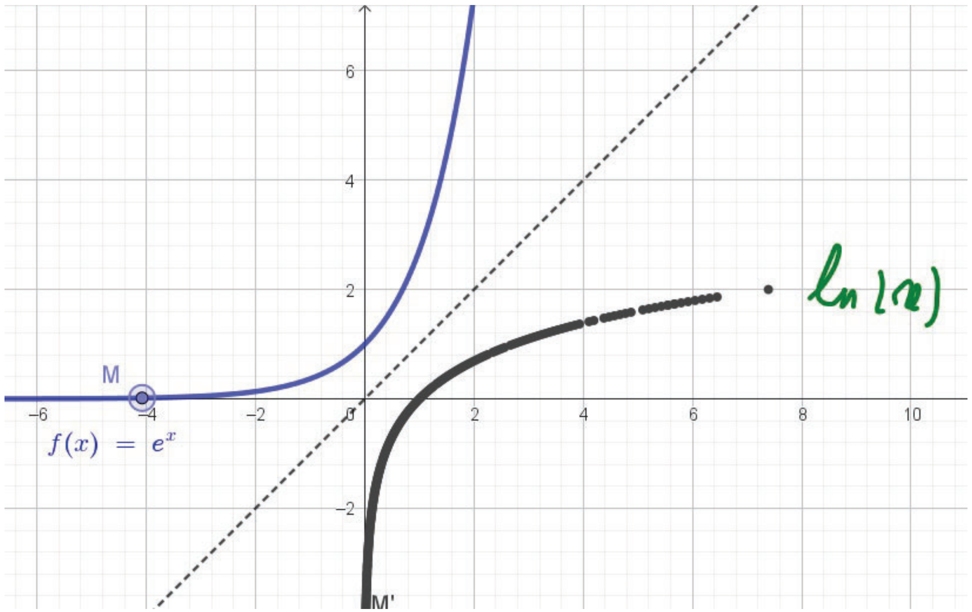
CHAPITRE 6

LOGARITHME

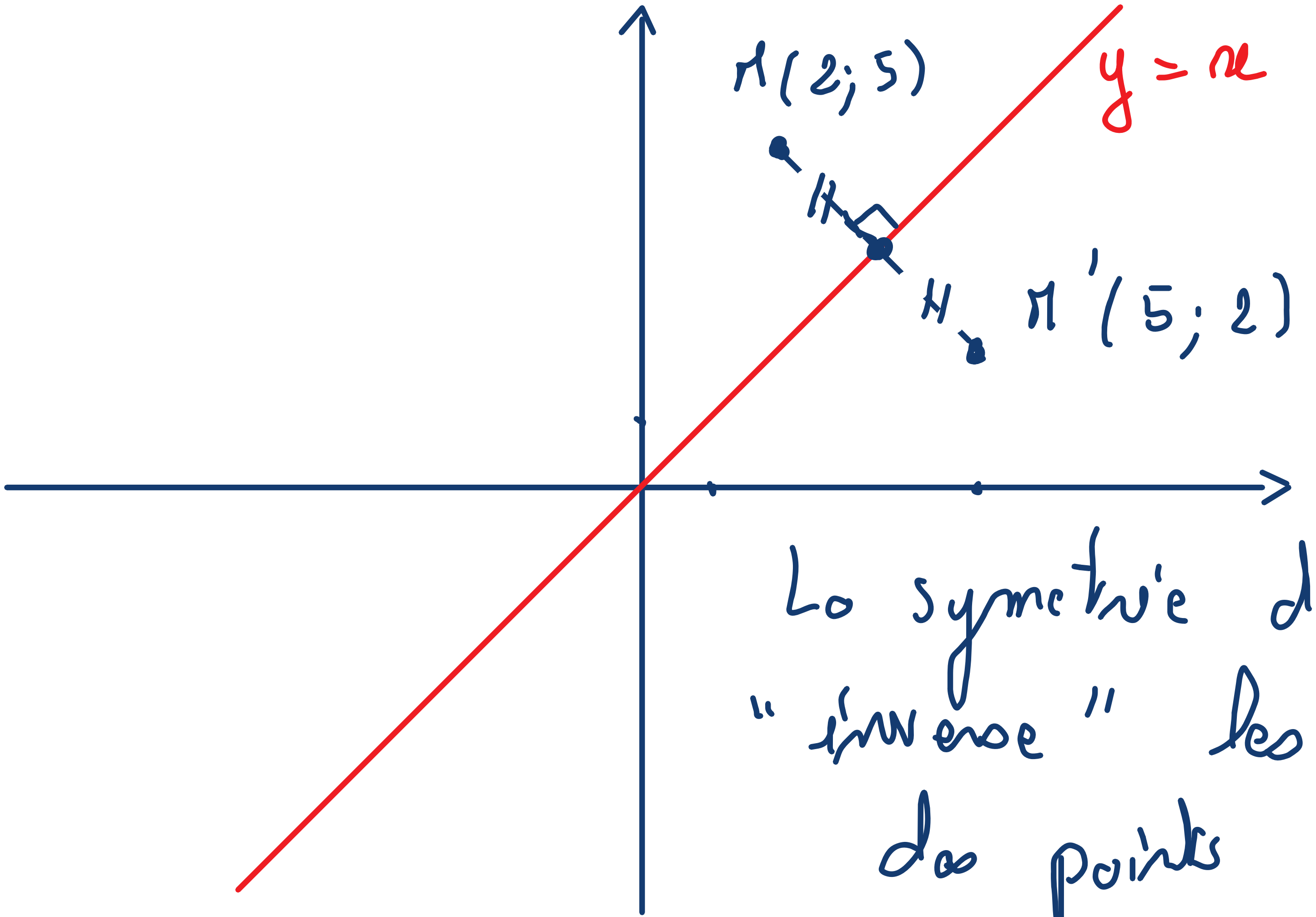
Representation graphique d'une fonction réciproque → Geogebra



FCT_RECIPROQUE.gbb

Révision

Representation graphique d'une fonction réciproque → Geogebra



Propriété

La symétrie d'axe $y = x$ "inverse" les coordonnées des points

1 Fonction logarithme népérien, fonction inverse de la fonction exponentielle

$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$

$e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$

Définition Fonction logarithme népérien

On appelle fonction logarithme népérien, notée ln, la fonction définie sur]0 ; +∞[qui à tout nombre réel strictement positif x associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$ d'inconnue y. On définit ainsi $y = \ln(x)$.

Exemples

$x \xrightarrow{\ln} 2$, $2 \xrightarrow{\exp} x$

$e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$

$\ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2$

$e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln(5)$

$x \xrightarrow{\exp} 5$, $5 \xrightarrow{\ln} x$

On peut écrire exp o

$\ln(x) = 2$

$\exp(\ln(x)) = \exp(2)$

$x = e^2$

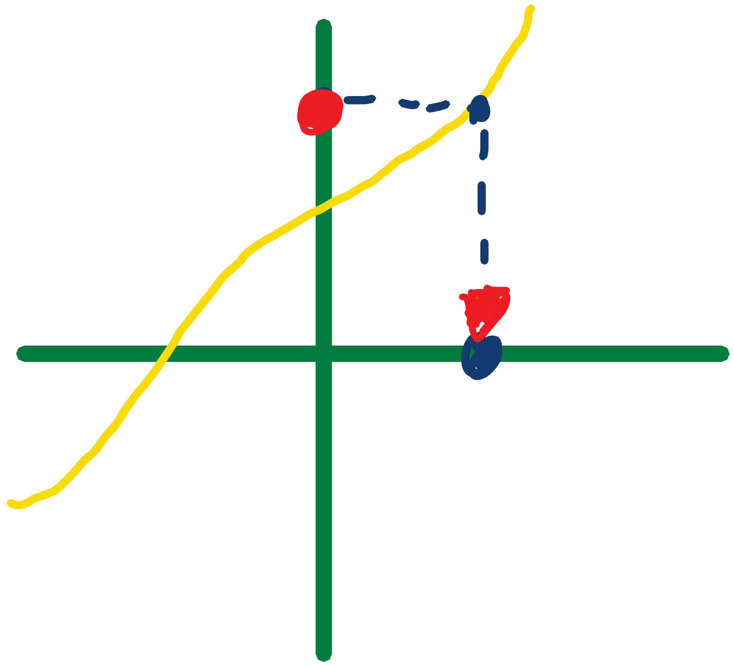
$e^x = 5$

$\exp(x) = 5$

$\ln(\exp(x)) = \ln(5)$

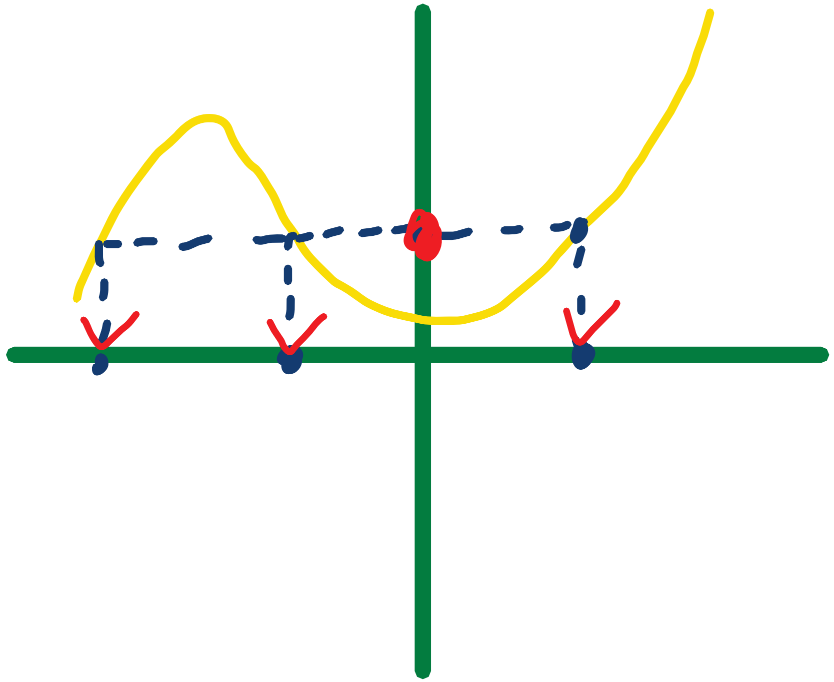
$x = \ln(5)$

Définition de bijection



Un seul antécédent

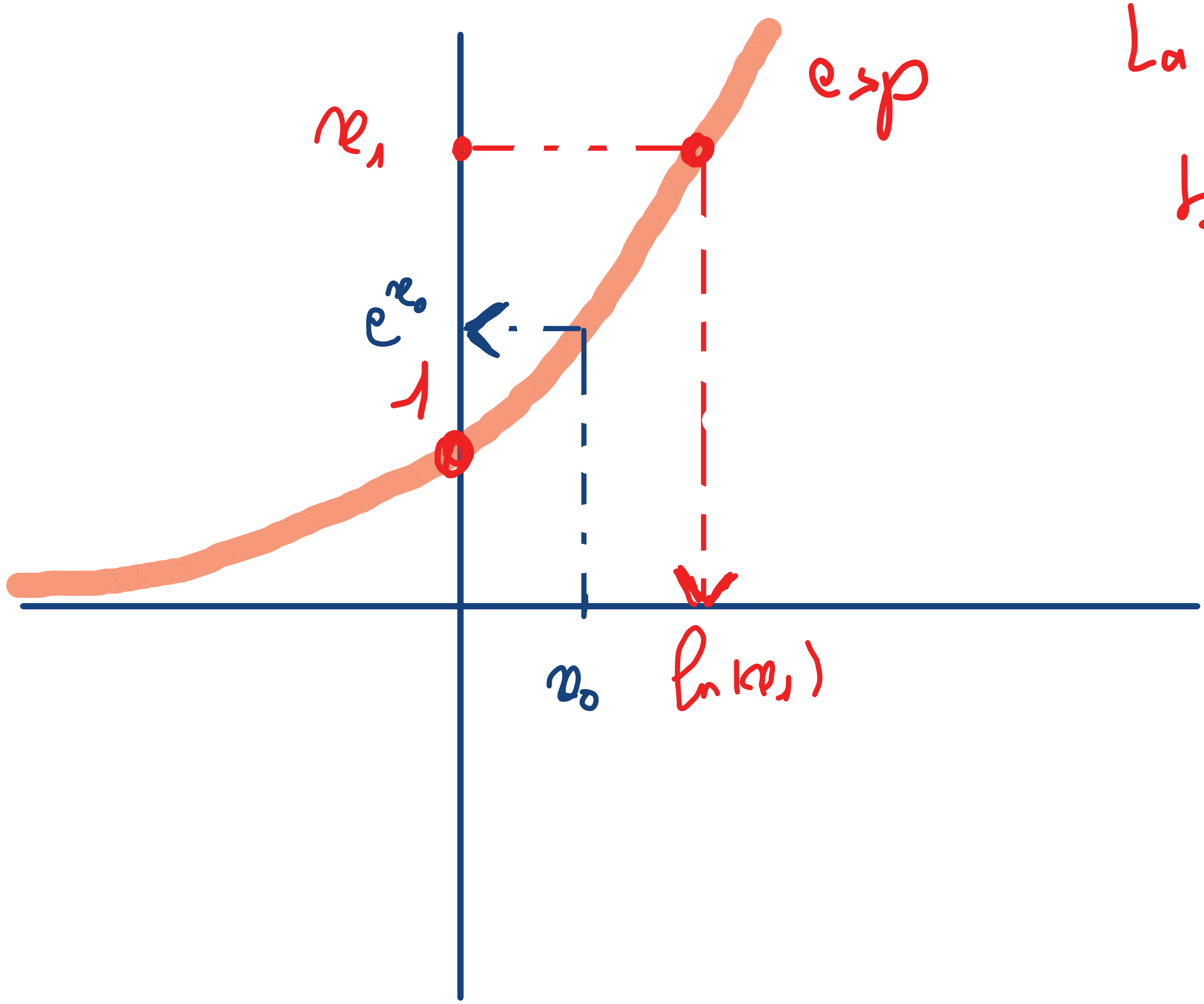
Bijective



Plusieurs antécédents

Non Bijective

Existence et unicité



La fonction exp est bijective d'où l'existence et l'unicité de $\ln(x)$

$$\boxed{\begin{array}{c} e^0 = 1 \\ \ln(1) = 0 \end{array}}$$

Exercice

1) L'équation $e^{-3x-6} = 1$ admet pour ensemble de solutions $\boxed{\{-2\}}$ Sol

$$e^{-3x-6} = 1 \iff \ln\left(e^{-3x-6}\right) = \ln(1) \iff -3x-6 = 0$$

$$0 \xrightarrow{e^x} 1 \qquad 0 \xleftarrow{\ln(x)} 1$$

$$\iff \boxed{x = -2} \qquad \boxed{\ln 1 = 0}$$

2) L'équation $e^{-8x+31} = \frac{1}{e}$ admet pour ensemble de solutions $\boxed{\{4\}}$ Sol

$$e^{-8x+31} = \frac{1}{e} \iff \ln\left(e^{-8x+31}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{a} = a^{-1}}$$

$$\iff \ln\left(e^{-8x+31}\right) = \ln\left(e^{-1}\right) \iff -8x+31 = -1$$

$$\iff x = 4$$

3) L'équation $e^{7x-20} = e$ admet pour ensemble de solutions $\boxed{}$ Sol

Exercice

1) L'équation $e^{-3x-6} = 1$ admet pour ensemble de solutions $\{-2\}$ Sol

$$e^{-3x-6} = 1 \iff \ln\left(e^{-3x-6}\right) = \ln(1) \iff -3x-6 = 0$$

$$0 \xrightarrow{e^x} 1 \qquad 1 \xrightarrow{\ln(x)} 0$$

$$\iff \boxed{x = -2}$$

2) L'équation $e^{-8x+31} = \frac{1}{e}$ admet pour ensemble de solutions $\{4\}$ Sol

$$e^{-8x+31} = \frac{1}{e} \iff \ln\left(e^{-8x+31}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\frac{1}{a} = a^{-1}$$

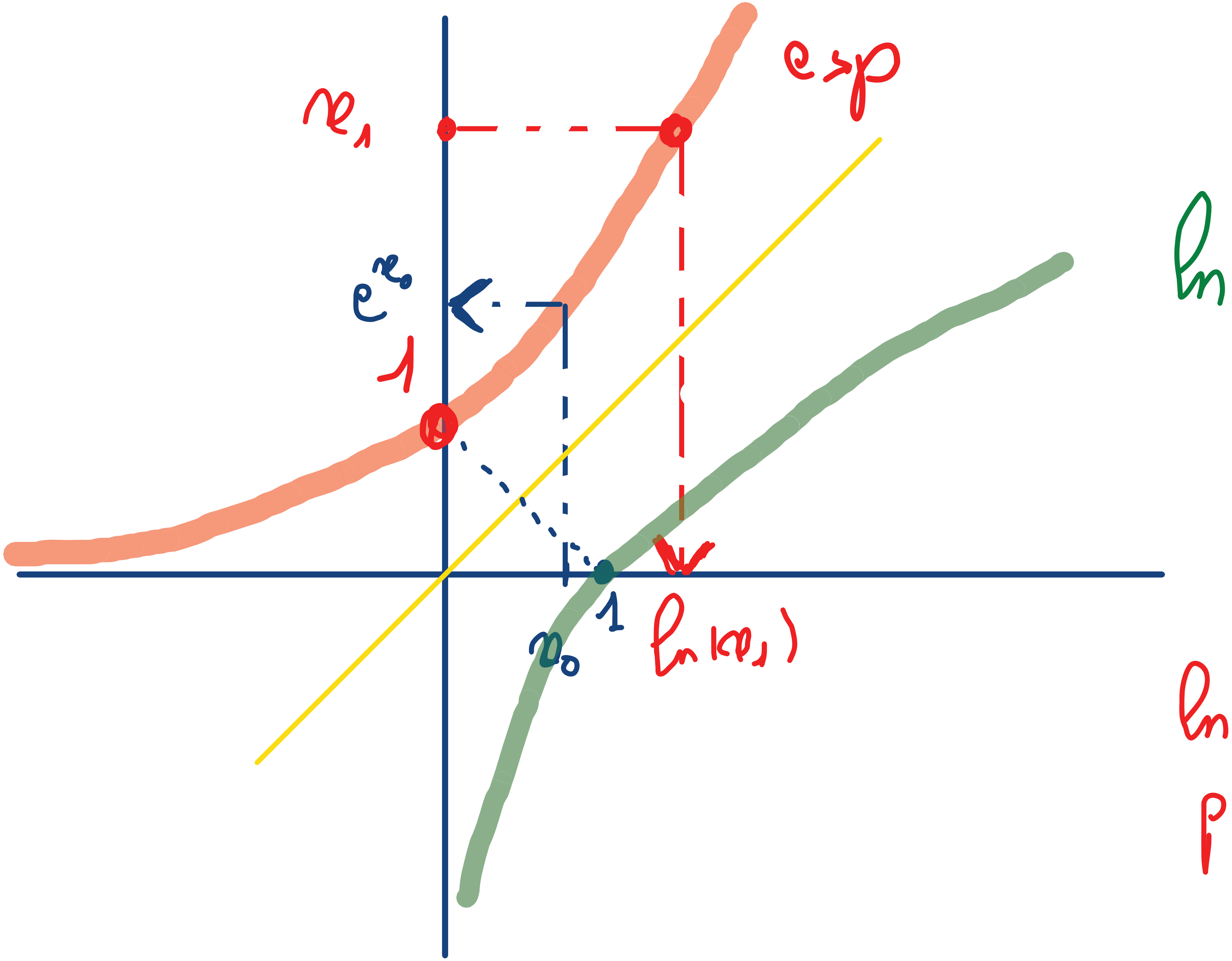
$$\iff \ln\left(e^{-8x+31}\right) = \ln\left(e^{-1}\right) \iff -8x+31 = -1$$

$$\iff x = 4$$

3) L'équation $e^{7x-20} = e$ admet pour ensemble de solutions $\{3\}$ Sol

$$e^{7x-20} = e \iff \ln\left(e^{7x-20}\right) = \ln\left(e^{1}\right)$$

$$\iff 7x-20 = 1 \iff x = 3$$



$\ln(x)$ définie pour $x > 0$

Application

Exercice 2 : Résoudre des inéquations

(1) L'inéquation $ln\,(56 - 8x) < 1$ est définie sur l'intervalle]-∞;?[et admet pour ensemble de solutions S=](?-e)/?;?[

(2) L'équation $ln\,(54 - 6x) = 1$ est définie sur l'intervalle]-∞;?[et admet pour ensemble de solutions S= (?-e)/?

Méthode : ln est définie sur $]0\,;+\infty[$ l'inéquation

- D_I domaine de définition de
- Résolution

(1) $\ln(56-8x) < 1$

- $56-8x > 0 \iff -8x > -56$

$\iff \dfrac{-8x}{-8} < \dfrac{-56}{-8}$

$\iff x < 7$, $\boxed{D_I =]-\infty\,;7[}$

Méthode : ln est définie sur $]0;+\infty[$

- D_I domaine de définition de l'inégalité
- Résolution

① $\ln(56-8x) < 1$

- $56-8x > 0 \iff -8x > -56$

$\iff \frac{-8x}{-8} < \frac{-56}{-8}$

$\iff x < 7$, $D_I =]-\infty;7[$

- Solution $\ln(56-8x) < 1$, comme exp ↗

$\exp(\ln(56-8x)) < \ln(1)$ $\iff e^{\ln(56-8x)} < e^1 \iff 56-8x < e$

fct ↗ $\iff$ conserve l'ordre

$\iff -8x < e - 56 \iff \frac{-8x}{-8} > \frac{(e-56)\times(-1)}{(-8)\times(-1)}$

$\iff x > \frac{56-e}{8}$ $\quad (a-b)\times(-1) = b-a$

• Solution $\ln(56-8x) < 1$, comme exp ↗

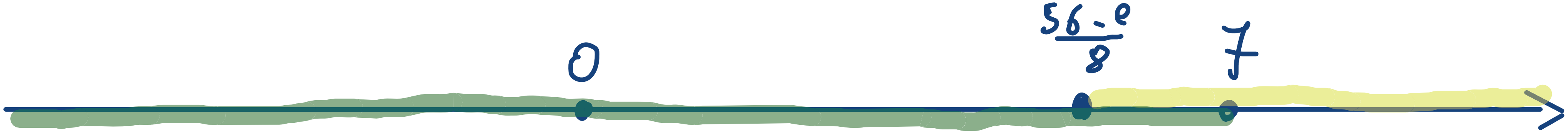
$\iff e^{\ln(56-8x)} < e^1 \iff 56-8x < e$

$\iff -8x < e-56 \iff \dfrac{-8x}{-8} > \dfrac{(e-56)\times(-1)}{(-8)\times(-1)}$

$\iff x > \dfrac{56-e}{8}$

donc $S = \left]\dfrac{56-e}{8} ; +\infty\right[\cap D_I$

$S = \left]\dfrac{56-e}{8} ; +\infty\right[\cap \left]-\infty ; 7\right[$



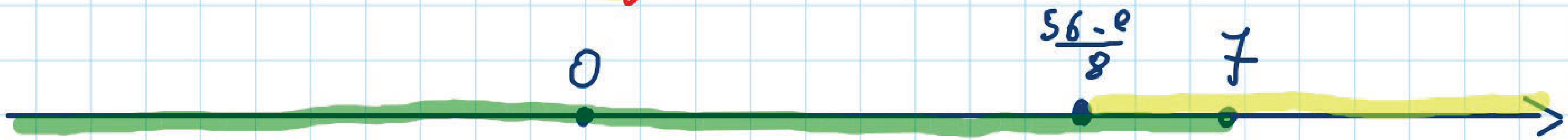
$(56-e^1)/8$

6.660214771

$$\Leftrightarrow x > \frac{56-e}{8}$$

donc $S = \left] \frac{56-e}{8} ; +\infty \right[\cap D_I$

$S = \left] \frac{56-e}{8} ; +\infty \right[\cap \left] -\infty ; 7 \right[$



(56-e^1)/8

6.660214771

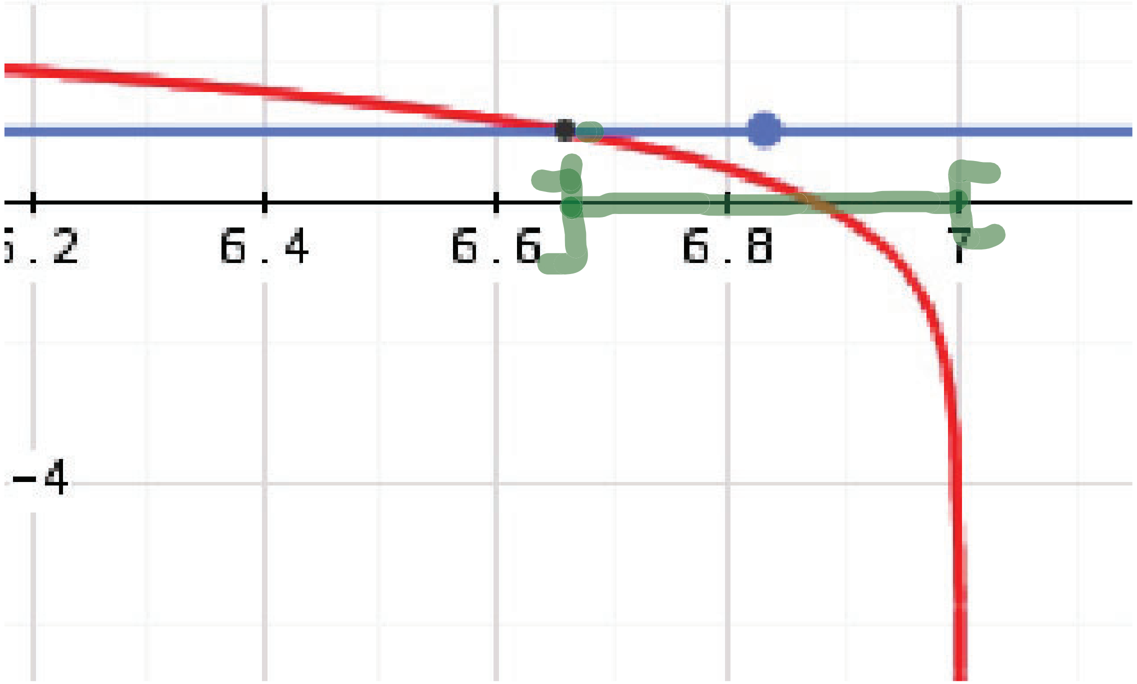
$$S = \left] \frac{56-e}{8} ; 7 \right[$$

$f(x)=\ln(56-8x)$

Fonction logarithmique

$g(x)=1$

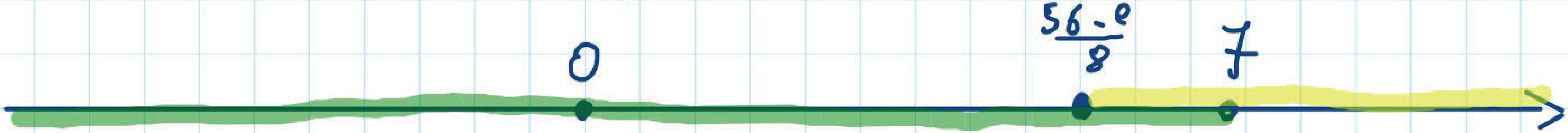
Fonction constante



2° $ln(54-6x)=1$

donc $S = \left]\frac{56-e}{8};+\infty\right[\cap D_I$

$S = \left]\frac{56-e}{8};+\infty\right[\cap \left]-\infty;7\right[$



$(56-e^1)/8$

6.660214771

Donc $S = \left]\frac{56-e}{8};7\right[$

EXOID 359

EXOID 356

EXOID 357

EXOID 358

EXPONENTIELLE_EQUATIONS1b

EQUATIONS_INEQUATIONS_LOG_EXP0
EQUATIONS_INEQUATIONS_LOG_EXP1
EQUATIONS_INEQUATIONS_LOG_EXP2

Propriétés Fonction logarithme népérien

- Pour tout réel $x > 0$: $e^{\ln(x)} = x$
- Pour tout réel x : $\ln(e^x) = x$
- $\ln(1) = 0$ $\quad\ln(e) = 1$ $\quad\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$

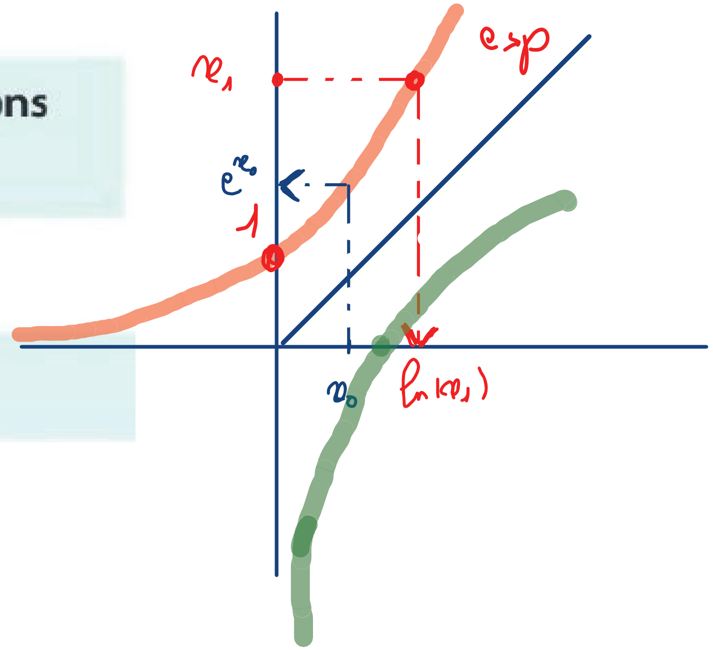
$\ln(e^0)$ $\quad\ln(e^1)$

Propriété Courbes des fonctions ln et exp

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Propriété Sens de variation de la fonction ln

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

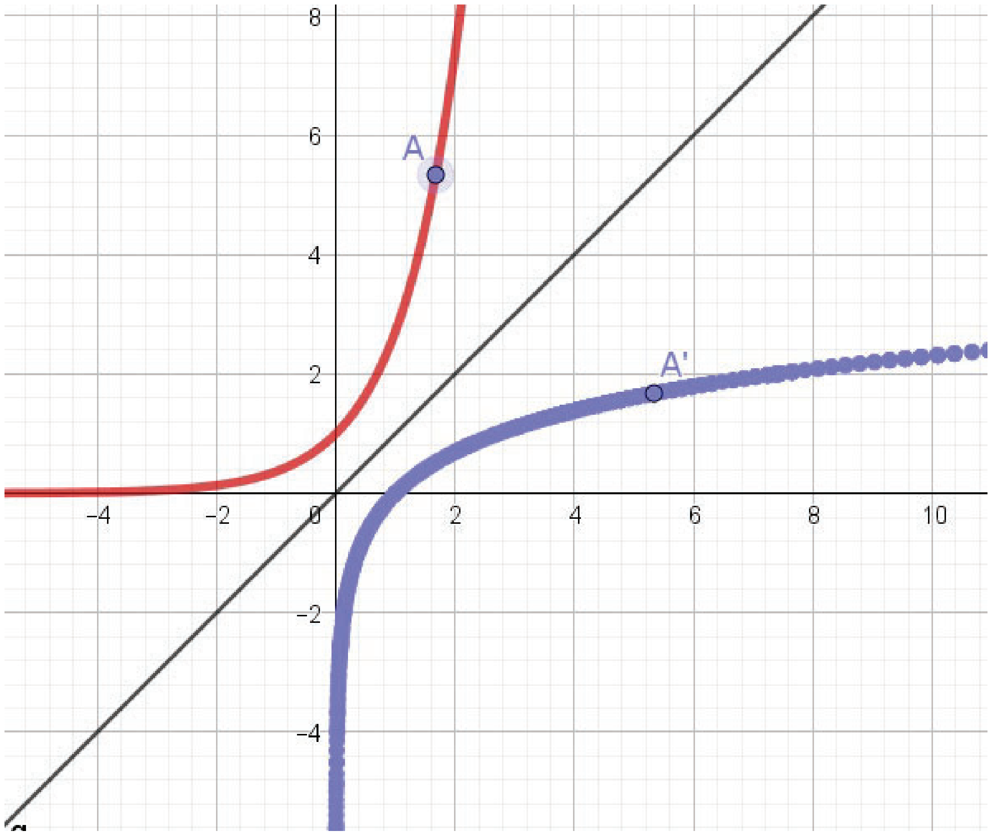


Propriété Courbes des fonctions ln et exp

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Propriété Sens de variation de la fonction ln

La fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.



Propriété Sens de variation de la fonction ln

La fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Propriété Conséquences liées au sens de variation de ln

une fct ↗ conserve l'ordre.

Si $a > 0$ et $b > 0$

$$a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$$

Application (Voir Pdf)

Propriété Conséquences liées au sens de variation de ln

Si $a > 0$ et $b > 0$

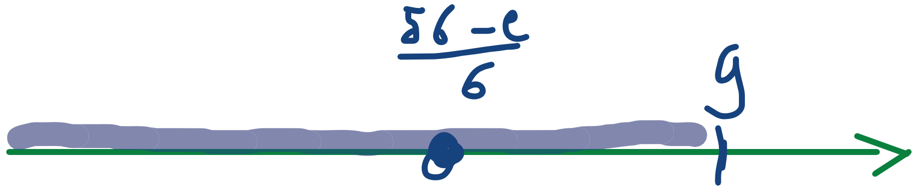
ln fct ↗ conserve l'ordre

$$a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$$

Application

2 L'équation $ln\,(54 - 6x) = 1$ est définie sur l'intervalle]-∞;?[et admet pour ensemble de solutions S= (?-e)/?

② $\ln(54-6x)=1$



- $D_E = ?$

$54-6x > 0 \iff -6x > -54$

$\iff x < 9$

$D_E =]-\infty; 9[$

- $\ln(54-6x) = 1$

$\iff e^{\ln(54-6x)} = e^1$

$\iff 54-6x = e$

$\iff x = \frac{54-e}{6}$

8,53

Conclusion :

$\frac{54-e}{6} \in]-\infty; 9[$

$S = \left\{ \frac{54-e}{6} \right\}$

Grapheur

1 $\ln(56-8x) < 1$

$S = \left]\frac{56-e}{8} ; 7\right[$

2° $\ln(54-6x) = 1$

$S = \left\{\frac{54-e}{6}\right\}$

EQUATIONS_INEQUATIONS_LOG_EXP0
EQUATIONS_INEQUATIONS_LOG_EXP1
EQUATIONS_INEQUATIONS_LOG_EXP2

2 Propriétés algébriques de la fonction ln

Propriété Relation fonctionnelle

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(\underbrace{ab}_{\text{Produit}}) = \underbrace{\ln(a) + \ln(b)}_{\text{somme}}$$

$$\ln(abc) = \ln(a) + \ln(b) + \ln(c)$$

$$\underbrace{e^a \times e^b}_{\text{Produit}} = \underbrace{e^{a+b}}_{\text{Somme}}$$

Démonstration

Pour tous réels a et b strictement positifs, $e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$, soit $e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$.

On a donc $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Remarques

- On retrouve la particularité de l'activité 2, à savoir que cette fonction transforme les produits en sommes.
- Cette formule se généralise à un produit de plusieurs facteurs.

Exemples

- $\ln(10) = \ln(5 \times 2) = \ln(5) + \ln(2)$
- $\ln(30) = \ln(2 \times 3 \times 5) = \ln(2) + \ln(3) + \ln(5)$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5}$$
$$= 2\sqrt{5}$$

Exemples

- $\ln(10) = \ln(5 \times 2) = \ln(5) + \ln(2)$
- $\ln(30) = \ln(2 \times 3 \times 5) = \ln(2) + \ln(3) + \ln(5)$

Propriété Logarithme d'un inverse, d'un quotient

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

Propriété Logarithme d'un inverse, d'un quotient

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^{a}} \qquad \frac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a-b}$$

Exemples : $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

ou

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(2) = -\ln(2)$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^{a}} \qquad \frac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a-b}$$

Exemples :

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(2) = -\ln(2)$$

Propriété Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

Pour tout réel a strictement positif, et pour tout entier relatif n :

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \ln(a^{n}) = n\ln(a) \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Exemples :

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(2) = -\ln(2)$$

Propriété Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

Pour tout réel a strictement positif, et pour tout entier relatif n :

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \ln(a^n) = n\ln(a) \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Exemples :

$$\ln\left(\sqrt{125}\right) = \frac{1}{2}\ln(125)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(5^3) = \frac{1}{2} \times 3\ln(5)$$

$$= \frac{3}{2}\ln(5)$$

Propriété Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

Pour tout réel a strictement positif, et pour tout entier relatif n :

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \ln(a^n) = n\ln(a) \qquad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

<u>Exemples</u> : a) $\ln(\sqrt{125}) = \frac{1}{2}\ln(125)$

$= \frac{1}{2}\ln(5^3) = \frac{1}{2} \times 3\ln(5)$

$= \frac{3}{2}\ln(5)$

b) $4\ln(49) - \ln(7)$

$= 4\ln(7^2) - \ln(7) = 4 \times 2\ln(7) - \ln 7$

Exemples : a) $\ln(\sqrt{125}) = \frac{1}{2}\ln(125)$

$= \frac{1}{2}\ln(5^3) = \frac{1}{2} \times 3\ln(5)$

$= \frac{3}{2}\ln(5)$

b) $4\ln(49) - \ln(7)$

$= 4\ln(7^2) - \ln(7) = 4 \times 2\ln(7) - \ln(7)$

$= 8\ln(7) - \ln(7) = 7\ln(7)$

c) $4\ln(49) - \ln\left(\frac{1}{7}\right)$ $\quad -\ln(7)$

$= 8\ln(7) + \ln(7) = 9\ln(7)$

Exercice:

$3 \times 27 = 3 \times 3 \times 9$
$= 3 \times 3 \times 3 \times 3$

9×9
$3^2 \times 3^2 = 3^4$

1) Exprimer en fonction de $ln(3)$:

$ln(3) + ln(27) + 2ln(\frac{1}{81}) = \boxed{-4}$? $ln(3)$

$ln(3) + ln(3^3) - 2ln(81)$

$ln(3) + 3ln(3) - 2ln(3^4)$

$ln(3) + 3ln(3) - 8ln(3)$

$= -4ln(3)$

2) Exprimer en fonction de $ln(5)$:

$ln(125) + 4ln(\frac{1}{25}) - 3ln(5) = \boxed{}$? $ln(5)$

3) Exprimer en fonction de $ln(3)$:

$ln(9) - 3ln(\frac{1}{9}) + 5ln(3) = \boxed{}$? $ln(3)$

2) $ln(125) + 4ln(\frac{1}{25}) - 3ln(5) = ln(5^3) - 4ln(25) - 3ln(5)$

$= 3ln(5) - 4\underbrace{ln(5^2)}_{2ln(5)} - 3ln(5) = 3ln(5) - 8ln(5) - 3ln(5)$

$= -8ln(5)$

LOG_CALCUL_ALGEBRIQUE1
LOG_CALCUL_ALGEBRIQUE2

3 Étude de la fonction logarithme népérien

Propriété Dérivée de la fonction ln

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$:

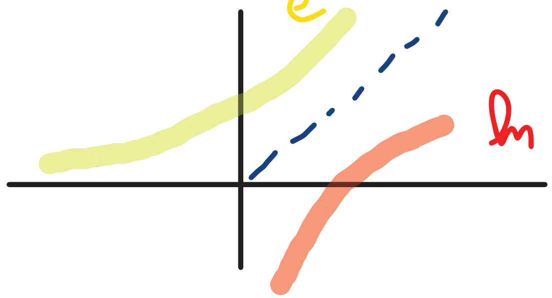
$(e^x)' = e^x$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Propriétés Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$

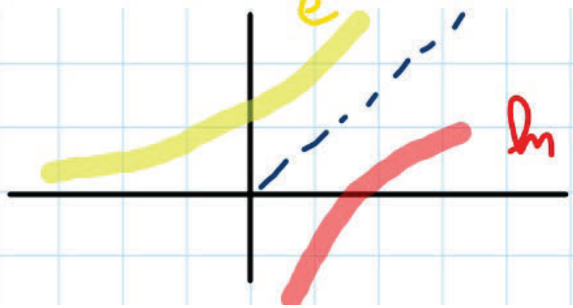
$x > 0$



Propriétés Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$

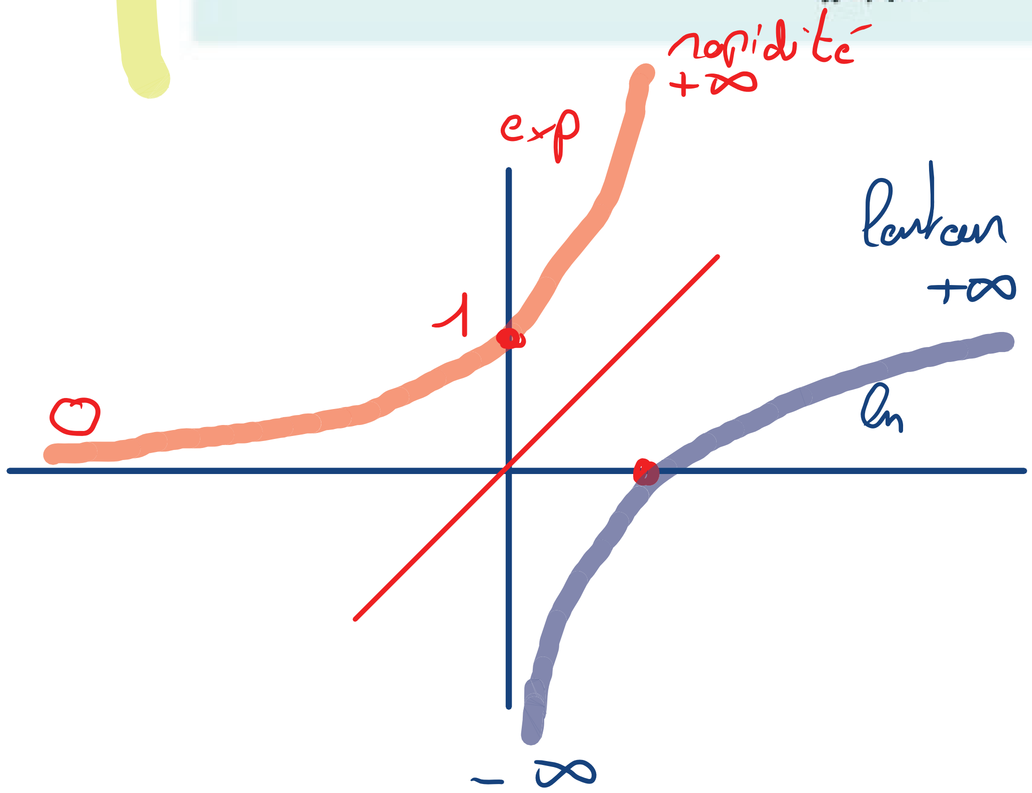
$x > 0$



Propriétés Limites aux bornes de l'ensemble de définition

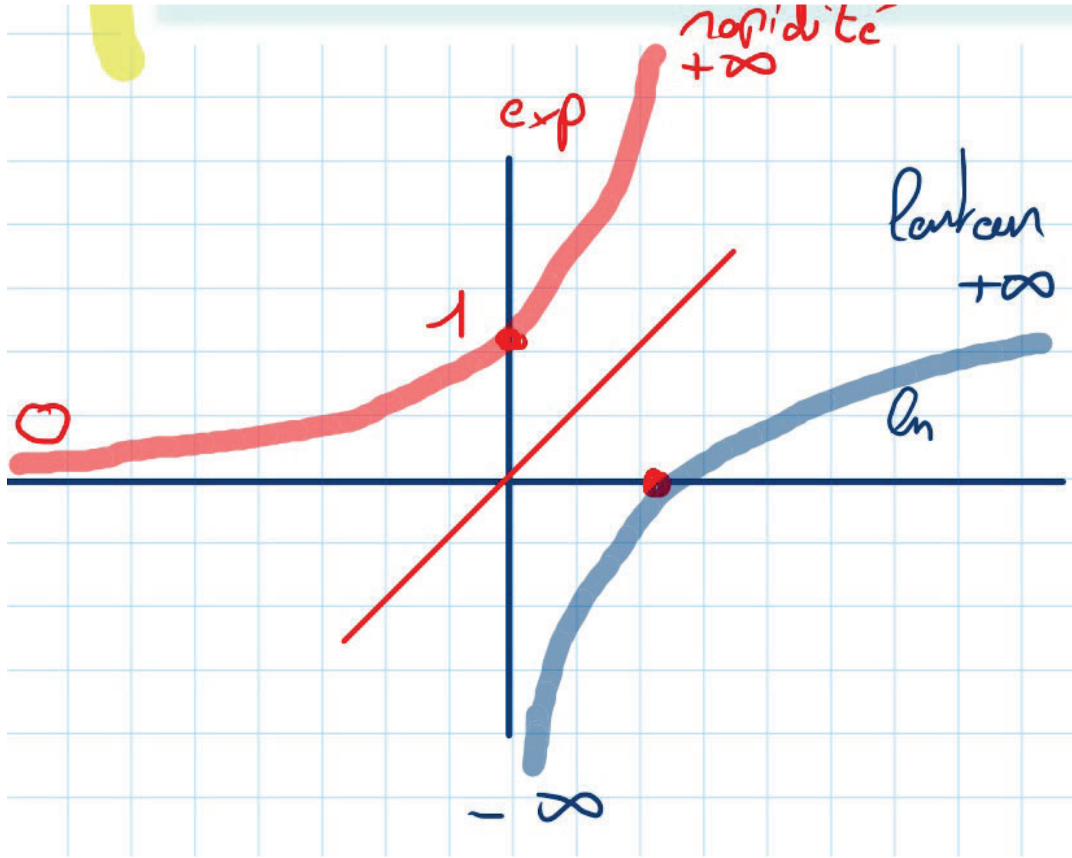
$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$

La fonction ln est ↗ strictement.



Propriétés Tableau de variations de ln et courbe représentative

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Variations de $x \mapsto \ln x$	$-\infty \nearrow +\infty$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} \to \text{F.I.}$$

$$\to +\infty$$ (levée de l'indétermination)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{+\infty}{+\infty} \to \text{F.I.}$$

$$\to 0$$ (")

4 Croissance comparée

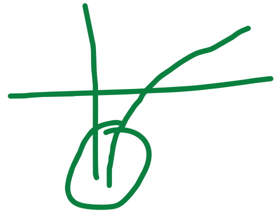
Propriétés Croissance comparée

$\frac{+\infty}{+\infty}$ $0\times(-\infty)$ $\frac{+\infty}{+\infty}$ $0\times(-\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}x\ln x=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \text{ avec } n\in\mathbb{N}^* \qquad \lim_{x\to 0}x^n\ln x=0 \text{ avec } n\in\mathbb{N}^*$$

x et x^n "l'emporte" sur ln.

4 Croissance comparée



Propriétés Croissance comparée

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \overbrace{\lim_{x \to 0} x \ln x}^{x \times \ln x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \qquad \overbrace{\lim_{x \to 0} x^n \ln x}^{x^n \times \ln x} = 0 \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

$\frac{+\infty}{+\infty}$ $\qquad$ $0 \times (-\infty)$

x et x^n « l'emporte » sur $\ln$.

5 Fonction ln(*u*)

$\ln(x^2+1)$ e^{x^2+1}

Remarque u est une fonction strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est notée $\ln(u)$ ou $\ln u$.

Propriété Dérivée de ln *u*

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $\ln u$ est alors dérivable sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

<u>Rappels</u> :

Rappel :

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$$

$u(x) \to u'(x)$

$v(x) = \ln(x) \to v'(x) = \frac{1}{x}$

$$(\ln u)' = u' \times \frac{1}{u} = \frac{u'}{u}$$

$u(x) \to u'(x)$

$v(x) = e^{x} \to v'(x) = e^{x}$

$$(e^{u})' = u' e^{u}$$

$$(e^{x^2+2}) = 2x \times e^{x^2+2}$$

$u(x) \to u'(x)$

$v(x) = \sqrt{x} \to v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\sqrt{u} = u' \times \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\sqrt{x^2+2} = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}$$

Exercices

a) $f(x) = \ln(2x^2+4)$

$f'(x) = \dfrac{4x}{2x^2+4}$

$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

$u(x) = 2x^2+4$

$u'(x) = 4x$

b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{-2x-5}\right)$

$(\ln(r))' = \dfrac{r'}{r}$

$r' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$r(x) = \dfrac{x+2}{-2x-5}$

Exercice

La fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1x+2}{-2x-5}\right)$ a pour dérivée

?	Soι
-2x^2-?x-?	Soι

DERIVER_LOGARITHME1
DERIVER_LOGARITHME2

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes, on donnera la dérivée des fonctions sans se soucier de leur domaine de définition et de dérivabilité.

1) La dérivée de la fonction f:$x \mapsto ln(2x^2+4)$ est [?x/(?x^2+?)] Soι

2) La dérivée de la fonction f:$x \mapsto ln(7x+4)$ est [?/(?x+?)] Soι

b) $g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{-2x-5}\right)$ $\qquad \left(\ln(r)\right)' = \frac{r'}{r}$

$$r' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$r(x) = \frac{x+2}{-2x-5}$$

$u(x) = x+2 \Rightarrow u'(x) = 1$

$v(x) = -2x-5 \Rightarrow v'(x) = -2$

$$= \frac{1\times(-2x-5) - (x+2)\times(-2)}{(-2x-5)^2}$$

$$= \frac{-2x-5-(-2x-4)}{(-2x-5)^2} \left(= \frac{-2x-5+2x+4}{4x^2+20x+25} = \frac{-1}{4x^2+20x+25} \right)$$

$$(\underbrace{-2x}_{a} - \underbrace{5}_{b})^2 = (-2x)^2 - 2\times(-2x)\times 5 + 5^2$$

$$= 4x^2 + 20x + 25$$

$$r'(x) = \frac{-1}{(-2x-5)^2}$$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$u(x) = \frac{x+2}{-2x-5}$$

$$u'(x) = \frac{-1}{(-2x-5)^2}$$

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}}$$

$$= \frac{\frac{-1}{(-2x-5)^2}}{\frac{x+2}{-2x-5}} = \frac{-1 \times \cancel{(-2x-5)}}{(x+2)(-2x-5)^2}$$

$$(-2x-5) \times \cancel{(-2x-5)}$$

$$= \frac{-1}{(x+2)(-2x-5)} = \frac{-1}{-2x^2-5x-4x-10}$$

$$= \frac{-1}{-2x^2-9x-10}$$

$$= \frac{1 \times (-2x-5) - (x+2) \times (-2)}{(-2x-5)^2}$$

$u(x) = x + 2 \Rightarrow u'(x) = 1$

$v(x) = -2x - 5 \Rightarrow v'(x) = -2$

$$= \frac{-2x-5-(-2x-4)}{(-2x-5)^2} = \frac{-2x-5+2x+4}{4x^2+20x+25} = \frac{-1}{4x^2+20x+25}$$

$$(\underbrace{-2x}_{a} - \underbrace{5}_{b})^2 = (-2x)^2 - 2 \times (-2x) \times 5 + 5^2$$

$$= 4x^2 + 20x + 25$$