CHAPITRE 5
DERIVATION ET CONVEXITE

Dérivation et convexité

Les montagnes russes sont impressionnantes. Le Thunderhead Roller Coaster, par exemple, est une montagne russe des plus populaires au monde avec ses 22 virages et sa pente maximale de 60°.

VIDÉO WEB
Un manège courbé
lienmini.fr/maths-s05-01

Comment déterminer les endroits où la vitesse du train sera la plus grande ?

↪ TP 2 p. 167

CHAPITRE 5
DERIVATION ET CONVEXITE

Dérivation et convexité

Les montagnes russes sont impressionnantes. Le Thunderhead Roller Coaster, par exemple, est une montagne russe des plus populaires au monde avec ses 22 virages et sa pente maximale de 60°.

Comment déterminer les endroits où la vitesse du train sera la plus grande ?

↪ TP 2 p. 167

VIDÉO WEB
Un manège courbé
lienmini.fr/maths-s05-01

Composée de fonctions (Rappel)

Application 1

$$f \left\{ \begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ 2 & \longmapsto & 1 & \longmapsto & \sqrt{1} = 1 \\ & u : x \mapsto 2x - 3 & & & \end{array} \right.$$

$v : X \mapsto \sqrt{X}$
$v : a \mapsto \sqrt{a}$ } La variable est "muette"

$f(2) = v \circ u(2) = 1$

$$\boxed{f = v \circ u}$$

$f : x \longmapsto \sqrt{2x - 3}$

$$f \begin{cases} I \longrightarrow J \longrightarrow \mathbb{R} \\ 2 \xmapsto[u\,:\,x \mapsto 2x-3]{} 1 \xmapsto[v\,:\,x \mapsto \sqrt{x}]{} \sqrt{1} = 1 \end{cases}$$

$v : x \mapsto \sqrt{x}$
$v : a \mapsto \sqrt{a}$ } La variable est "muette"

$f(2) = v \circ u(2) = 1$

$$\boxed{f = v \circ u}$$

$f : x \longmapsto \sqrt{2x-3}$

$$g \begin{cases} I \longrightarrow J \longrightarrow \mathbb{R} \\ 16 \xmapsto[v\,:\,x \mapsto \sqrt{x}]{} 4 \xmapsto[u\,:\,x \mapsto 2x-3]{} 5 \end{cases}$$

$g(16) = u \circ v(16) = 5$

$$\boxed{g = u \circ v}$$

$g : x \longmapsto 2\sqrt{x} - 3$

- $f(x) = \sqrt{2x-3}$

  est calculable si $2x - 3 \geqslant 0$

  $\iff 2x \geqslant 3$

  $\iff x \geqslant \frac{3}{2}$

  $D_f = [\frac{3}{2} ; +\infty[$

- $g(x) = 2\sqrt{x} - 3$

  est calculable si $x \geqslant 0$

  $D_g = [0 ; +\infty[$

2

$D_f = \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$

- $g(x) = 2\sqrt{x} - 3$

est calculable si $x \geqslant 0$

$D_g = [0 ; +\infty[$

Application 2

$u : x \longmapsto 2x - 8$ et $v : x \longmapsto \frac{1}{x}$

Mêmes questions.

Application 2

$u : x \mapsto 2x - 8$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Mêmes questions.

$f = v \circ u$ $\quad f : x \mapsto \dfrac{1}{2x - 8}$

$2x - 8 \neq 0$
$2x \neq 8$
$x \neq 4$

$g = u \circ v$ $\quad g : x \mapsto 2 \times \dfrac{1}{x} - 8$ $\quad x \neq 0$

$D_f =]-\infty ; 4[\cup]4 ; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$D_g =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[= \mathbb{R}^*$

Application 3

$u : x \longmapsto x^2 - 4x - 5$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$

$f = v \circ u$

$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x - 5}$

f est calculable si $x^2 - 4x - 5 \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) - \sqrt{36}}{2 \times 1} = -1$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 5$

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+4x-5}$$

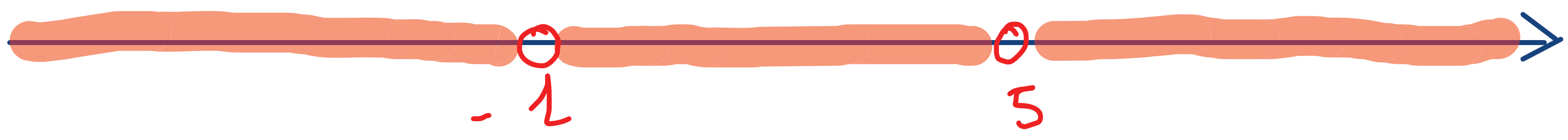
f est calculable si $x^2 - 4x - 5 \neq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-\sqrt{36}}{2 \times 1} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 5$$

$$D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 5[\cup]5 ; +\infty[$$



$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+4x-5}$

f est calculable si $x^2 - 4x - 5 \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4)-\sqrt{36}}{2 \times 1} = -1$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 5$

$Df =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 5[\cup]5 ; +\infty[$

<u>Application 4</u> : $f(x) = \sqrt{-2x-4}$

$Df = ?$

$-2x - 4 \geq 0$

$-2x \geq 4$

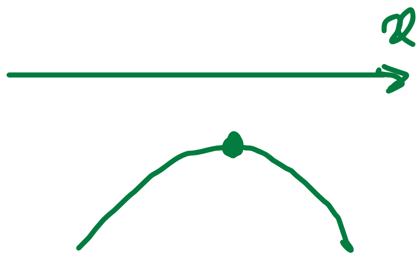
$x \leq -2$

$Df =]-\infty ; -2]$

Application 5 : $g(x) = \sqrt{-x^2+2x-4}$

$D_g = ?$ $\quad -x^2+2x-4 \geq 0$

$\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times(-4) = 4-16 = -12 < 0$



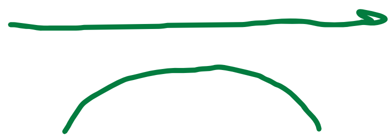
On a toujours $-x^2+2x-4 < 0$

$D_f = \emptyset$ (√)

Application 6 $\quad h(x) = \dfrac{1}{-x^2-6x-18}$

$D_h = ?$ $\quad -x^2-6x-18 \neq 0$

$\Delta = -36 < 0$



$D_h = \mathbb{R}$ (√)

Application 7

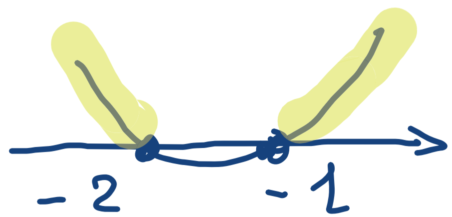
$h(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

h calculable si :

$$x^2 + 3x + 2 \geqslant 0$$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$

$x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{1}}{2 \times 1} = -2$



$x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{1}}{2} = -1$

$x^2 + 3x + 2 \geqslant 0$

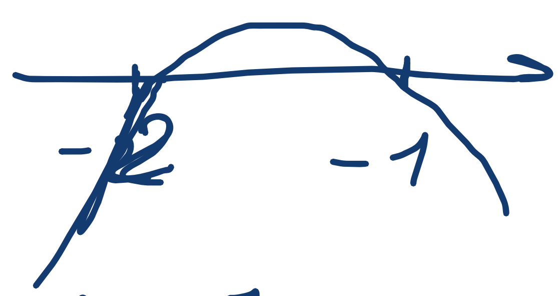
$D_f =]-\infty ; -2] \cup [-1 ; +\infty[$

Application 8 : $t(x) = \sqrt{-x^2 - 3x - 2}$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = -1$

$x_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = -2$



$-x^2 - 3x - 2 \geq 0$ si $x \in [-2 ; -1]$

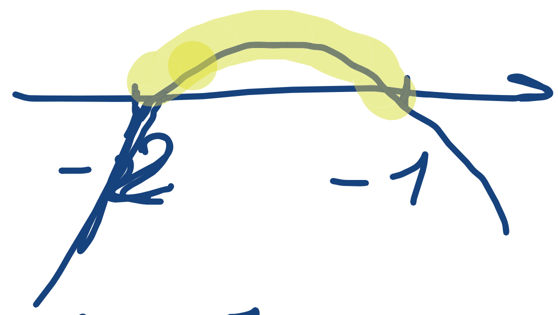
$D_f = [-2 ; -1]$

Application 8 : $t(x) = \sqrt{-x^2 - 3x - 2}$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 9 - 8 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = -1$$

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = -2$$



$-x^2 - 3x - 2 \geq 0$ si $x \in [-2; -1]$

$D_f = [-2; -1]$

1) L'ensemble de définition de la fonction $\sqrt{x+2}$ est Sou

2) L'ensemble de définition de la fonction $\frac{1}{x^2-3x-18}$ est Sou

1) L'ensemble de définition de la fonction $\sqrt{-3x+9}$ est Sou

2) L'ensemble de définition de la fonction $\sqrt{-x^2-2x+8}$ est Sou

1) L'ensemble de définition de la fonction $\sqrt{x+3}$ est Sou

2) L'ensemble de définition de la fonction $\frac{1}{7x-28}$ est Sou

Ensemble de définition

Dans cet exercice, l'ensemble des réels "$\mathbb{R}$" se notera 'r' ou 'R'.
De même l'ensemble vide se votera 'v' ou 'V'.
Tous les autres ensembles se noteront sous forme d'intervalle (par exemple]-1;+inf[;) ou de réunion d'intervalle avec le symbole U (lettre U en majuscule)
Exemple]-inf;-2[U]4;+inf[

ENSEMBLE_DEFINITION0
ENSEMBLE_DEFINITION0a
ENSEMBLE_DEFINITION0b

ENSEMBLE_DEFINITION1
ENSEMBLE_DEFINITION2
ENSEMBLE_DEFINITION3

ENSEMBLE_DEFINITION4
ENSEMBLE_DEFINITION4a

Exercice

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 24x$.

f est dérivable sur l'ensemble des nombres réels, et f' sous forme ordonnée est f ' (x) = ______ Sol

La fonction f' est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est $\Delta =$ ______ Sol › 0 et dont les racines sont par ordre croissant $x_1 =$ ______ Sol et $x_2 =$ ______ Sol .

On en déduit alors le tableau de variation:

x	$-\infty$		______ Sol		______ Sol		$+\infty$
signe de f'		______ Sol	0	______ Sol	0	______ Sol	
Variation de f							

APPLICATION_DERIV_POLY_TABVAR1

2 Dérivée d'une fonction composée

Théorème Dérivée d'une fonction composée

$$\boxed{(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)}$$

$(e^u)' = u' e^u$

Théorème Dérivée d'une fonction composée

Soit u et v deux fonctions (vérifiant les conditions de définition requises) dérivables de dérivées respectives u' et v', alors la fonction $v \circ u$ est dérivable et sa dérivée s'écrit : $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$.

Autrement dit pour tout réel x (vérifiant les conditions de définition requises) :

$$(v \circ u)'(x) = (v'(u(x)) \times u'(x).$$

2 Dérivée d'une fonction composée

Théorème Dérivée d'une fonction composée

$$\boxed{(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)}$$

Exemple : Etudions f

$$f : x \mapsto \sqrt{-3x^2 - 12x + 63}$$

1 Domaine de définition

Exemple :

$$f : x \mapsto \sqrt{-3x^2 - 12x + 63}$$

① Domaine de définition

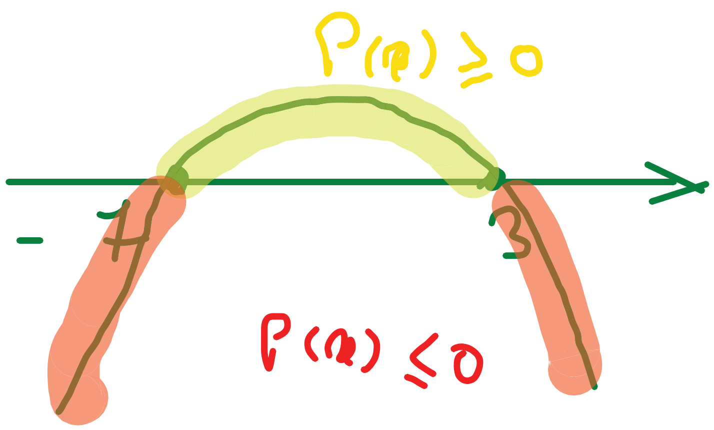
f est calculable si $-3x^2 - 12x + 63 \geqslant 0$

$P(x) = -3x^2 - 12x + 63$

$\Delta = 900$ et $x_0 = -7$

$x_1 = 3$

$a = -3 < 0$



$$\boxed{D_f = [-7 ; 3]}$$

① Domaine de définition

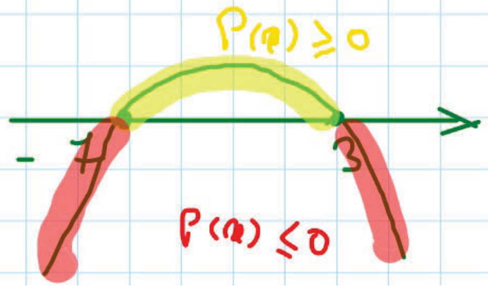
f est calculable si $-3x^2 - 12x + 63 \geqslant 0$

$P(x) = -3x^2 - 12x + 63$

$\Delta = 900$ et $x_0 = -7$

$x_1 = 3$

$a = -3 < 0$



$D_f = [-7 ; 3]$

$\sqrt{-3x^2 - 12x + 63}$

② Dérivée

$f = v \circ u$

avec $u(x) = -3x^2 - 12x + 63$

$v(x) = \sqrt{x}$

D'après le cours $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

② **Dérivée** $f = v \circ u$

avec $u(x) = -3x^2 - 12x + 63$

$v(x) = \sqrt{x}$

D'après le cours $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \times x^{\frac{1}{2}-1}$

$= \frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$u'(x) = -6x - 12$

$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f' = (v \circ u)'$

$= u' \times (v' \circ u)$

avec $u(x) = -3x^2 - 12x + 63$

$v(x) = \sqrt{x}$

D'après le cours $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

$u'(x) = -6x - 12$

$v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f' = (v \circ u)'$

$= u' \times (v' \circ u)$

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \times x^{\frac{1}{2}-1}$

$= \frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \times \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= (-6x - 12) \times \frac{1}{2\sqrt{-3x^2 - 12x + 63}}$$

$$f' = (v \circ u)'$$

$$= u' \times (v' \circ u)$$

$$\sqrt{-3x^2 - 12x + 63}$$

$$= \left(\frac{-6x-12}{1}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{-3x^2-12x+63}}$$

$$f'(x) = \frac{-6x-12}{2\sqrt{-3x^2-12x+63}}$$

$D_f = [-7 ; 3]$

= (-6x-12)/(2*sqrt(-3x^2-12x+63))

rac

⚠ $D_{f'} =]-7;3[$

$$f'(x) = \frac{-6x-12}{2\sqrt{-3x^2-12x+63}}$$

3° Tableau de variation

On doit étudier le signe de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{-6x-12 \; \} \; ???}{2\sqrt{-3x^2-12x+63} \; \} > 0 \text{ sur }]-7;3[}$$

On doit étudier le signe de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{-6x-12}^{???}}{\underbrace{2\sqrt{-3x^2-12x+63}}_{>0 \text{ sur }]-7;3[}}$$

$-6x-12 \geq 0 \iff -6x \geq 12$ $\div(-6)$

$\iff x \leq -2$

Le signe de f' est celui de $-6x-12$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{-6x-12}^{???}}{\underbrace{2\sqrt{-3x^2-12x+63}}_{>0 \text{ sur }]-7;3[}}$$

$$-6x-12 \geqslant 0 \iff -6x \geqslant 12 \quad \div(-6)$$

$$\iff x \leqslant -2$$

Le signe de f' est celui de $-6x-12$

x	-7		-2		3
Signe de $-6x-12$		$+$	0	$-$	
Variation de f		$\nearrow$		$\searrow$	

$$f'(x) = \frac{\overbrace{-6x-12}^{???}}{\underbrace{2\sqrt{-3x^2-12x+63}}_{>0 \text{ sur }]-7;3[}}$$

$$-6x-12 \geq 0 \iff -6x \geq 12 \quad) \div (-6)$$

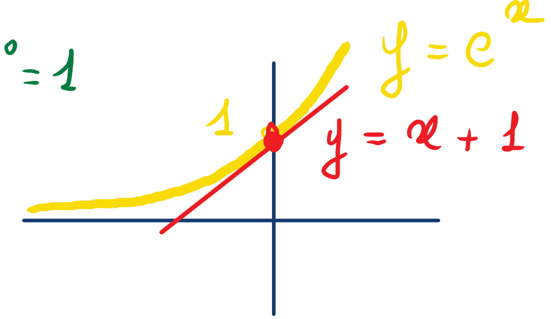
$$\iff x \leq -2$$

Le signe de f' est celui de $-6x-12$

x	-7		-2		3
Signe de $-6x-12$		$+$	0	$-$	
Variation de f		$\nearrow$		$\searrow$	

FICHE DE COURS: EXPONENTIELLE

$e^0 = 1$



- $e^a = e^b$

  $\iff a = b$

  (utile pour équations)

- $e^a \geqslant e^b$

  $\iff a \geqslant b$

  (utile pour inequations)

- $e^x > 0$

S =

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- $(e^a)^b = e^{ab}$
- $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$
- $e \simeq 2,77$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $(e^x)' = e^x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Croissance comparée

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

  $n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

$(-2)^2 = 4$

$(-2)^3 = -8$

1) La fonction $g : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 6x - 20}$ est définie sur]-inf;-2]U[5;+inf[et dérivable sur]-inf;-2[U]5;+inf[
avec f'(x)= (4x-6)/(2*rac(2x^2-6x-20)) .

2) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{-7x^2 - 14x + 245}$ est définie sur [-7;5] et dérivable sur]-7;5[
avec f'(x)= (-14x-14)/(2*rac(-7x^2-14x+245)) .

DERIVEE_FONCTIONS_COMPOSEES1

Exercice 1 $e^{x^2-2x} \geq e^{-1}$

Exercice 2 $e^{2x} - 2e^{x} + 1 = 0$

Exercice

Notation l'ensemble des solutions se notera {5} ou {1;2} ... (attention au point virgule en cas de solutions multiples et à ne pas oublier les accolades).
Résoudre sur R ou sur l'intervalle à préciser les équations ou inéquations suivantes:

1) L'équation $e^{-8x+33} = e$ admet pour ensemble de solutions ☐ Sol

2) L'équation $e^{-8x+23} = \frac{1}{e}$ admet pour ensemble de solutions ☐ Sol

3) L'équation $e^{3x+6} = 1$ admet pour ensemble de solutions ☐ Sol

Exercice

Notation l'ensemble des solutions se notera {1;2}... (attention au point virgule et à ne pas oublier les accolades).
Résoudre sur R ou sur l'intervalle à préciser les équations ou inéquations suivantes:

1) L'équation $e^{-8x^2+96x-255} \geqslant e$ admet pour ensemble de solutions ☐ Sol

2) L'équation $e^{8x+23} \geqslant \frac{1}{e}$ admet pour ensemble de solutions ☐ Sol

3) L'équation $e^{3x+4} \geqslant e$ admet pour ensemble de solutions ☐ Sol

4) L'équation $e^{2x+9} \leqslant e$ admet pour ensemble de solutions ☐ Sol

Exercice 1

Notation l'ensemble des solutions se notera {5} ou {1;2} ... (attention au point virgule en cas de solutions multiples et à ne pas oublier les accolades).
Résoudre sur R ou sur l'intervalle à préciser les équations ou inéquations suivantes:

1) L'équation $e^{-8x+33} = e$ admet pour ensemble de solutions [ ] Sol

2) L'équation $e^{-8x+23} = \frac{1}{e}$ admet pour ensemble de solutions [{3}] Sol

3) L'équation $e^{3x+6} = 1$ admet pour ensemble de solutions [ ] Sol

Exercice 1

1)

$$e^{-8x+23} = \frac{1}{e^1}$$

$$e^a = e^b$$

$$\Leftrightarrow e^{-8x+23} = e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow -8x+23 = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

2) L'équation $e^{-8x+23} = \frac{1}{e}$ admet pour ensemble de solutions $\{3\}$ Sol

3) L'équation $e^{3x+6} = 1$ admet pour ensemble de solutions $\{-2\}$ Sol

Exercice 1

1. $e^{-8x+23} = \frac{1}{e^1}$

$\Leftrightarrow e^{-8x+23} = e^{-1}$

$\Leftrightarrow -8x+23 = -1$

$\Leftrightarrow x = 3$

$e^a = e^b$

2. $e^{3x+6} = 1$

$\Leftrightarrow e^{3x+6} = e^0 \Leftrightarrow 3x+6 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$

Exercice 1

(1) $e^{-8x+23} = \dfrac{1}{e^{1}}$

$\Leftrightarrow e^{-8x+23} = e^{-1}$

$\Leftrightarrow -8x+23 = -1$

$\Leftrightarrow x = 3$

$e^{a} = e^{b}$

(2) $e^{3x+6} = 1$

$\Leftrightarrow e^{3x+6} = e^{0} \Leftrightarrow 3x+6 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$

Exercice 2

$e^{8x+23} \geqslant \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow e^{8x+23} \geqslant e^{-1}$

$\Leftrightarrow 8x+23 \geqslant -1$

$\Leftrightarrow x \geqslant -3$

Exercice

Notation l'ensemble des solutions se notera {1;2}... (attention au point virgule et à ne pas oublier les accolades).
Résoudre sur R ou sur l'intervalle à préciser les équations ou inéquations suivantes:

1) L'équation $e^{-8x^2+96x-255} \geqslant e$ admet pour ensemble de solutions [ ] Sol

2) L'équation $e^{8x+23} \geqslant \dfrac{1}{e}$ admet pour ensemble de solutions [ ] Sol

3) L'équation $e^{3x+4} \geqslant e$ admet pour ensemble de solutions [ ] Sol

4) L'équation $e^{2x+9} \leqslant e$ admet pour ensemble de solutions [ ] Sol

(2) $e^{3x+6} = 1$

$\iff e^{3x+6} = e^0 \iff 3x+6 = 0$

$\iff x = -2$

$S = \{-2\}$

Exercice 2

$e^{8x+23} \geqslant \frac{1}{e} \iff e^{8x+23} \geqslant e^{-1}$

$\iff 8x+23 \geqslant -1$

$\iff x \geqslant -3$

$S = [-3 ; +\inf[$

Exercice

Notation l'ensemble des solutions se notera $\{1;2\}$... (attention au point virgule et à ne pas
Résoudre sur R ou sur l'intervalle à préciser les équations ou inéquations suivantes:

1) L'équation $e^{-8x^2+96x-255} \geqslant e$ admet pour ensemble de solutions ____ Sol

2) L'équation $e^{8x+23} \geqslant \frac{1}{e}$ admet pour ensemble de solutions ____ Sol

3) L'équation $e^{3x+4} \geqslant e$ admet pour ensemble de solutions ____ Sol

4) L'équation $e^{2x+9} \leqslant e$ admet pour ensemble de solutions ____ Sol

(2) $e^{3x+6} = 1$

$\Leftrightarrow e^{3x+6} = e^{0} \Leftrightarrow 3x+6 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$

$S = \{-2\}$

Exercice 2

$e^{8x+23} \geq \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow e^{8x+23} \geq e^{-1}$

$\Leftrightarrow 8x+23 \geq -1$

$\Leftrightarrow x \geq -3$

Exercice

Notation l'ensemble des solutions se notera {1;2}... (attention au point virgule et à ne pas
Résoudre sur R ou sur l'intervalle à préciser les équations ou inéquations suivantes:

1) L'équation $e^{-8x^2+96x-255} \geqslant e$ admet pour ensemble de solutions ☐ Sou

2) L'équation $e^{8x+23} \geqslant \dfrac{1}{e}$ admet pour ensemble de solutions ☐ Sou

3) L'équation $e^{3x+4} \geqslant e$ admet pour ensemble de solutions ☐ Sou

4) L'équation $e^{2x+9} \leqslant e$ admet pour ensemble de solutions ☐ Sou

$S = [-3\,;+\text{inf}[$

Exercice 1 (Fonctions composées)

$f(x) = e^{x^2+2x-4}$

Tableau de variation complet de f

① $D_f = \mathbb{R}$

② **Dérivée et signe de f'**

$$(v \circ u)' = u' \times v'(u)$$

$$(e^u)' = u' \times e^u$$

On a $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 2x - 4$

$u'(x) = 2x + 2$

$f'(x) = u' \times e^u = (2x+2)\,e^{x^2+2x-4}$

① $D_f = \mathbb{R}$

② <u>Dérivée et signe de f'</u>

$$(v \circ u)' = u' \times v'(u)$$

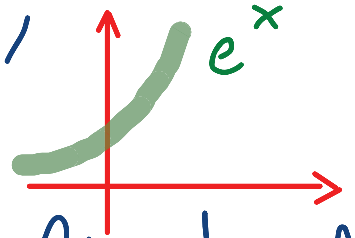
$$(e^u)' = u' \times e^u$$

On a $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 2x - 4$

$u'(x) = 2x + 2$

$$\boxed{f'(x) = u' \times e^u = (2x+2)\, e^{x^2+2x-4}}$$

③ <u>Signe de f'</u>

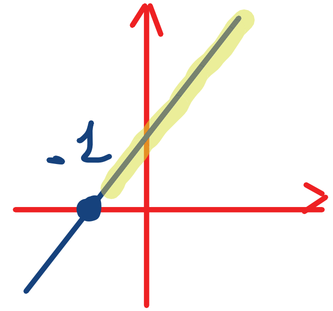


$e^{x^2+2x-4} \geq 0$

Le signe de f' est celui de $g(x) = 2x + 2$

$g(x) \geq 0 \iff 2x + 2 \geq 0$

$\iff x \geq -1$

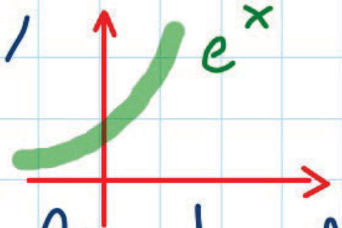


On a $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 2x - 4$

$u'(x) = 2x + 2$

$$\boxed{f'(x) = u' \times e^{u} = (2x+2)\, e^{x^2+2x-4}}$$

③ <u>Signe de f'</u>

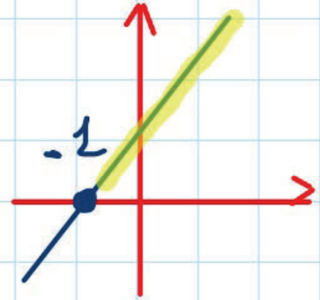


$e^{x^2+2x-4} \geq 0$

Le signe de f' est celui de $g(x) = 2x + 2$

$g(x) \geq 0 \iff 2x + 2 \geq 0$

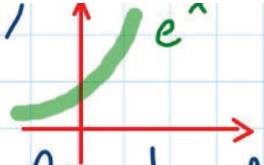
$\iff x \geq -1$



④ <u>Tableau de variation</u>

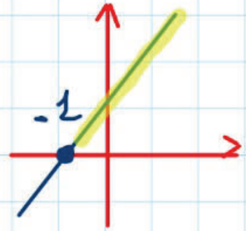
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$	

③ <u>Signe de f'</u>



$\times e^{(x^2+2x-4)} \geqslant 0$

Le signe de f' est celui de $g(x) = 2x + 2$



$g(x) \geqslant 0 \iff 2x + 2 \geqslant 0$

$\iff x \geqslant -1$

④ <u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	e^{-5}	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(-1) = e^{(-1)^2 + 2\times(-1) - 4} = e^{-5}$$

exp(-5)

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2+2x-4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x^2+2x-4} = +\infty$$

VARIATION_FONCTION_COMPOSEE3.html

Exercice 2

Soit h la fonction définie par $h(x) = (-x+2) \times e^{x+3}$.

Tableau de variation:

x					
Signe de f'					
Variation de f		?	f(?)	?	

JUSTIFICATION:
La dérivée de f est ( ) $\times e^{x+3}$, limites à faire sur feuilles.

Exercice 2

Soit h la fonction définie par $h(x) = (-x+2) \times e^{x+3}$.

Tableau de variation complet ?

1. $D_f = \mathbb{R}$

2. $h(x) = r(x) \times s(x)$

avec $r(x) = -x + 2$

$s(x) = e^{x+3}$

Exercice 2

Soit h la fonction définie par $h(x) = (-x+2) \times e^{x+3}$.

Tableau de variation complet ?

$$\left(e^{2x+3}\right)' = 2 \times e^{2x+3}$$

1) $D_f = \mathbb{R}$

2) $h(x) = u(x) \times v(x)$

avec $u(x) = -x + 2 \Rightarrow u'(x) = -1$

$v(x) = e^{x+3} \Rightarrow e^{x+3}$

$h' = u' \times v + u \times v'$

$(u \times v)' = u'v + uv'$

$$h'(x) = r' \times s + r \times s'$$

$$= -1 \times e^{x+3} + (-x+2) \times e^{x+3}$$

$$= e^{x+3} \times \left(-1 + (-x) + 2\right) = e^{x+3} \times (-x+1)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Le signe de h' est celui de $-x+1$

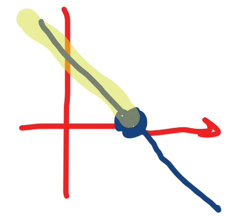
car $e^{a} > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$

$e^{x+3} > 0$

$-x+1 \geq 0$

$\iff -x \geq -1$

$\iff x \leq 1$



x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $-x+1$ h'		$+$	0	$-$	
Variation de h		$\nearrow$		$\searrow$	

Le signe de h' est celui de $-x+1$

car $e^{a} > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $-x+1$ h'		$+$	0	$-$	
Variation de h		$\nearrow$	e^{4}	$\searrow$	

$-x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow -x \geq -1$

$\Leftrightarrow x \leq 1$

- $h(1) = (-1+2) \times e^{1+3} = 1 \times e^{4} = e^{4}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x+2) \times e^{x+3} =$

Soit h la fonction définie par $h(x) = (-x+2) \times e^{x+3}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $-x+1$ h'		$+$	0	$-$	
Variation de h	0	$\nearrow$	e^4	$\searrow$	$-\infty$

$-x+1 \geq 0$

$\iff -x \geq -1$

$\iff x \leq 1$

- $h(1) = (-1+2) \times e^{1+3} = 1 \times e^4 = e^4$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x+2) \times e^{x+3} = (-\infty) \times e^{+\infty} = (-\infty) \times (+\infty)$

$= -\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x+2) \times e^{x+3} = (+\infty) \times e^{-\infty}$

$= (+\infty) \times 0 \quad (\text{F I})$

$= 0 \quad (\text{croissance comparée})$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $-x+1$ h'		$+$	0	$-$	
Variation de h	0	$\nearrow$	e^4	$\searrow$	$-\infty$

$-x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow -x \geq -1$

$\Leftrightarrow x \leq 1$

- $h(1) = (-1+2) \times e^{1+3} = 1 \times e^4 = e^4$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x+2) \times e^{x+3} = (-\infty) \times e^{+\infty} = (-\infty) \times (+\infty)$

$= -\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x+2) \times e^{x+3} = (+\infty) \times e^{-\infty}$

$= (+\infty) \times 0$ (F I)

$= 0$ (Croissance comparée)

VARIATION_FONCTION_COMPOSEE3.html

Exercice

Soit f la fonction définie par f(x)=e^{x^2+2x-4}.
Dresser le tableau de variation complet (∞ se notera "inf") de f après avoir complété les justifications:

x					
Signe de f'					
Variation de f		?		?	

Justifications:

f'(x)= (?x+?) × e^{x^2+2x-4}

et le minimum de la fonction est exp(?)

VARIATION_FONCTION_COMPOSEE2.html

Etude d'une fonction composée (1)

CHRONOMETRE

Exercice

Soit f la fonction définie par f(x)=$e^{\frac{-2x}{x+3}}$.
Dresser le tableau de variation complet (∞ se notera "inf") de f après avoir complété les justifications:

x	Sol			Sol			Sol
Signe de f'(x)		Sol		‖		Sol	
Variation de f	Sol	?	Sol	‖	Sol	?	Sol

Justifications:

f'(x)= ?/(x+3)^2 Sol × $e^{\frac{-2x}{x+3}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=$ exp(?) Sol

VARIATION_FONCTION_COMPOSEE1.html

Exercice 1

$f(x) = e^{x^2+2x-4}$

Tableau de variation complet de f

① $D_f = \mathbb{R}$

② Dérivée et signe de f'

$f = v \circ u$ avec

$u(x) = x^2+2x-4$

$v(x) = e^x$

$u'(x) = 2x+2$

$v'(x) = e^x$

$f' = (v \circ u)'$

$= u' \times (v' \circ u)$

$f'(x) = (2x+2) \times e^{u(x)}$

$f'(x) = (2x+2) \times e^{x^2+2x-4}$

Signe de f' est celui de $2x+2$:

$u'(x) = 2x + 2$

$v'(x) = e^{x}$

$f' = (v \circ u)'$

$= u' \times (v' \circ u)$

$f'(x) = (2x+2) \times e^{u(x)}$

$f'(x) = (2x+2) \times e^{x^2+2x-4}$

Signe de f' est celui de $2x+2$:

$2x + 2 \geqslant 0$

$\Longleftrightarrow x \geqslant -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $2x+2$		$-$	0	$+$	
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$	
	lim		calcul de $f(-1)$		lim

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $2x+2$		$-$	0	$+$	
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	e^{-5}	$\nearrow$	$+\infty$
	$\downarrow$ lim		$\downarrow$ calcul de $f(-1)$		$\downarrow$ lim

A)

$$f(x) = e^{x^2+2x-4}$$

- $f(-1) = e^{(-1)^2+2\times(-1)-4}$

$= e^{1-2-4}$

$= e^{-5}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \,?$

$$\lim_{x \to -\infty} \underset{(+\infty)}{x^2} + \underset{+(-\infty)}{2x} - 4 = \lim_{x \to -\infty} x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)$$

$$= \text{“} (+\infty)\times(1+0-0) \text{”}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$$

$$f(x) = e^{x^2+2x-4}$$

- $f(-1) = e^{(-1)^2+2\times(-1)-4}$

$= e^{1-2-4}$

$= e^{-5}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \,?$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty} + \underbrace{2x}_{+\,-\infty} - 4 = \lim_{x \to -\infty} x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)$$

$= \text{"}(+\infty)\times(1+0-0)\text{"}$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Par composition des limites

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ "$e^{+\infty}$"

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \,?$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2+2x-4 = \text{"}(+\infty)+(+\infty)-4\text{"}$

$= +\infty$

par opérations sur les limites

et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Par composition des limites

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Par composition des limites

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{“} e^{+\infty} \text{”}$$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ ?$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 + 2x - 4 = \text{“}(+\infty) + (+\infty) - 4\text{”}$$

$$= +\infty$$

par opérations sur les limites

et $\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$

Par composition des limites

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

① D_f

② f' et son signe

③ Complétion
- valeurs
- limites

Par composition des limites

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{" } e^{+\infty} \text{ "}$$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ ?$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 + 2x - 4 = \text{" } (+\infty) + (+\infty) - 4 \text{ "}$$

$$= +\infty$$

par opérations sur les limites

et $\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$

Par composition des limites

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

1. D_f
2. f' et son signe
3. Compléter
   - valeurs
   - limites

Propriétés Monotonie d'une fonction composée

① Si v et u sont de même monotonie (c'est à dire toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes), alors la fonction $v \circ u$ est croissante.

② Si v et u sont de monotonie contraire (c'est à dire l'une croissante et l'autre décroissante), alors la fonction $v \circ u$ est décroissante.

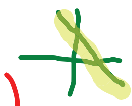
<u>Exemple</u> $f(x) = \sqrt{-2x+4}$ $\qquad D_f =]-\infty ; 2]$

$-2x+4 \geq 0$

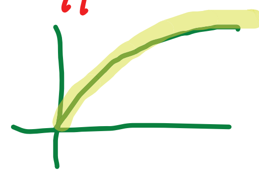
$-2x \geq -4$

$x \leq 2$

$f = v \circ u$ avec $u(x) = -2x+4$ → Décroissante (fonction affine)



et $v(x) = \sqrt{x}$ → Croissante



f est décroissante sur D_f

Car composée d'une fonction ↘ et d'une fonction ↗

Exemple $f(x) = \sqrt{-2x+4}$ $\quad D_f =]-\infty ; 2]$

$-2x+4 \geq 0$

$-2x \geq -4$

$x \leq 2$

$f = v \circ u$ avec $u(x) = -2x+4 \rightarrow$ Décroissante (fonction affine)

et $v(x) = \sqrt{x} \rightarrow$ Croissante

f est décroissante sur D_f

Plus rapide que signe de f'

__Exemple__ $f(x) = \sqrt{-2x+4}$ $\quad D_f =]-\infty ; 2]$

$-2x+4 \geq 0$

$-2x \geq -4$

$x \leq 2$

$f = v \circ u$ avec $u(x) = -2x+4$ → Décroissante (fonction affine)

et $v(x) = \sqrt{x}$ → Croissante

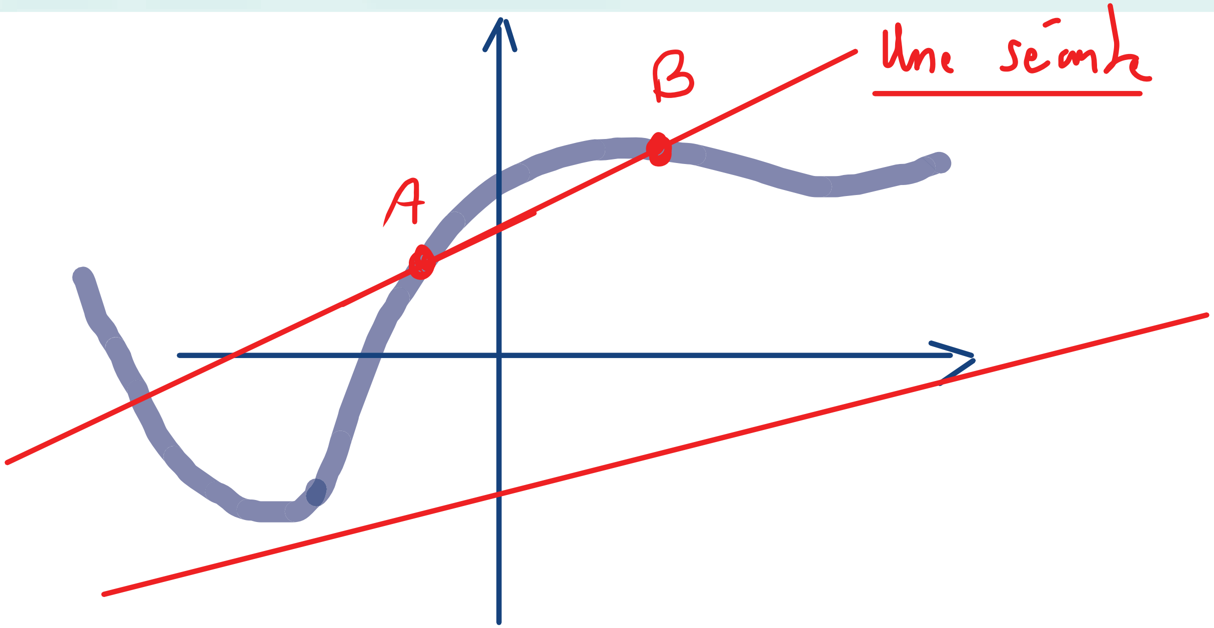
f est décroissante sur D_f

Plus rapide que signe de f'

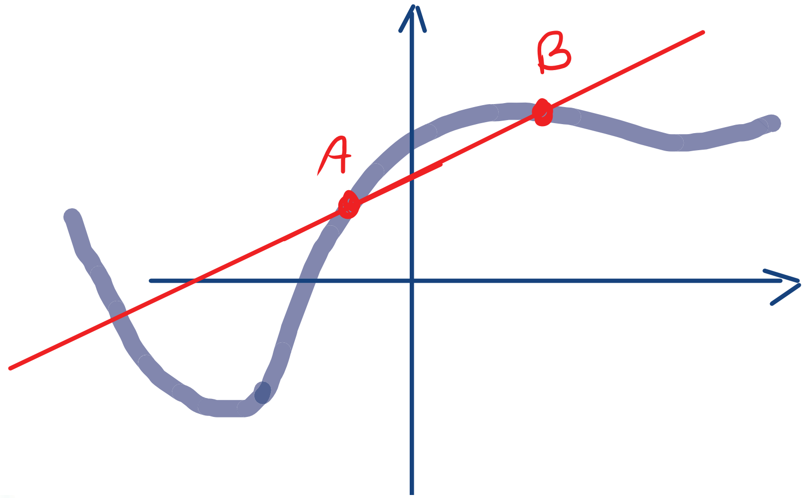
3 Convexité d'une fonction

Définition **Sécante**

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit A et B deux points de $\mathscr{C}_f$ alors la droite (AB) est appelée sécante de $\mathscr{C}_f$.



$\mathscr{C}_f$



Définition Convexité et concavité

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On dit que :

① f est **convexe** sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathcal{C}_f$ est **en dessous de ses sécantes.**

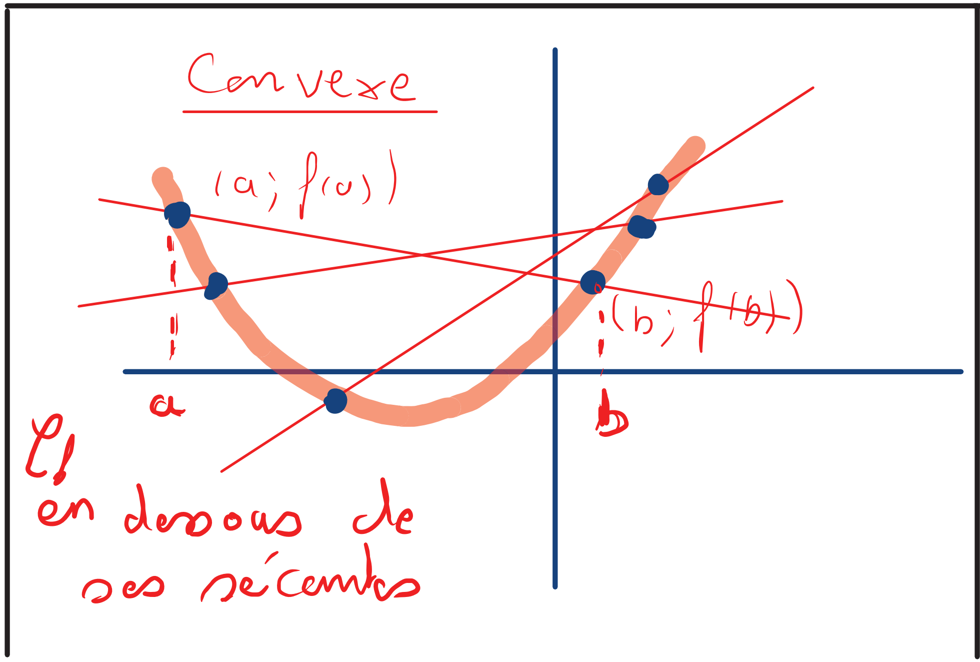
② f est **concave** sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus de ses sécantes.**

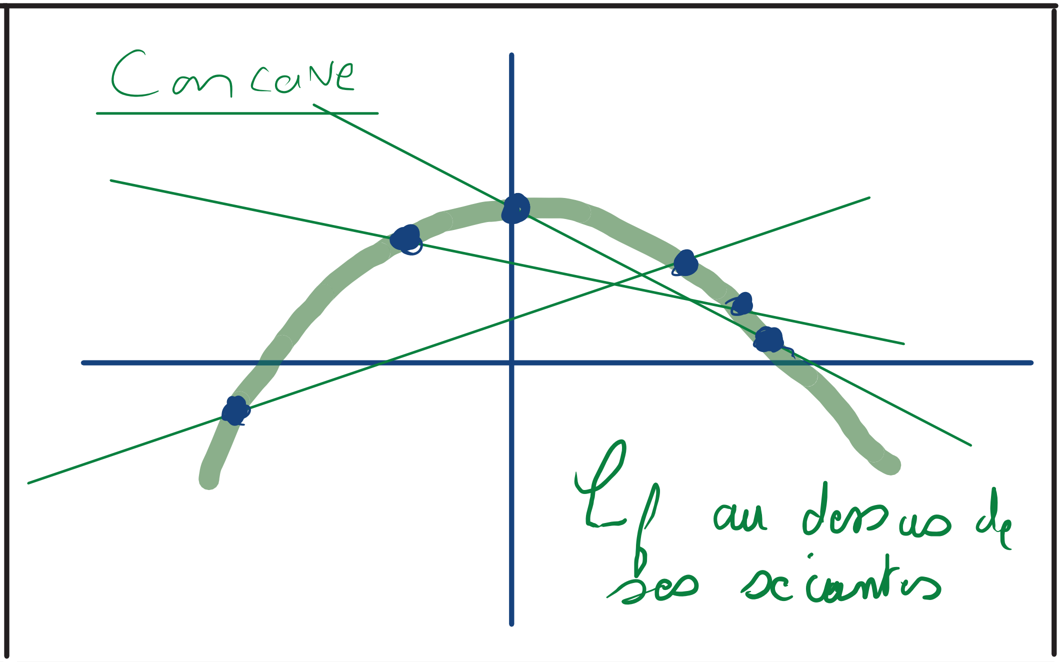
Définition Convexité et concavité

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On dit que :

① f est convexe sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ses sécantes.

② f est concave sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses sécantes.



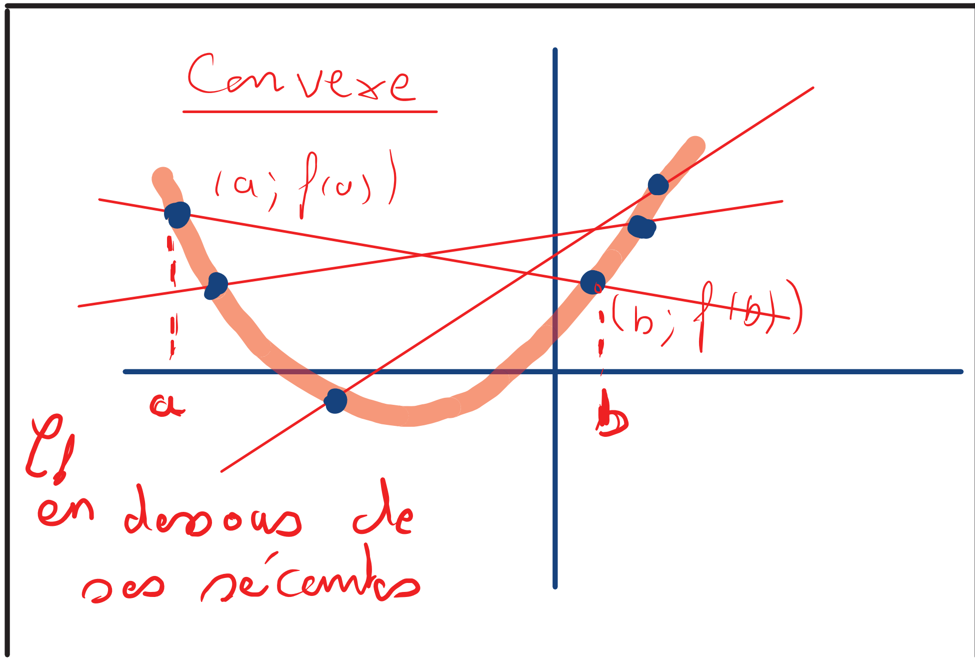


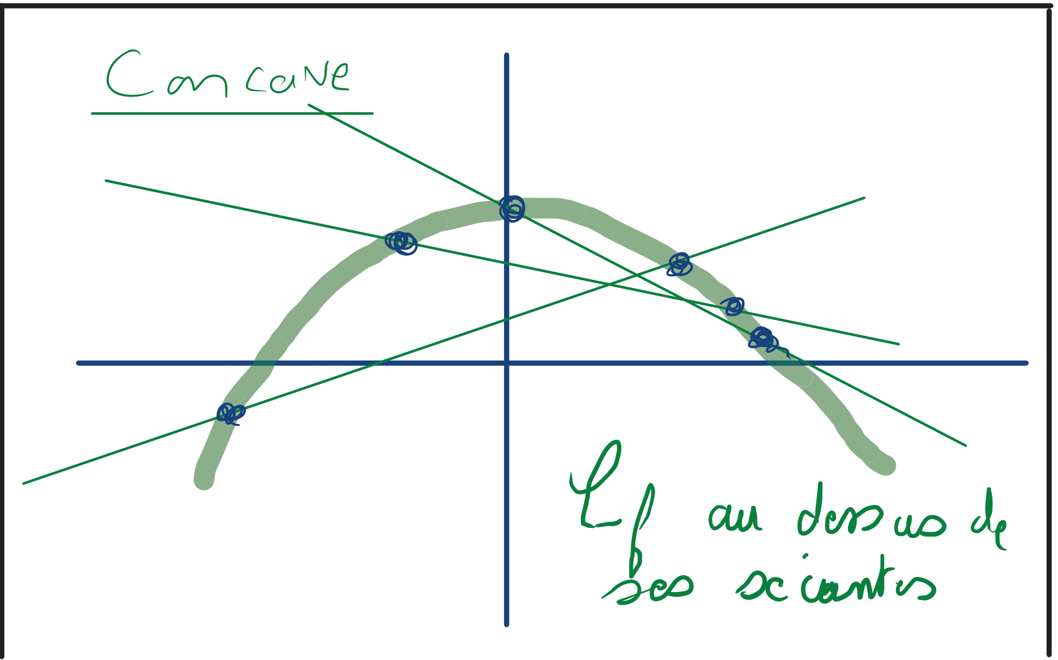
Définition ## Convexité et concavité

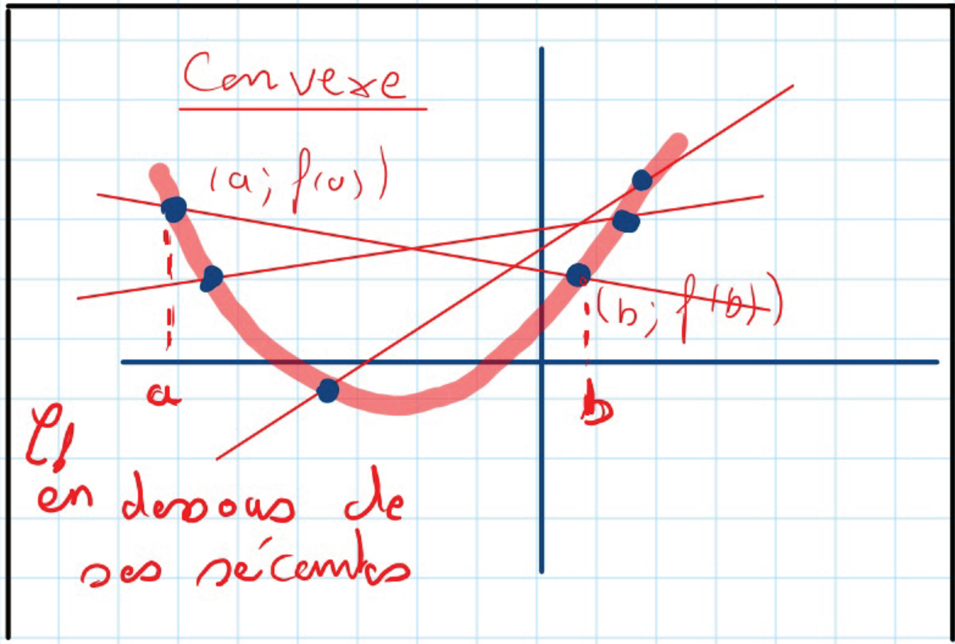
Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On dit que :

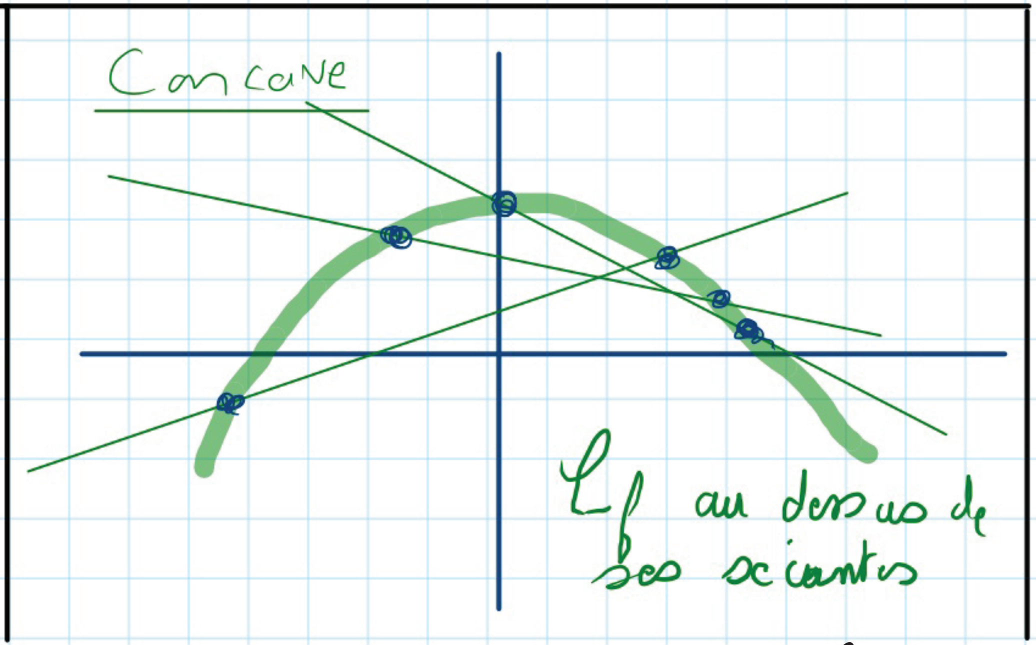
① f est convexe sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ses sécantes.

② f est concave sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses sécantes.



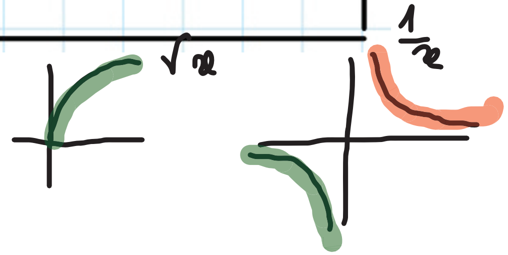






La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes.

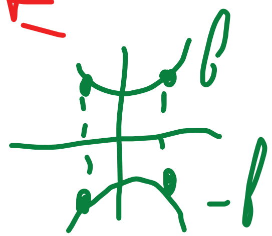
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $]0 ; +\infty[$
et concave sur $]-\infty ; 0[$



CONVEXE
U

Propriétés Concavité

f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.



La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $]0\,;+\infty[$ et concave sur $]-\infty\,;0[$

Propriétés **Concavité**

f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes.

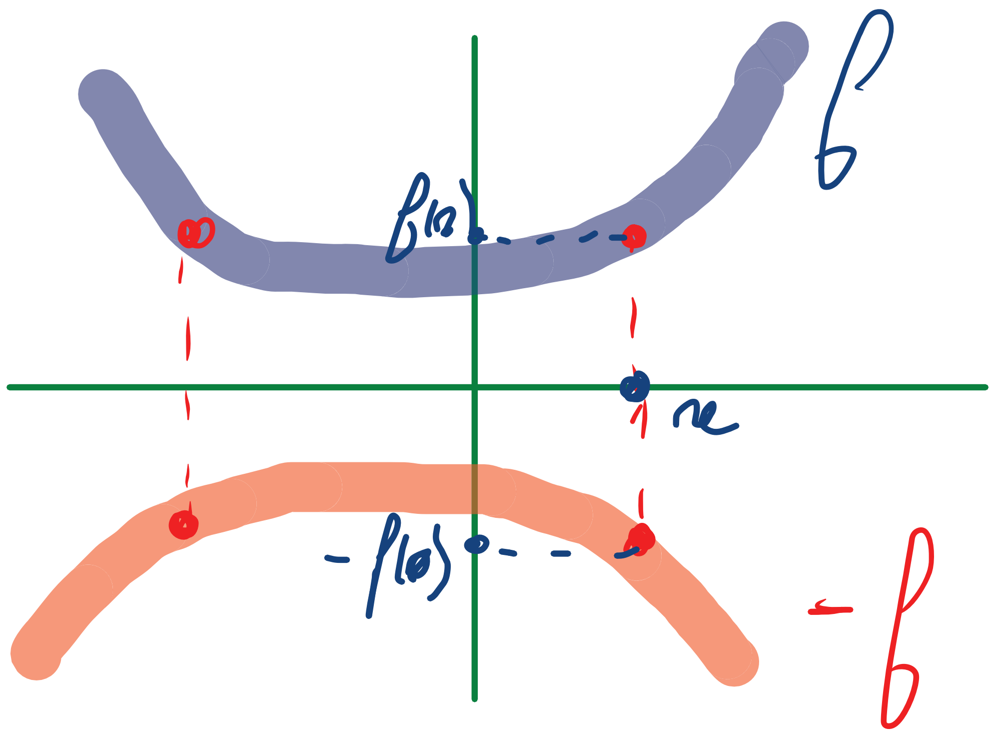
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $]0 ; +\infty[$ et concave sur $]-\infty ; 0[$

Propriétés Concavité

f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

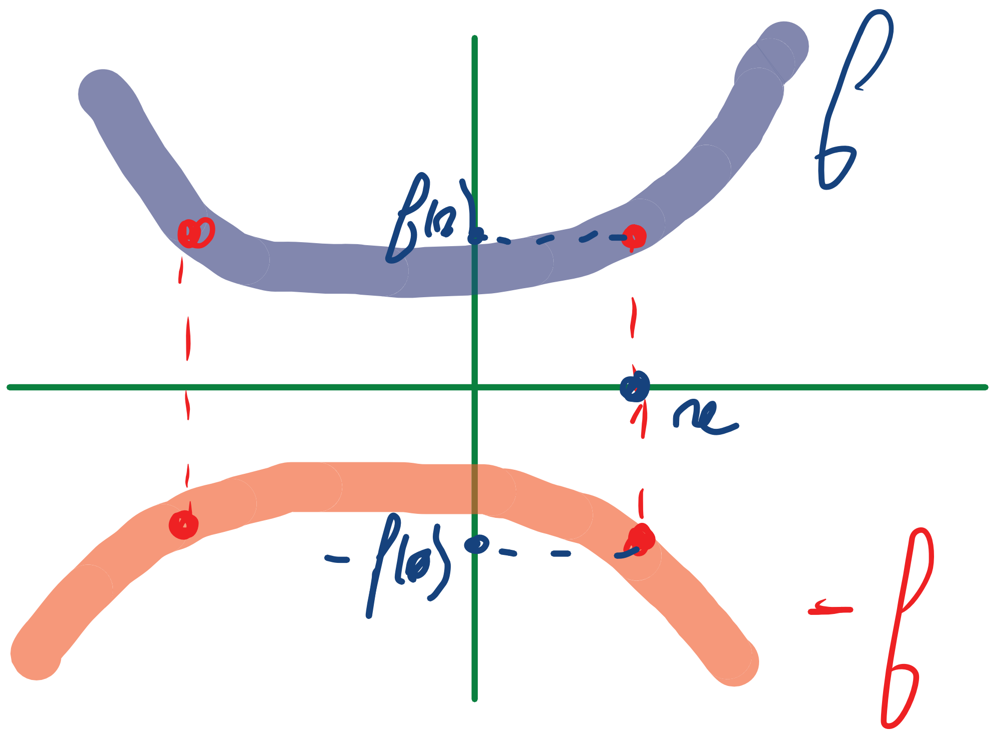
Propriétés Concavité

f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.



Propriétés Concavité

f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.



Définition Dérivée seconde

Soit f une fonction supposée deux fois dérivable sur I et f' sa fonction dérivée.

On appelle dérivée seconde de la fonction f, notée f'', la dérivée de f'.

4 Fonction convexe et dérivées première et seconde

Théorème Fonction convexe, fonction concave

Soit I un intervalle réel.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I et f' sa fonction dérivée.

- f est convexe sur I, si et seulement si, pour tout réel x de I, f' est croissante.
- f est concave sur I, si et seulement si, pour tout réel x de I, f' est décroissante.

→ Tableau de variation de f'

→ signe f''

VARIATION_FONCTION_COMPOSEE4.html

Soit f la fonction définie par f(x)=$e^{\frac{5x}{-5x+10}}$.
Dresser le tableau de variation complet (∞ se notera "inf") de f après avoir complété les justifications:

x	?			?			?
Signe de f'(x)		?		‖		?	
Variation de f	?		?	‖	?		?

Justifications:

f'(x)= ?/(-5x+10)^2 ? $\times e^{\frac{5x}{-5x+10}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=$ exp(?) ?

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x)=$? ?

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x)=$? ?

Exercice

$$(e^{r})' = r' \times e^{r} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Soit $f(x) = e^{\frac{5x}{-5x+10}}$

① $D_f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$-5x+10 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

② f' et son signe ?

$f(x) = e^{r(x)}$ avec $r(x) = \frac{5x}{-5x+10} = \frac{u}{v}$

$f'(x) = r'(x)e^{r(x)}$ avec $r'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

① $D_f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{2\}$

② f' et son signe ?

$f(x) = e^{r(x)}$ avec $r(x) = \dfrac{5x}{-5x+10} = \dfrac{u}{v}$

$u(x) = 5x \Rightarrow u'(x) = 5$

$v(x) = -5x+10 \Rightarrow v'(x) = -5$

$f'(x) = r'(x)e^{r(x)}$ avec $r'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$= \dfrac{5 \times (-5x+10) - 5x \times (-5)}{(-5x+10)^2}$

$= \dfrac{-25x + 50 + 25x}{(-5x+10)^2}$

Soit f la fonction définie par $f(x)=e^{\frac{5x}{-5x+10}}$.
Dresser le tableau de variation complet (∞ se notera "inf") de f après avoir complété les justifications:

x	?		?		?
Signe de f'(x)		?	‖	?	
Variation de f	? ? ?		‖	? ? ?	

Justifications:

$f'(x)$= ?/(-5x+10)^2 ? $\times e^{\frac{5x}{-5x+10}}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$= exp(?) ?

$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$= ? ?

$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$= ? ?

$$f(x) = e^{r(x)'} \quad \text{avec} \quad r(x) = \frac{5x}{-5x+10} = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = r' e^{r(x)} \quad \text{avec} \quad r'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Soit f la fonction définie par $f(x)=e^{\frac{5x}{-5x+10}}$.
Dresser le tableau de variation complet (∞ se notera "inf") de f après avoir complété les justifications:

x	?		?		?
Signe de f'(x)		?	‖	?	
Variation de f	?	? ?	‖	? ?	?

Justifications:

f'(x)= ?/(-5x+10)^2 ? $\times e^{\frac{5x}{-5x+10}}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) =$ exp(?) ?

$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) =$? ?

$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) =$? ?

$$= \frac{5\times(-5x+10) - 5x\times(-5)}{(-5x+10)^2}$$

$$= \frac{-25x + 50 + 25x}{(-5x+10)^2}$$

$$= \frac{50}{(-5x+10)^2} \geq 0$$

car $(-5x+10)^2 > 0$ et $50 > 0$

$$f'(x) = r'e^{r(x)} \quad \text{avec} \quad r'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Soit f la fonction définie par $f(x)=e^{\frac{5x}{-5x+10}}$.
Dresser le tableau de variation complet (∞ se notera "inf") de f après avoir complété les justifications:

x	?	?	?
Signe de f'(x)	?	‖	?
Variation de f	? ? ?	‖	? ? ?

Justifications:

$f'(x)=$?/(-5x+10)^2 ? $\times e^{\frac{5x}{-5x+10}}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) =$ exp(?) ?

$\lim_{x\to 2, x>2} f(x) =$? ?

$\lim_{x\to 2, x<2} f(x) =$? ?

$$= \frac{5\times(-5x+10) - 5x\times(-5)}{(-5x+10)^2}$$

$$= \frac{-25x + 50 + 25x}{(-5x+10)^2}$$

$$= \frac{50}{(-5x+10)^2} \geq 0$$

car $(-5x+10)^2 > 0$ et $50 > 0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de f'		$+$	‖	$+$	
Variation de f		↗	‖	↗