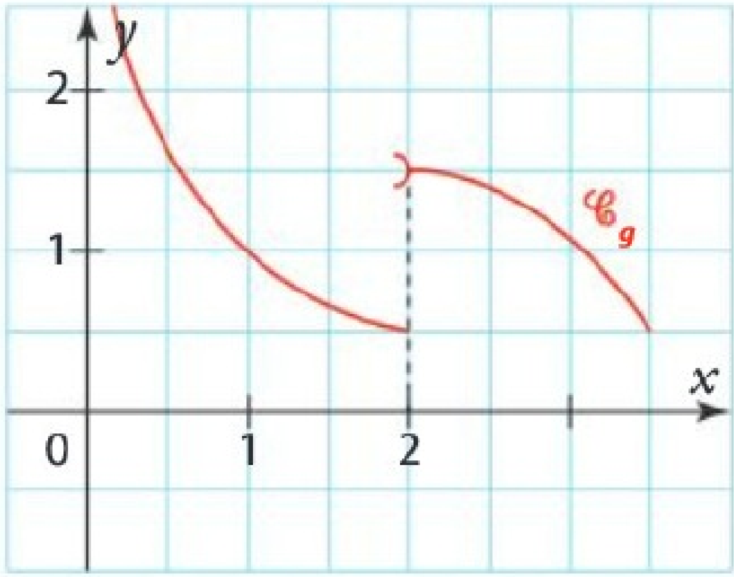
$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ si $x \leqslant 1$

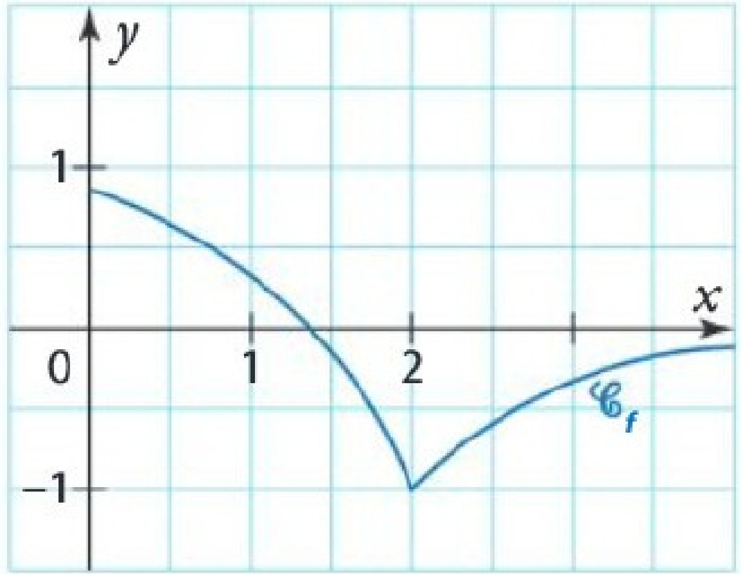
$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$ si $x > 1.$

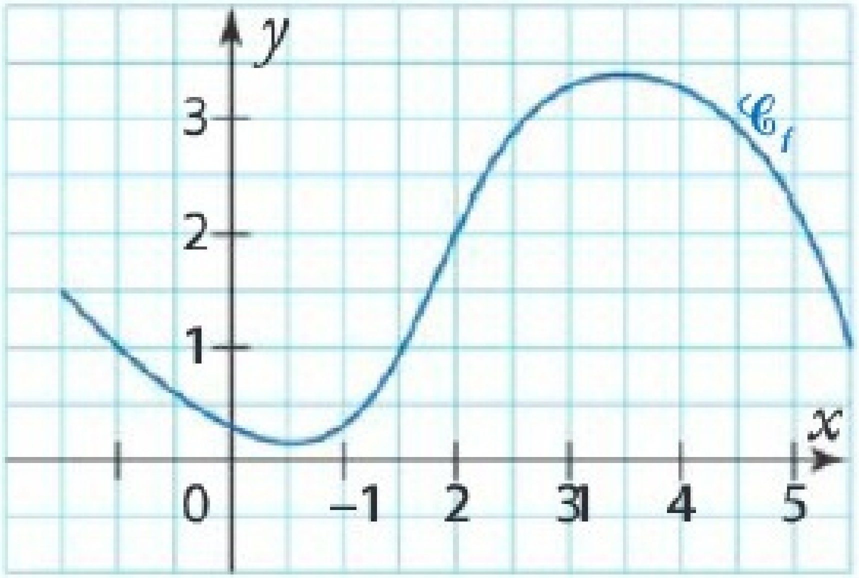
$$\boxed{(e^u)' = u' e^u}$$

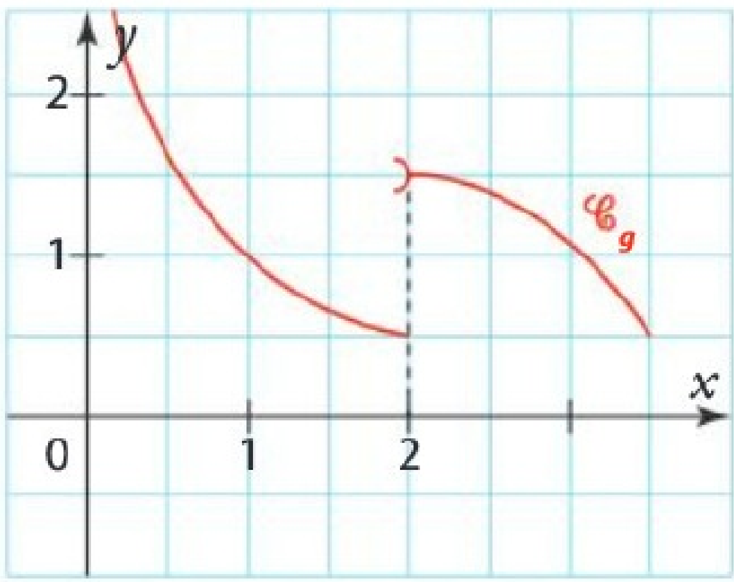
Conclusion : f est dérivable en 1

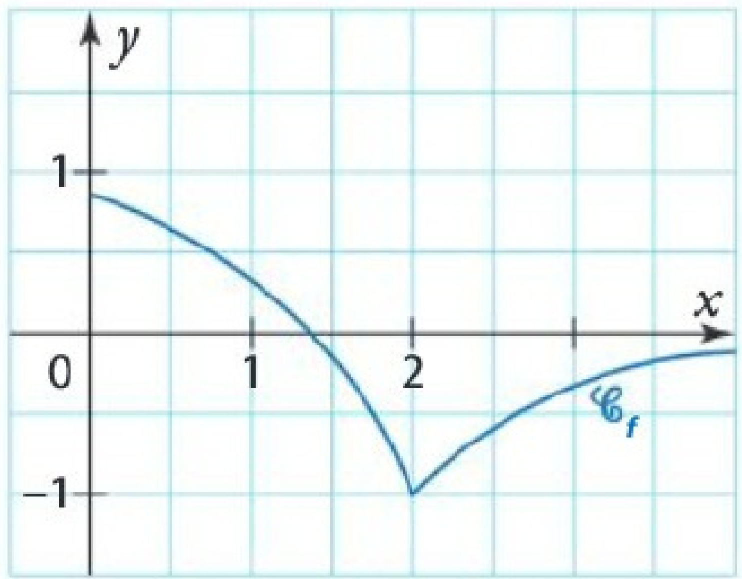
Ex 0 TD 285 – 292 – 293 (5, 3, 2) /10

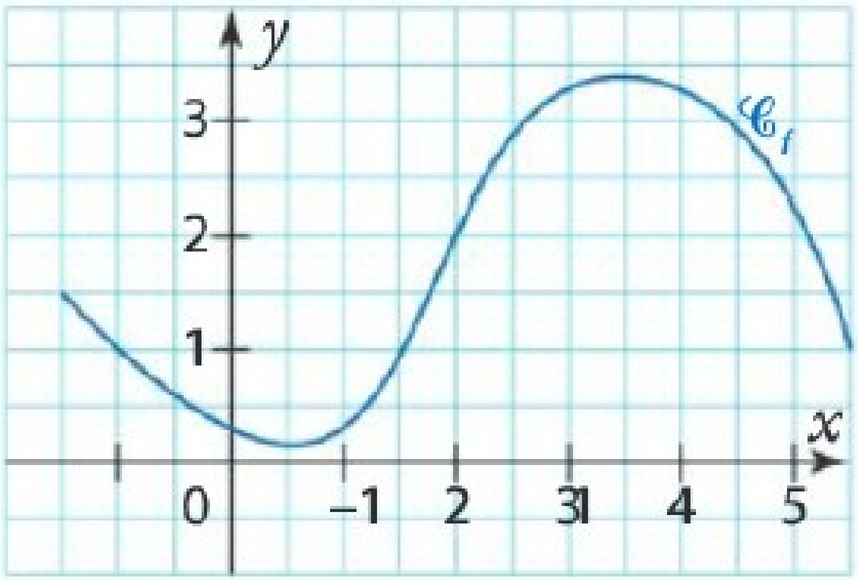

y
2
1
x
0
1
2
$\mathscr{C}_g$

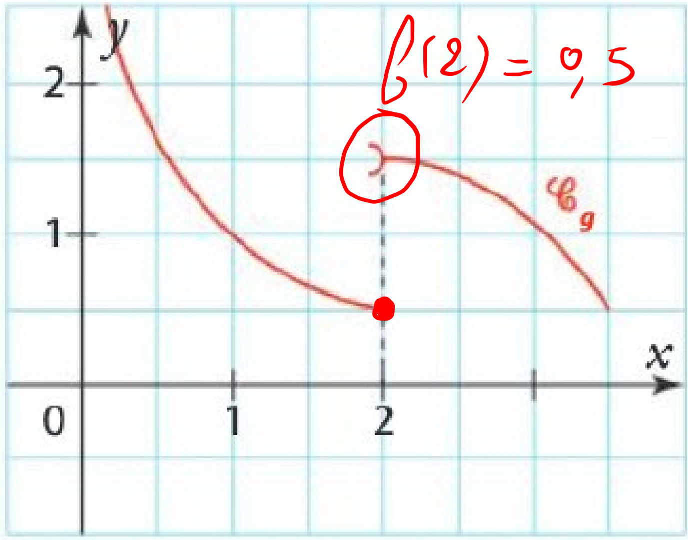

y
1
x
0
1
2
–1
$\mathscr{C}_f$

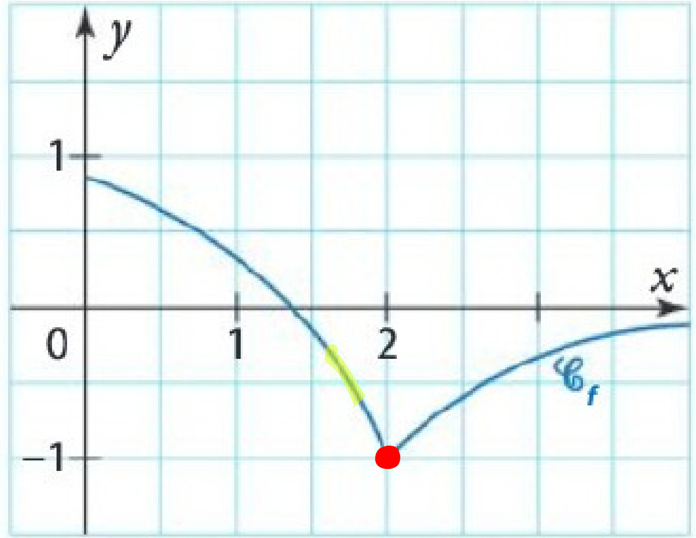

y
3
2
1
x
0
–1
2
31
4
5
$\mathscr{C}_f$

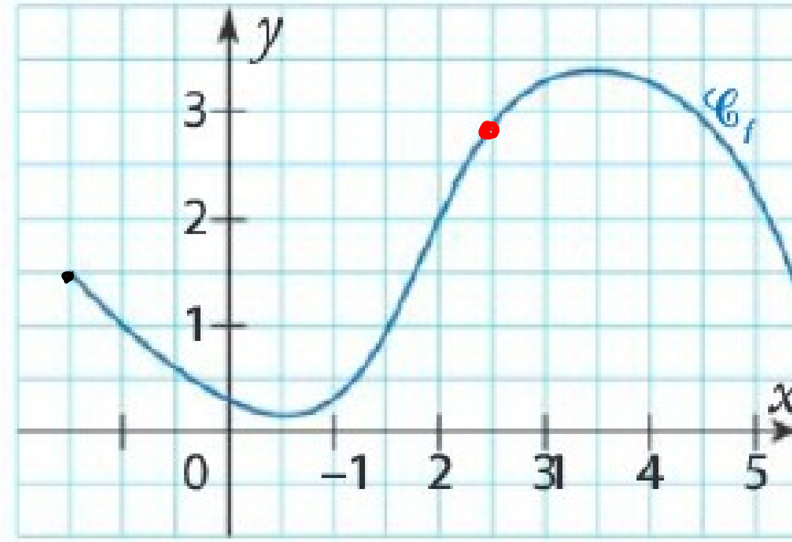

y
2
1
x
0
1
2
$\mathscr{C}_g$


y
1
x
0
1
2
–1
$\mathscr{C}_f$


y
3
2
1
x
0
–1
2
31
4
5
$\mathscr{C}_f$



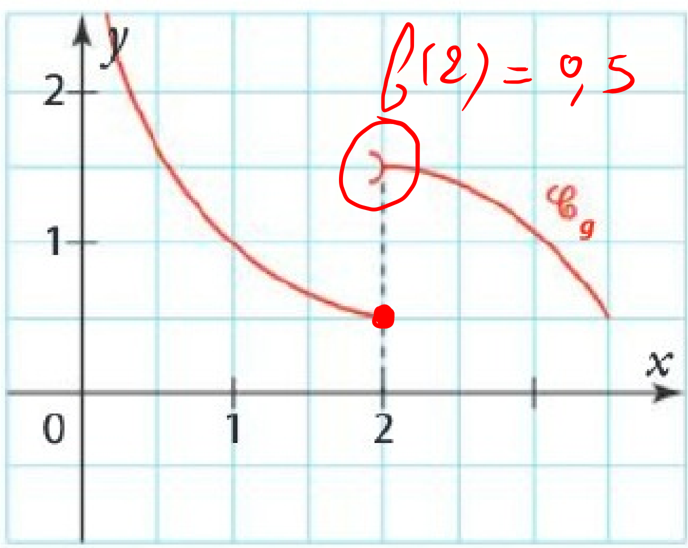


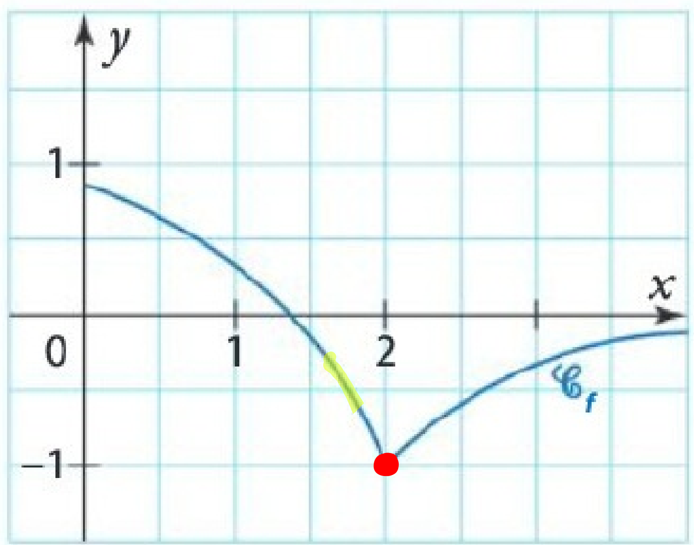


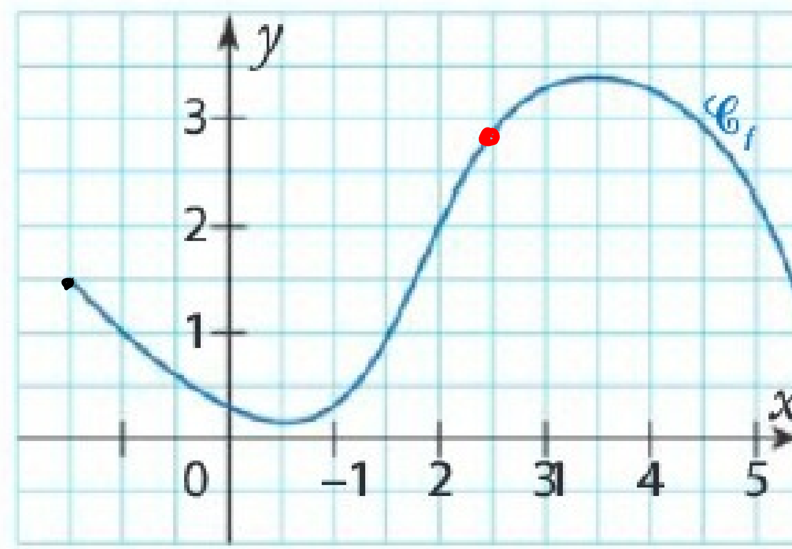
DISCONTINUE
NON DERIVABLE
en 2

CONTINUE
NON DERIVABLE
en 2

CONTINUE
DERIVABLE
en 2,5



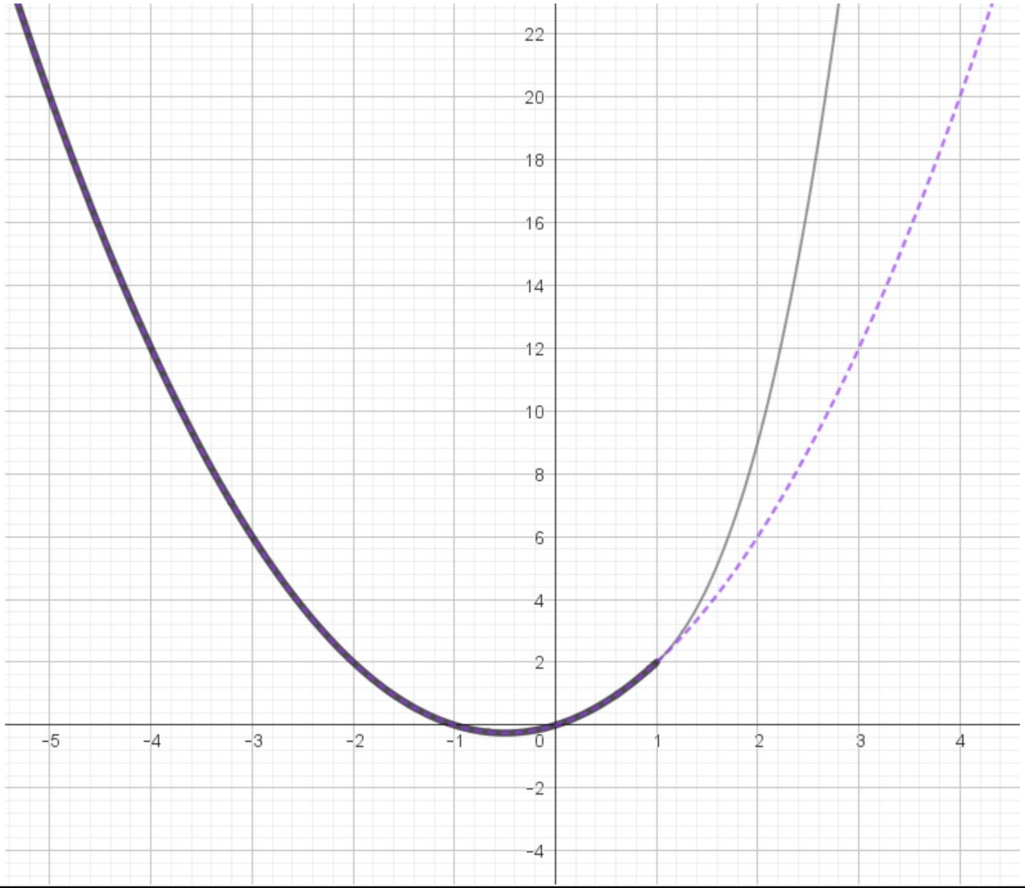


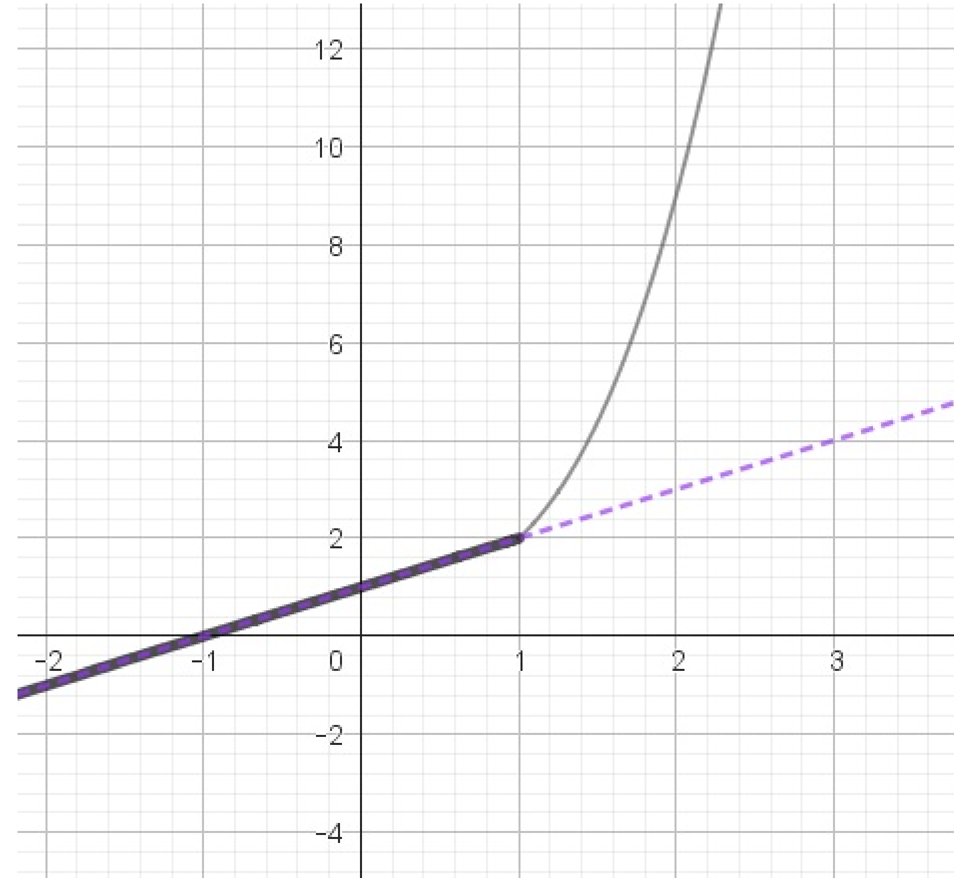


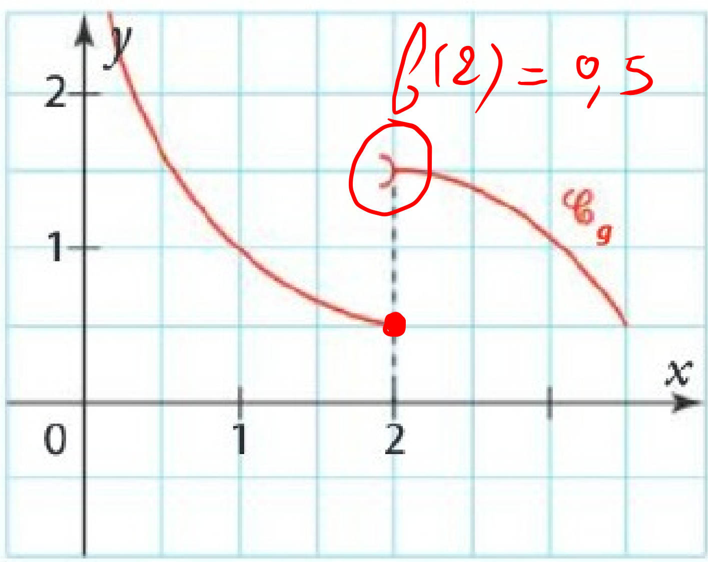
DISCONTINUE
NON DERIVABLE
en 2

CONTINUE
NON DERIVABLE
en 2

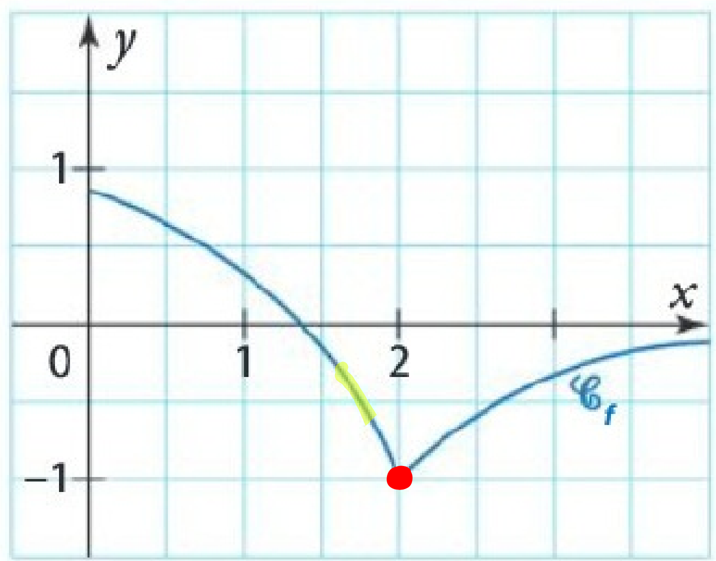
CONTINUE
DERIVABLE
en 2,5



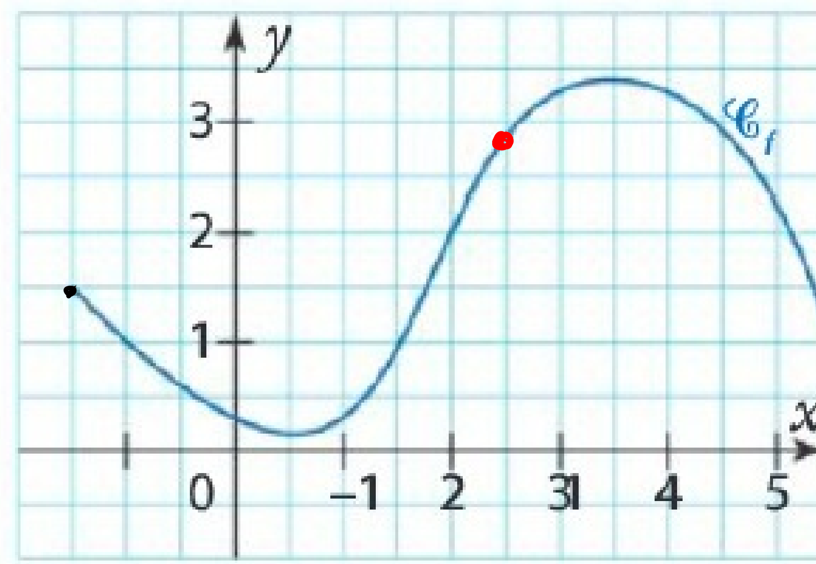




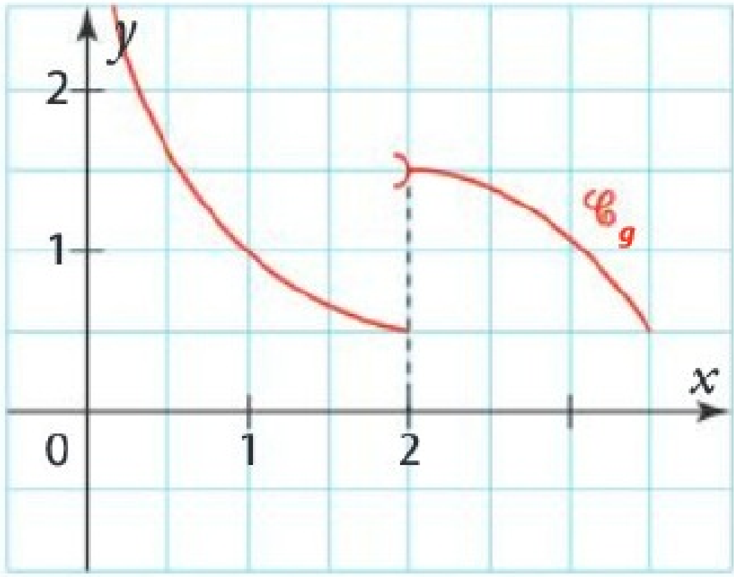
DISCONTINUE
NON DERIVABLE
en 2

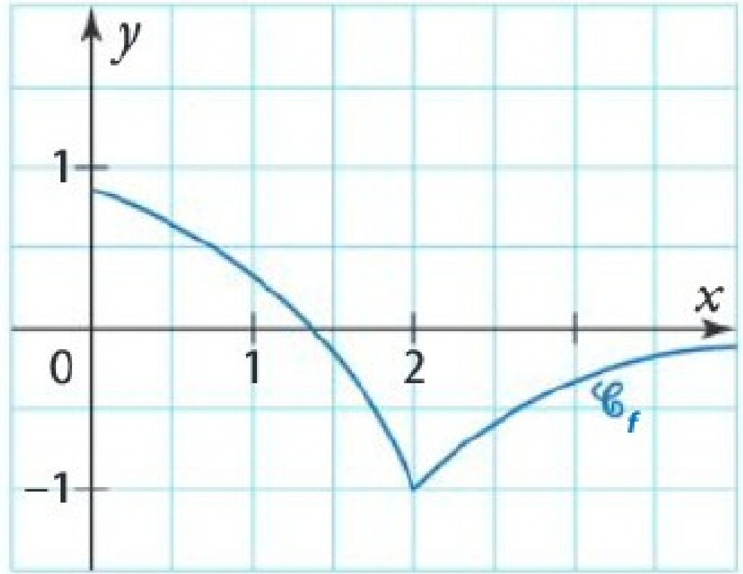


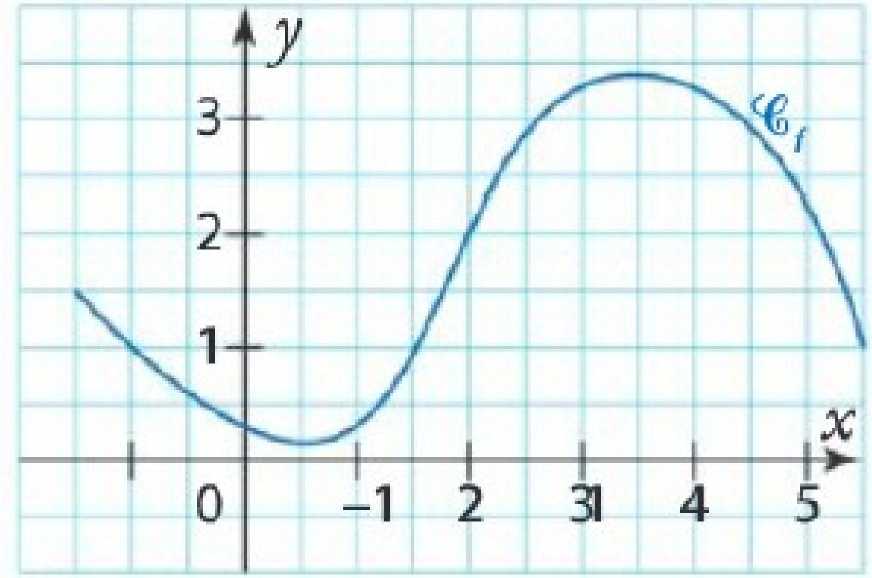
CONTINUE
NON DERIVABLE
en 2

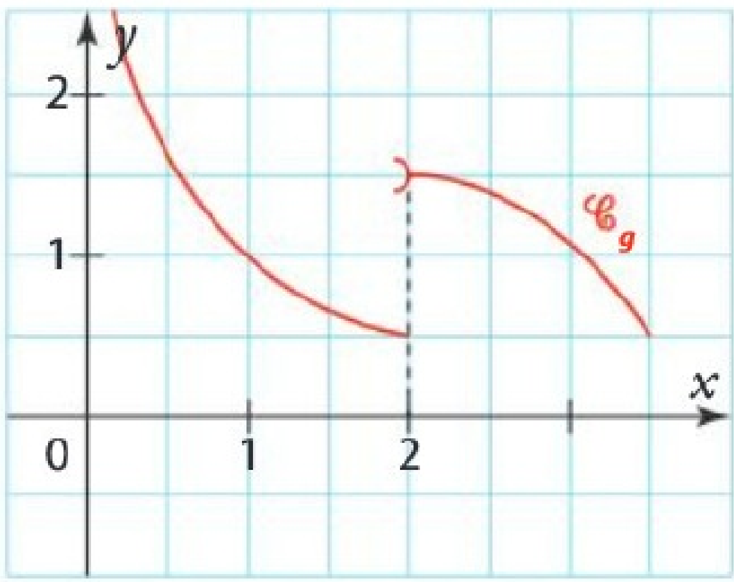


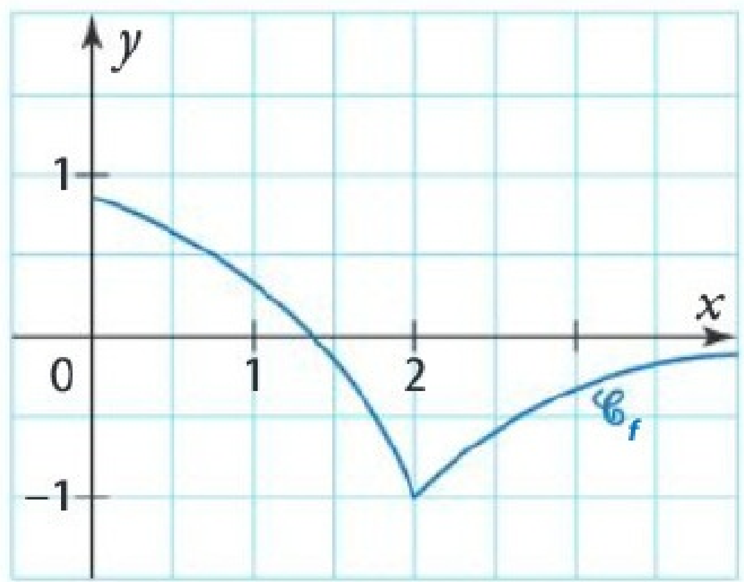
CONTINUE
DERIVABLE
en 2,5

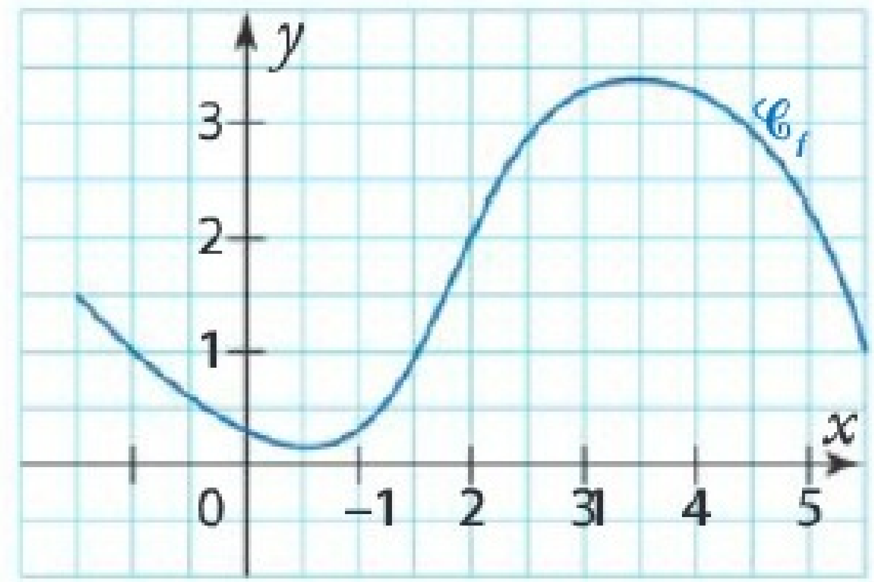

y
2
1
0
1
2
x
$\mathscr{C}_g$


y
1
0
1
2
x
−1
$\mathscr{C}_f$


y
3
2
1
0
−1
2
31
4
5
x
$\mathscr{C}_f$


y
2
1
0
1
2
x
$\mathscr{C}_g$


y
1
0
1
2
x
−1
$\mathscr{C}_f$


y
3
2
1
0
−1
2
31
4
5
x
$\mathscr{C}_f$