CHAPITRE 3
LIMITES DE FONCTIONS

Suites

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u_n = n^2+1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim \frac{\cancel{n}\times 1}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})} = 1$$

(F.I.) $\frac{+\infty}{+\infty}$

Fonctions

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2+1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{x+1} = ?$$

CHAPITRE 3
LIMITES DE FONCTIONS

Suites

$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$n \longmapsto u_n = n^2 + 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ $\qquad \frac{n \times 1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim \frac{\cancel{n} \times 1}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1$

(F.I.) $\frac{+\infty}{+\infty}$

Fonctions

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^2 + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{x+1} = ?$

1 Limite d'une fonction en l'infini

1 Limite d'une fonction en l'infini

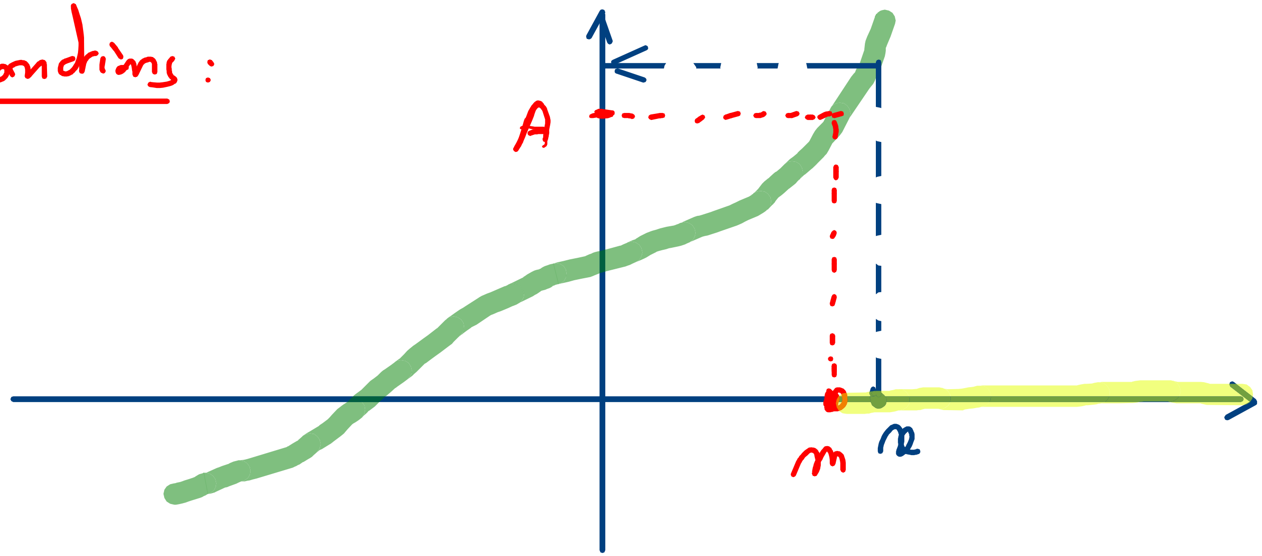
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[b\,;+\infty]$ (b pouvant ne pas être compris et pouvant être $-\infty$).

Définition Limite infinie

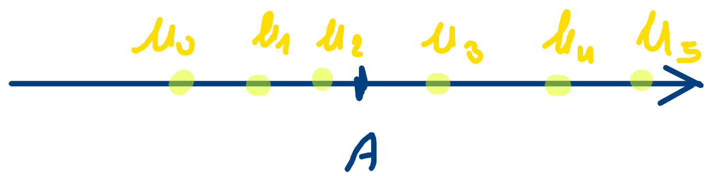
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand.

C'est-à-dire que pour tout réel A il existe un réel m tel que si $x > m$ alors $f(x) > A$.

Fonctions :



Suites :



Exercice 1

Compléter le plus rapidement possible les limites suivantes, (l'infini $+\infty$ ou $-\infty$ se noterons respectivement "+inf" et "-inf":

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} 9x^4 - \dfrac{8}{x^6} =$ ☐

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{56}{\dfrac{2}{x} - 7} =$ ☐

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} -7x + \dfrac{9}{x} =$ ☐

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{x^3} =$ ☐

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} - 4 =$ ☐

Exercice 2

Compléter le plus rapidement possible les limites suivantes, (l'infini $+\infty$ ou $-\infty$ se noterons respectivement "+inf" ou "-inf":

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} 9x - \dfrac{4}{x} =$ ☐

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-9}{\underbrace{-3x}_{+\infty} + \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{0}} =$ 0 $\quad \dfrac{-9}{\infty}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{64 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{x} - 8} =$ ☐

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9}{\sqrt{x}} - 8 =$ ☐

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x}} - 7 =$ ☐

LIMITES_FCT_REFERENCE_INFINI1
LIMITES_FCT_REFERENCE_INFINI2

Exemple: $f: x \mapsto \underbrace{x^3+3x^2}_{+\infty}\underbrace{-9x}_{-\infty}+1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ ?$$

Preuve:

① On a une F.I. "$(+\infty)+(-\infty)$"

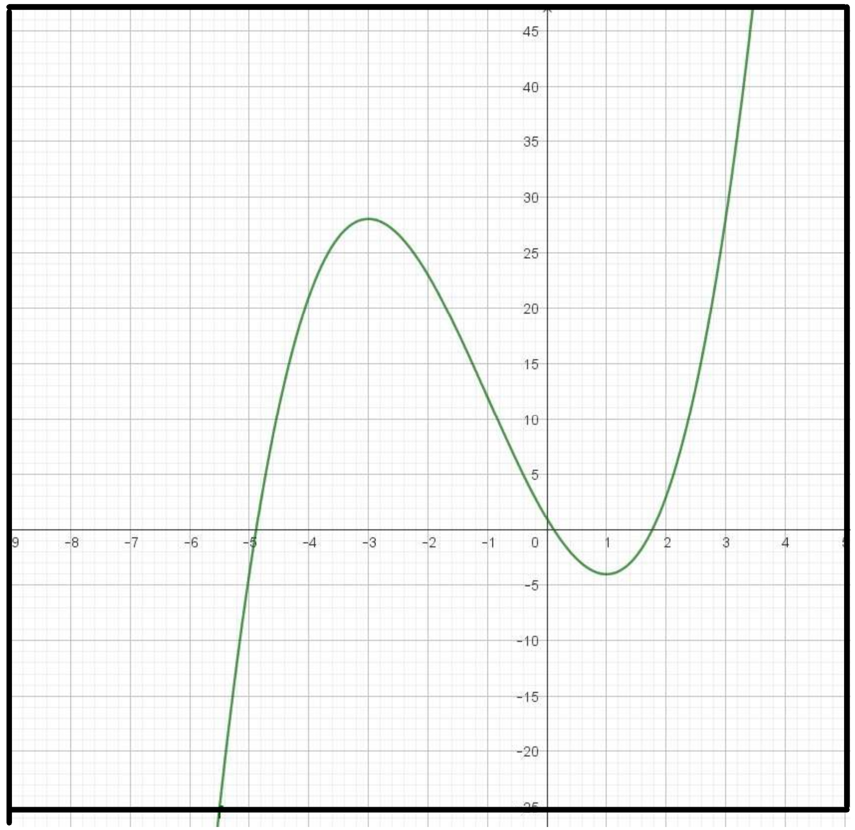
$$f(x) = \underbrace{x^3+3x^2}_{(+\infty)} + \underbrace{(-9x+1)}_{(-\infty)}$$

" $(+\infty) + (-\infty)$ "

② Levée de l'indétermination

$$x^3+3x^2-9x+1 = x^3\left(1+\frac{3x^2}{x^3}-\frac{9x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$



$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \quad \ldots$$

Preuve:

① On a une F. I. "$(+\infty)+(-\infty)$"

$$f(x) = \underbrace{x^3 + 3x^2}_{\text{"}(+\infty)} + \underbrace{(-9x+1)}_{(-\infty)\text{"}}$$

② Levée de l'indétermination

$$x^3+3x^2-9x+1 = x^3\left(1+\frac{3x^2}{x^3}-\frac{9x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+3x^2-9x+1)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^3 \times \left(1+\frac{3}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= \text{"}(+\infty)\times(1+0-0+0)\text{"}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \mp\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

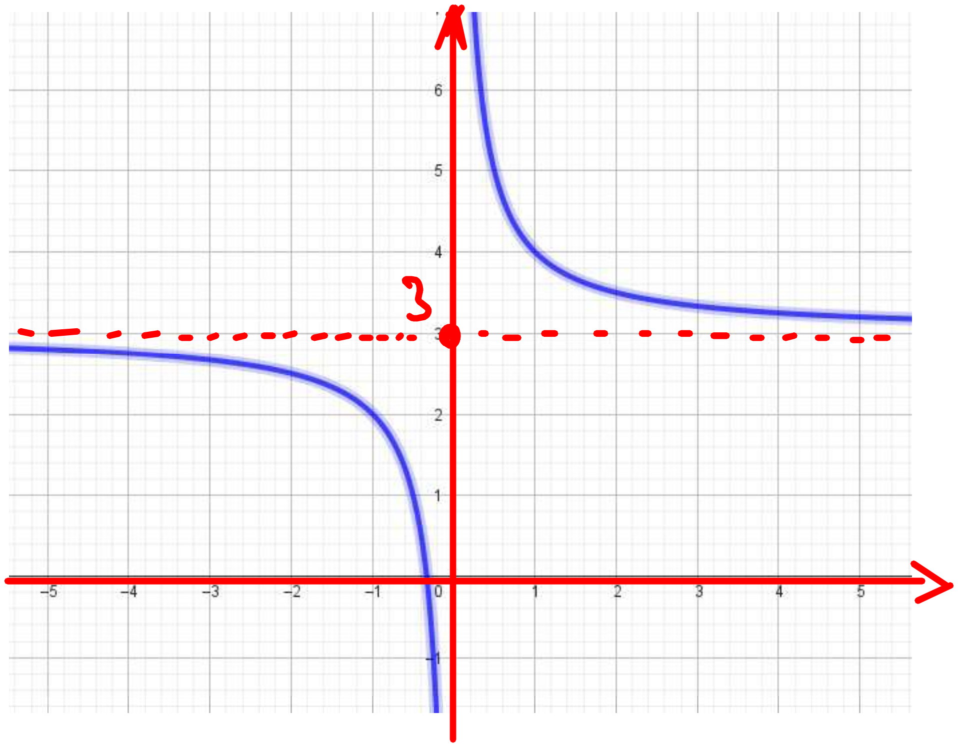
LIMITES_FCT_REFERENCE_INFINI1
LIMITES_FCT_REFERENCE_INFINI2

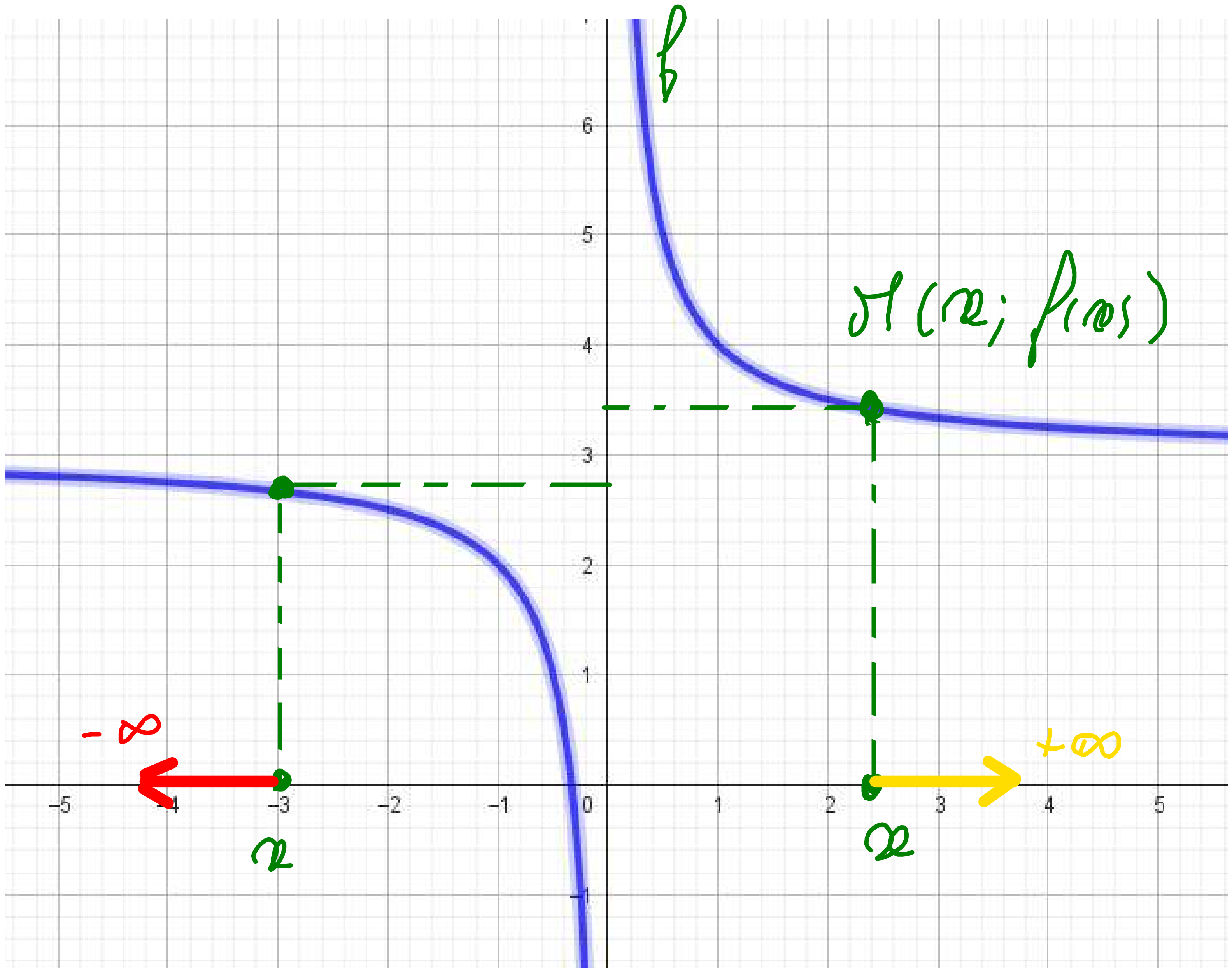
Définition Limite finie en l'infini

<u>Exemples</u>

① $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

② $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$





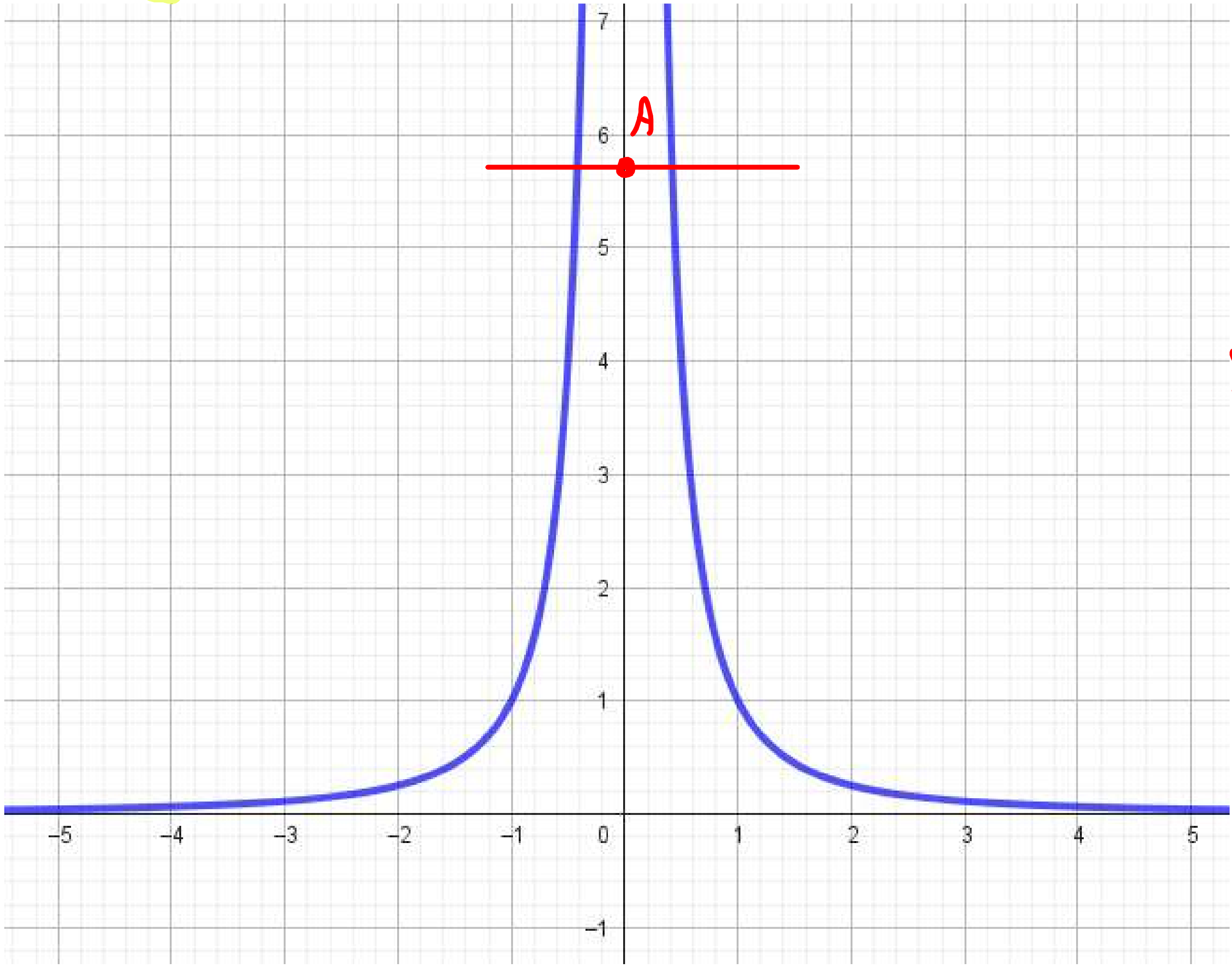
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$$

LIMITES_COURBES0

2 Limite d'une fonction en une valeur réelle

Définition Limite infinie

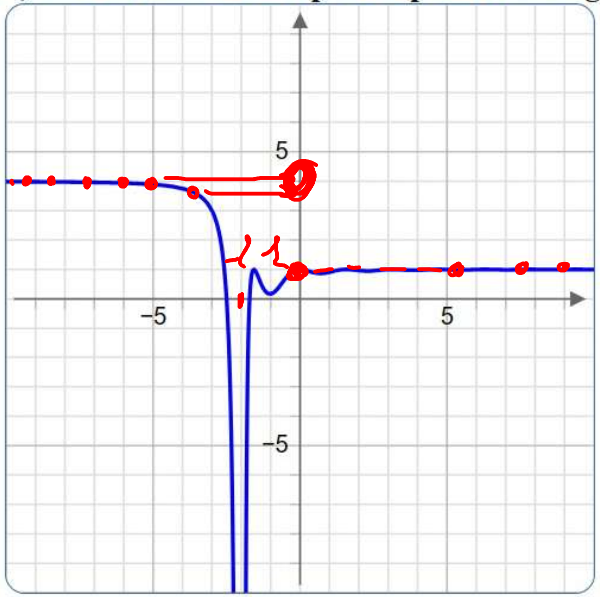


$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

si x suffisamment proche de 0

$f(x) > A$

1) La fonction f admet pour représentation graphique la courbe suivante:



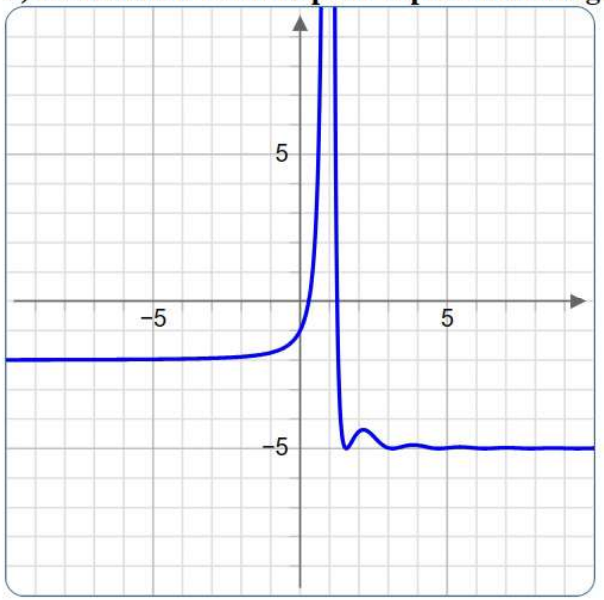
Compléter par conjecture les limites suivantes:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{4}$?

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{1}$?

$\lim_{x \to -2} f(x) = \boxed{-\infty}$?

2) La fonction f admet pour représentation graphique la courbe suivante:



Compléter par conjecture les limites suivantes:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{-2}$?

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{-5}$?

$\lim_{x \to 1} f(x) = \boxed{+\infty}$?

LIMITES_COURBES1
LIMITES_COURBES2

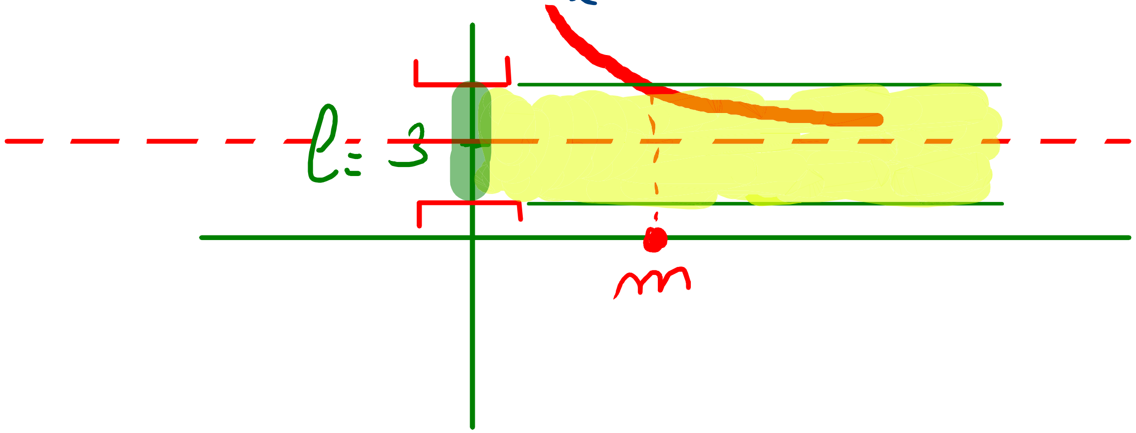
Définitions avec des intervalles

Intervalle ouvert
$]a ; b[$

Définition **Limite finie en l'infini**

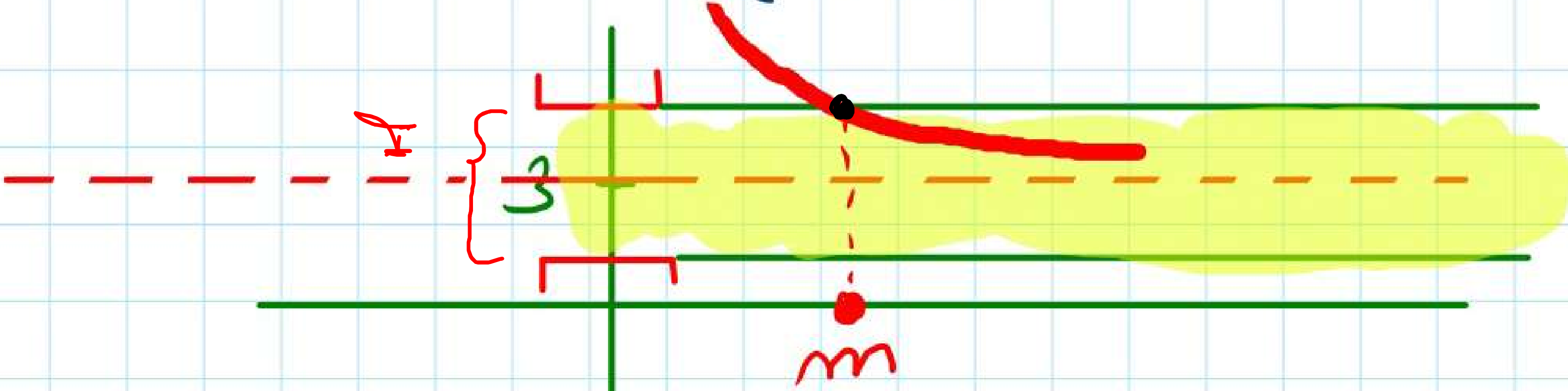
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ, quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient $f(x)$ pour x assez grand.
C'est-à-dire que pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un réel m tel que si $x > m$ alors $f(x) \in$ I.

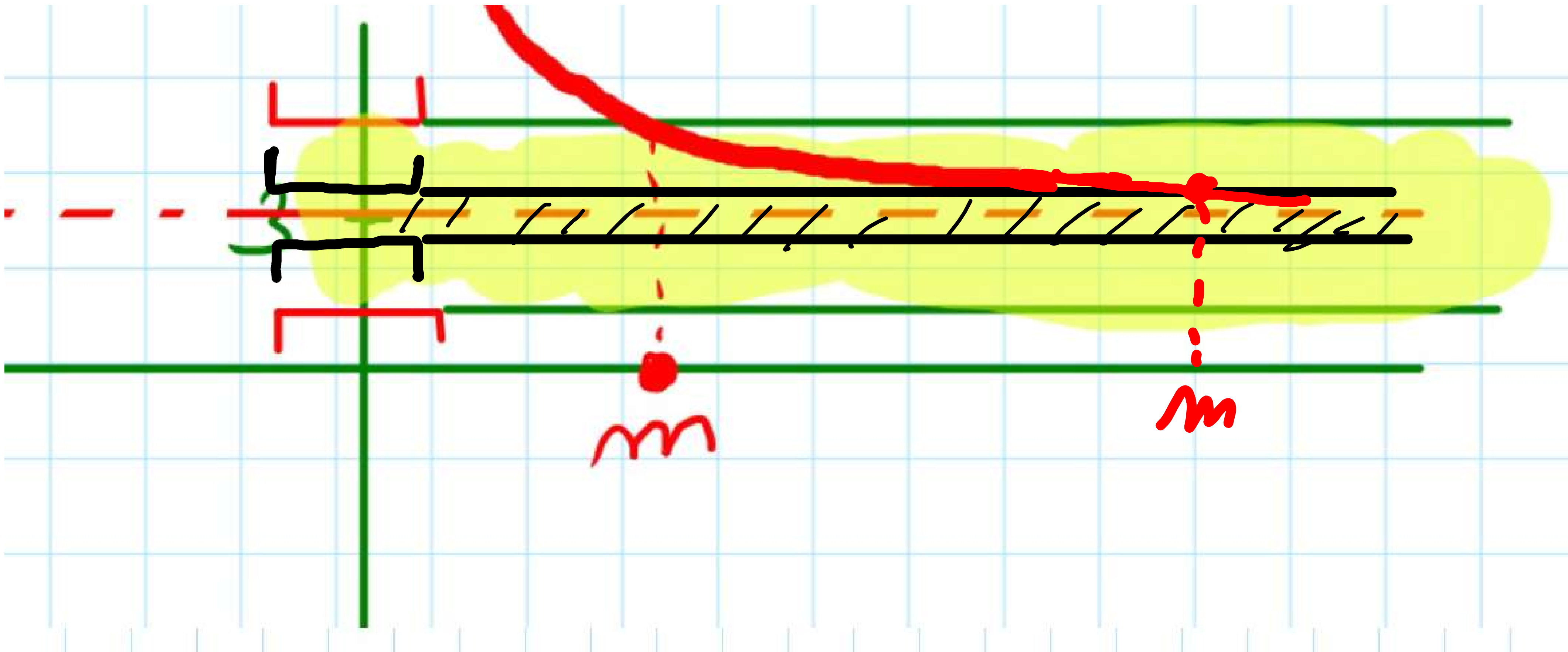
<u>Exemple</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \dfrac{1}{x}\right) = 3$



__Example__ : $\lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x} \right) = 3$

(ℓ)



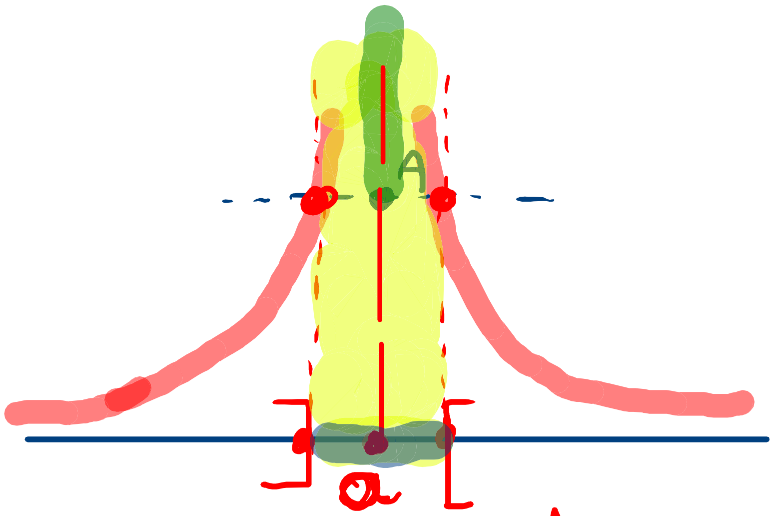

m
m

Définition Limite infinie

On note $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f

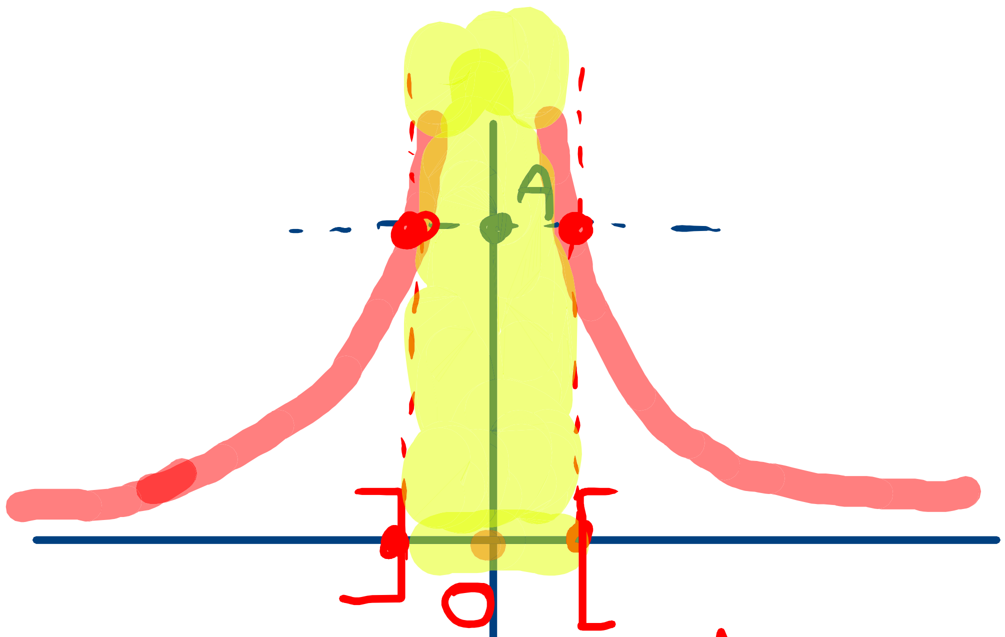
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient $f(x)$ pour x suffisamment proche de a dans $\mathcal{D}$. C'est-à-dire que pour tout réel A il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que si $x \in \mathcal{D} \cap \text{I}$ alors $f(x) > A$.

$]A\,;+\infty[$



$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

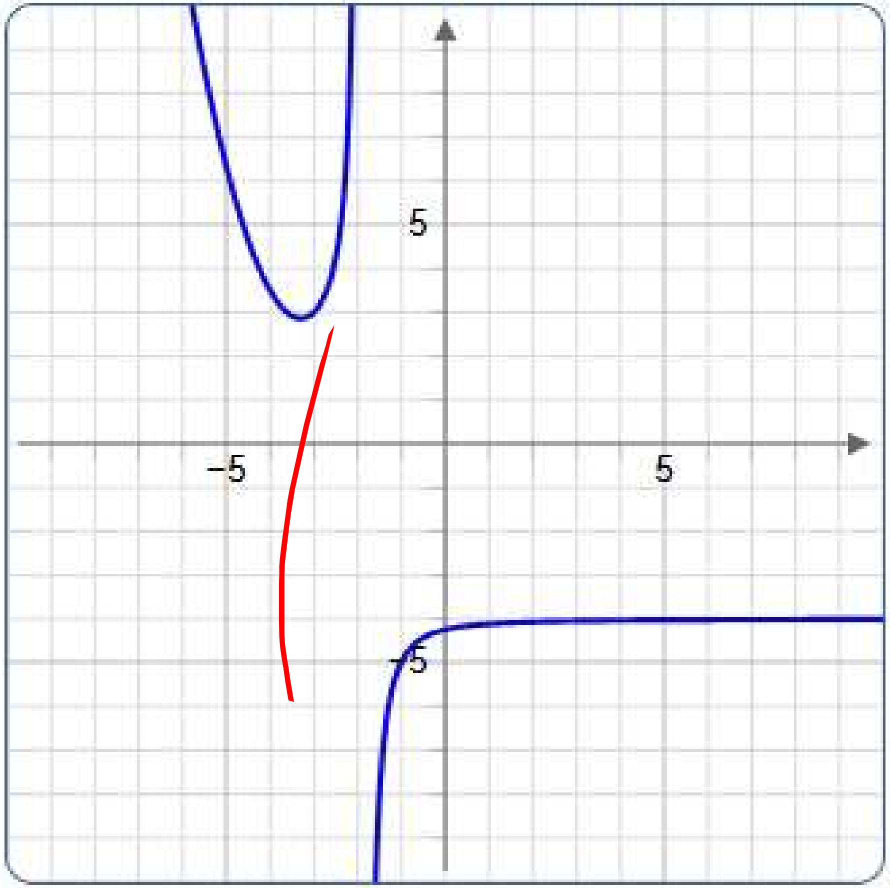
Dans cet intervalle ouvert, les points de la courbe sont au-dessus de A.

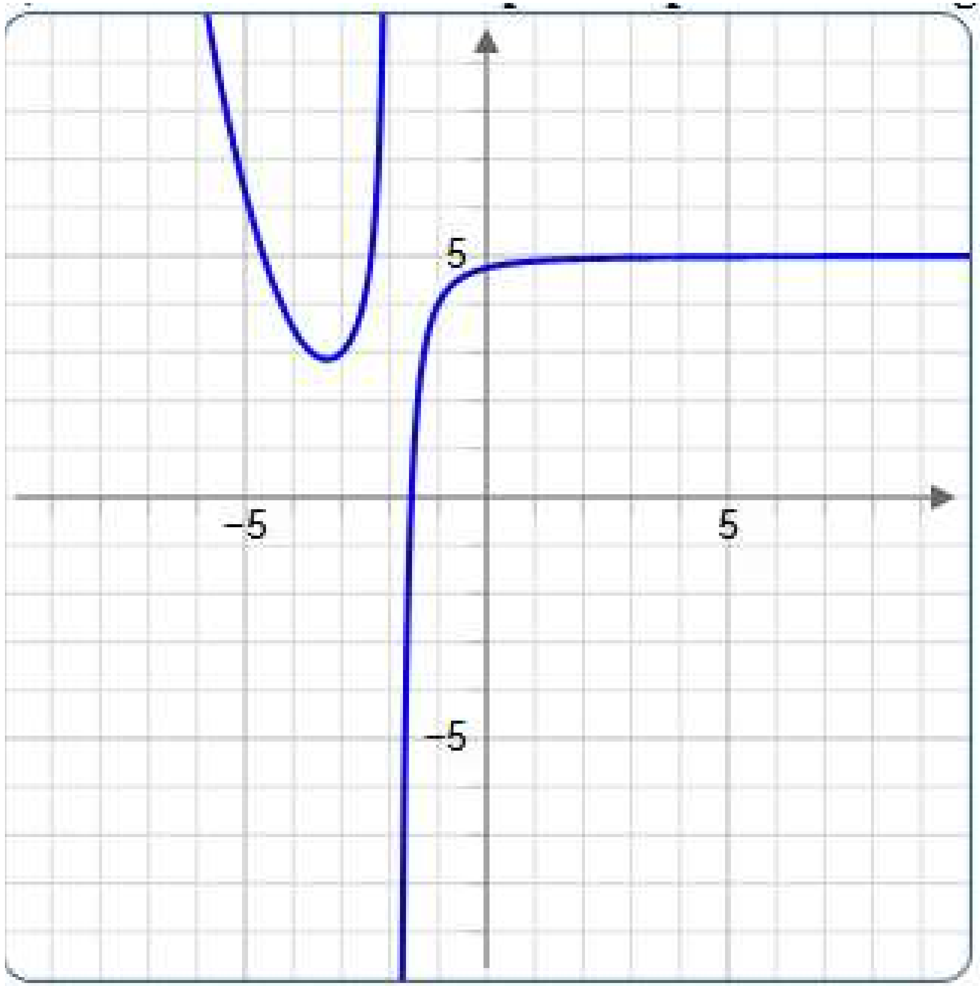


$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

Dans cet intervalle ouvert, les points de la courbe sont au-dessus de A.

1) La fonction f admet pour représentation grap



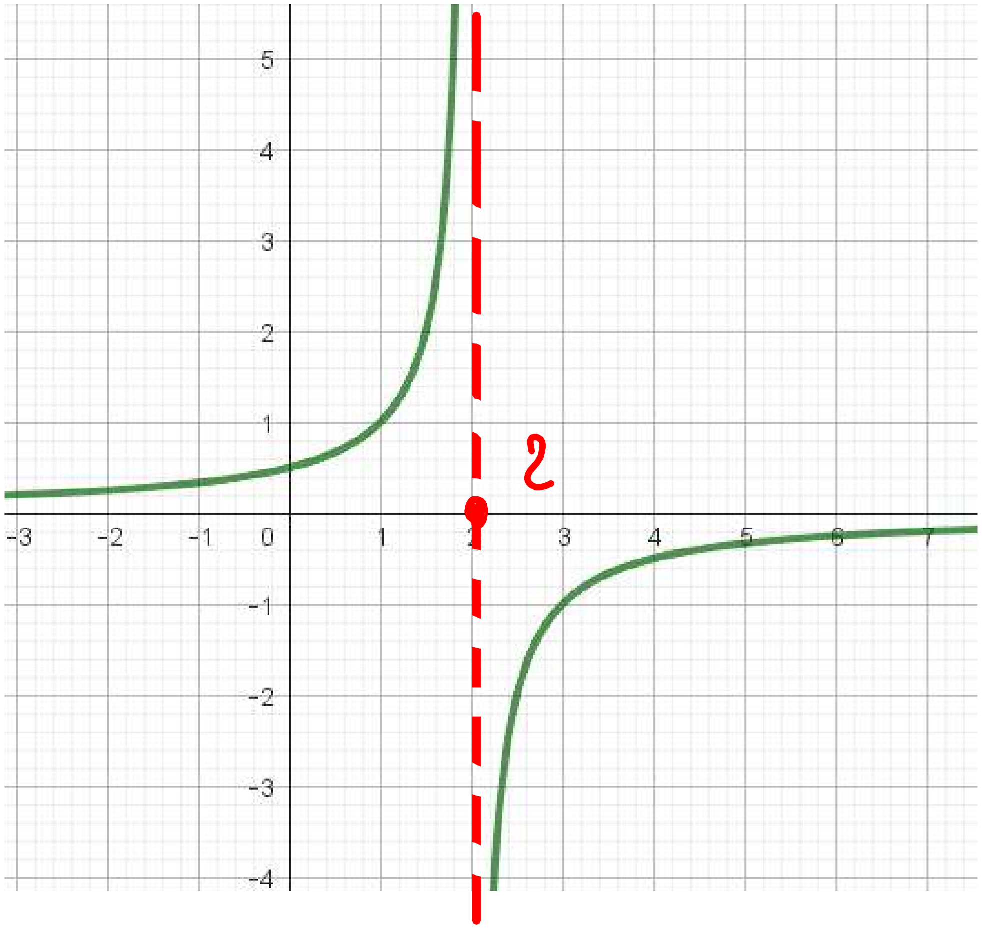


$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -4$

Définition Limite finie ou infinie à gauche ou à droite

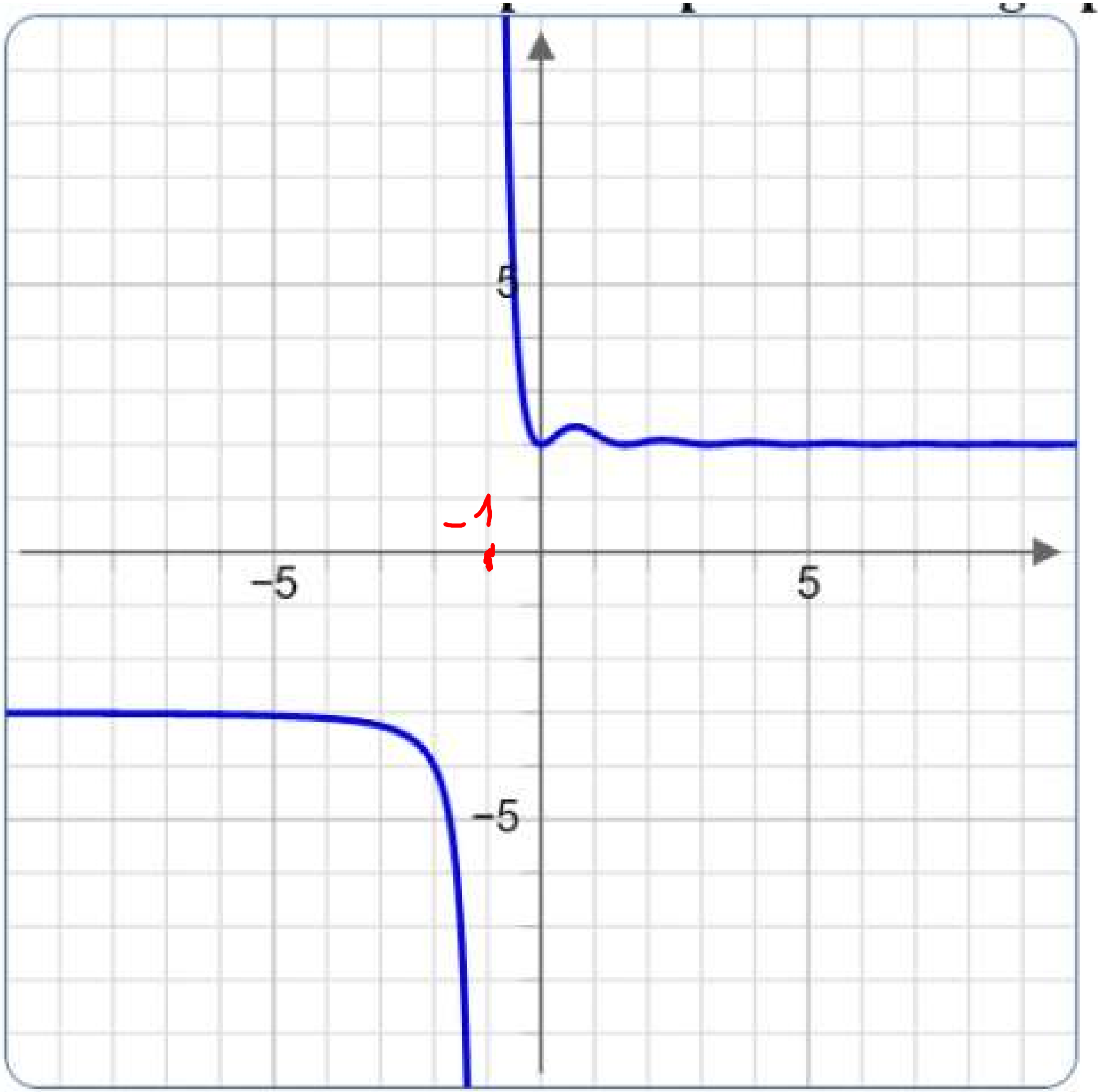
- On dit que f admet une **limite à gauche** de a et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x < a$.
- On dit que f admet une **limite à droite** de a et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x > a$.



$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = -\infty$$

Exercice



Compléter par conjecture les limites suivantes:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{2}$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{-3}$$

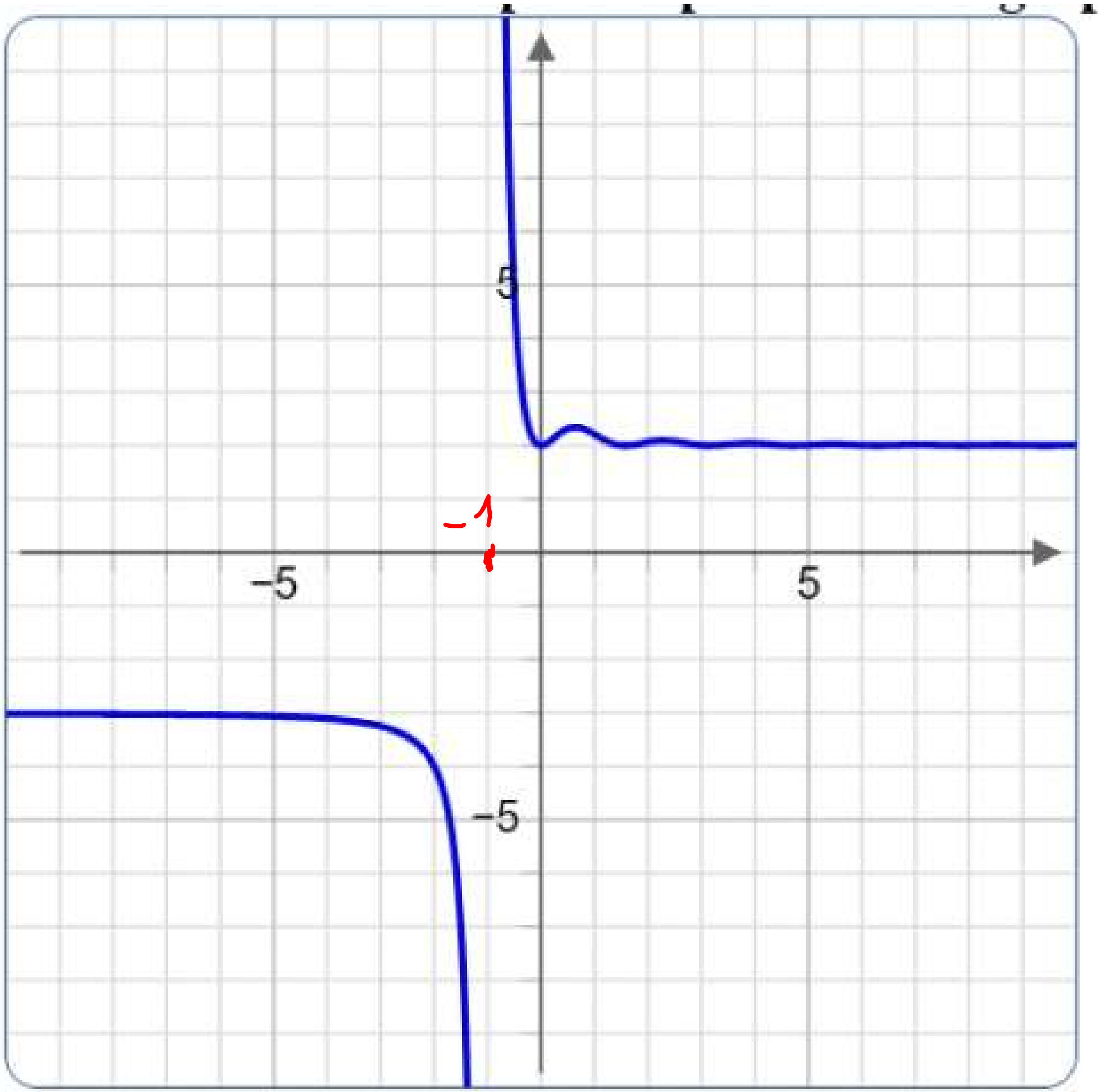
LIMITES_COURBES3

LIMITES_COURBES4

LIMITES_COURBES5

LIMITES_COURBES6

Exercice



Compléter par conjecture les limites suivantes:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{2}$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \boxed{-\infty}$$

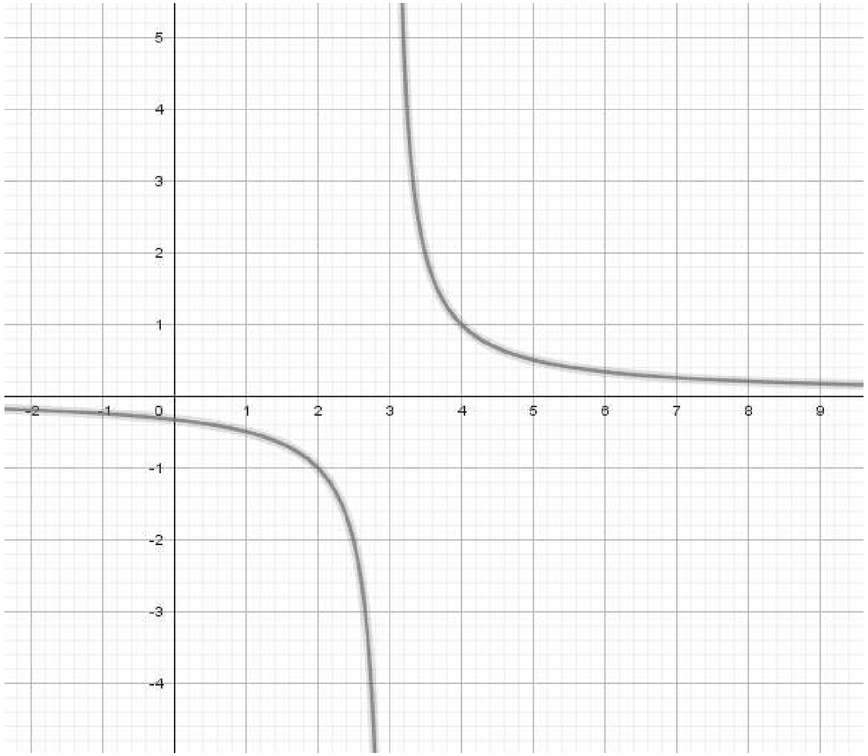
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{-3}$$

LIMITES_COURBES3

LIMITES_COURBES4
LIMITES_COURBES5
LIMITES_COURBES6

• On dit que *f* admet une **limite à gauche** de *a* et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ lorsque *f* admet une limite quand x tend vers a avec $x < a$.

• On dit que *f* admet une **limite à droite** de *a* et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ lorsque *f* admet une limite quand x tend vers a avec $x > a$.



Par calcul :

Exercice $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} \left(\frac{2}{x-3}\right) = ?$

① Conjecture : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} \left(\frac{2}{x-3}\right) = +\infty$

② Preuve : " $\frac{2}{0}$ "

① Conjecture : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \left(\frac{2}{x-3}\right) = +\infty$

(Calculs à la main ou dessin de courbe)

② Preuve : Signe de $x - 3$

Comme $x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \frac{2}{x-3} = $ " $\frac{2}{0^+}$ " $= +\infty$

③ $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{2}{x-3} = $ " $\frac{2}{0^-}$ " $= -\infty$

Car $x < 3 \Leftrightarrow x - 3 < 0$

" $\frac{2}{3-3}$ " = " $\frac{2}{0}$ "

$= \begin{cases} +\infty \\ \text{ou} \\ -\infty \end{cases}$

$\frac{2}{-0,1} = -20$	$\frac{2}{0,1} = 20$
$\frac{2}{-0,01} = -200$	$\frac{2}{0,01} = 200$
$\frac{2}{-0,001} = -2000$	$\frac{2}{0,001} = 2000$
$-\infty$	$+\infty$

③ $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{2}{x-3} = \text{"}\frac{2}{0^-}\text{"} = -\infty$

$x < 3 \Leftrightarrow x - 3 < 0$

!

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{-5}{x-3} = \text{"}\frac{-5}{0^-}\text{"} = +\infty$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \frac{2}{-0{,}1} = -20 & \frac{2}{0{,}1} = 20 \\ \frac{2}{-0{,}01} = -200 & \frac{2}{0{,}01} = 200 \\ \frac{2}{-0{,}001} = -2000 & \frac{2}{0{,}001} = 2\,000 \end{array}}$$

$$\frac{2}{-0{,}1} = -20 \qquad \frac{2}{0{,}1} = 20$$

$$\frac{2}{-0{,}01} = -200 \qquad \frac{2}{0{,}01} = 200$$

$$\frac{2}{-0{,}001} = -2000 \qquad \frac{2}{0{,}001} = 2000$$

On retiendra les quatre formes indéterminées:

$(+\infty)+(-\infty)$ $(+\infty)-(+\infty)$ ...	$\frac{0}{0}$
$0\times(\pm\infty)$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Exercices

$(+\infty)+(-\infty)$	$\frac{0}{0}$
$0\times(\pm\infty)$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

1) $\dfrac{-\infty}{0^+} = \boxed{-\infty}$

2) $\dfrac{+\infty}{0^-} = \boxed{-\infty}$

3) $\dfrac{+\infty}{+\infty} = \boxed{\text{FI}}$

4) $(-\infty)+(+\infty) = \boxed{\text{FI}}$

5) $\dfrac{2}{+\infty} = \boxed{0}$

6) $\dfrac{-\infty}{0^-} =$

7) $-2+(-\infty) =$

8) $\dfrac{-\infty}{-\infty} =$

9) $\dfrac{-5}{+\infty} =$

10) $\dfrac{-\infty}{0^+} =$

$\frac{3}{0^-} = -\infty$

$\frac{-2}{0^+} = -\infty$

$\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$

$\frac{10}{0{,}1}$ $\frac{100}{0{,}01}$

1) $\dfrac{-9}{0^-} = \boxed{+\infty}$

2) $5 \times (-\infty) = \boxed{-\infty}$

3) $\dfrac{+\infty}{0^+} = \boxed{+\infty}$

4) $-2 \times (-\infty) = \boxed{+\infty}$

5) $4 + (+\infty) = \boxed{+\infty}$

6) $-6 \times (+\infty) = \boxed{-\infty}$

7) $(-\infty) \times (-\infty) = \boxed{+\infty}$

8) $\dfrac{-\infty}{+\infty} = \boxed{\text{FI}}$

9) $(+\infty) \times (+\infty) = \boxed{+\infty}$

10) $-4 + (+\infty) = \boxed{+\infty}$

FONCTIONS_LIMITES_CALC_RAPIDE0a.html
FONCTIONS_LIMITES_CALC_RAPIDE0b.html
FONCTIONS_LIMITES_CALC_RAPIDE0c.html

Dans les exercices suivant, donner les limites des opérations proposées.
On notera "inf" pour l'infini et "FI" pour forme indéterminée.

1) $(-\infty)+(+\infty)=$ FI

2) $\dfrac{-8}{0^-}=$ +inf

3) $\dfrac{0^+}{0^+}=$ FI

4) $-4\times(-\infty)=$ +inf

5) $\dfrac{-\infty}{+\infty}=$ FI

6) $\dfrac{0^-}{0^-}=$ FI

7) $-7+(+\infty)=$ +inf

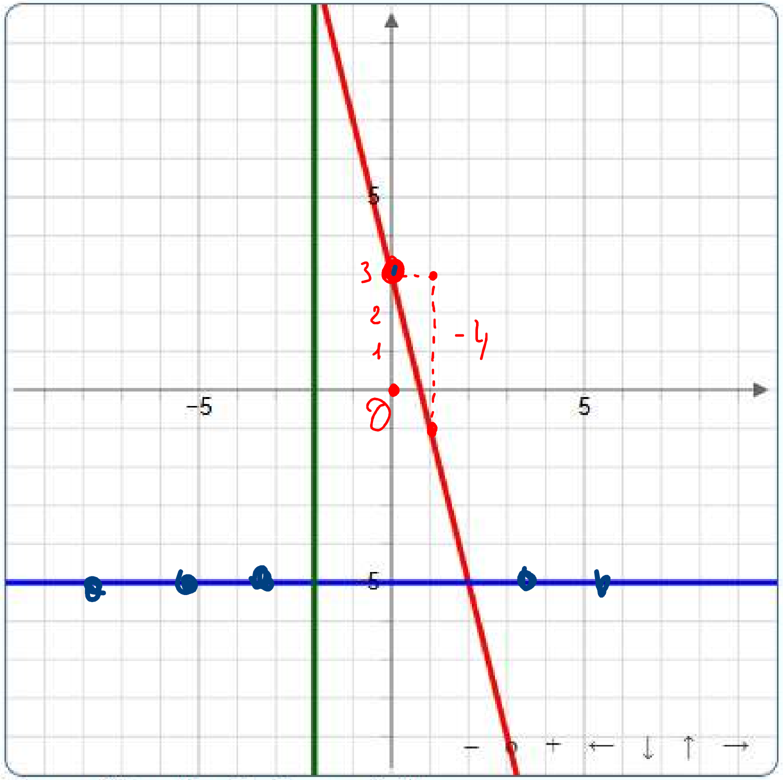
8) $\dfrac{+\infty}{0^-}=$ -inf

9) $\dfrac{1}{+\infty}=$ 0

10) $\dfrac{+\infty}{-\infty}=$ FI

Les différents types d'équation de droite

(Rappels de secondes)



Donner l'équation de chaque droite:

Droite rouge: Sou

Droite bleue: Sou

Droite verte: Sou

Il existe 3 types d'équation de droite

$y = c$, droite BLEUE : $\boxed{y = -5}$

$x = d$, droite VERTE : $\boxed{x = -2}$

$y = ax + b$, droite rouge : $\boxed{y = -4x + 3}$

coefficient directeur

ordonnée à l'origine.

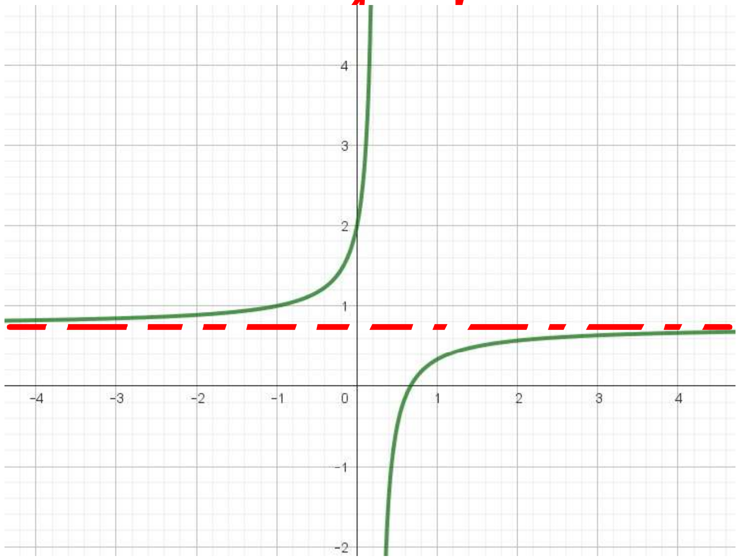
EQ_DROITES_TYPES0
EQ_DROITES_TYPES0a

Définition Asymptote horizontale

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ alors on dit que la droite d'équation $y = \ell$, est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f.

Exemple: $g : x \mapsto \dfrac{3x-2}{4x-1}$

La droite d'équation $y = \frac{3}{4}$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_g$



Preuve en $+\infty$ et en $-\infty$

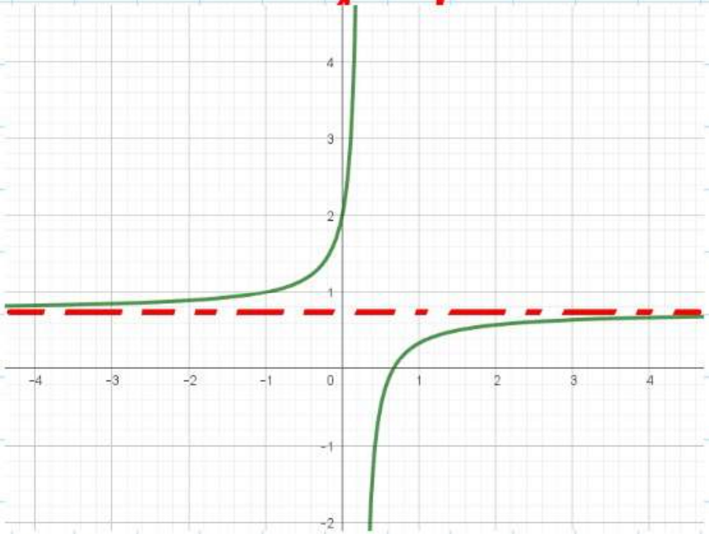
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{4x-1} \qquad \frac{+\infty}{+\infty}$$

On a une F.I.

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(3 - \frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(4 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{3}{4}$$

De même en $-\infty$

La droite d'équation $y = \frac{3}{4}$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_g$



<u>Preuve</u> en $+\infty$ et en $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{4x-1} \qquad \frac{+\infty}{+\infty}$$

On a une F.I.

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(3 - \frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(4 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{3}{4}$$

De même en $-\infty$

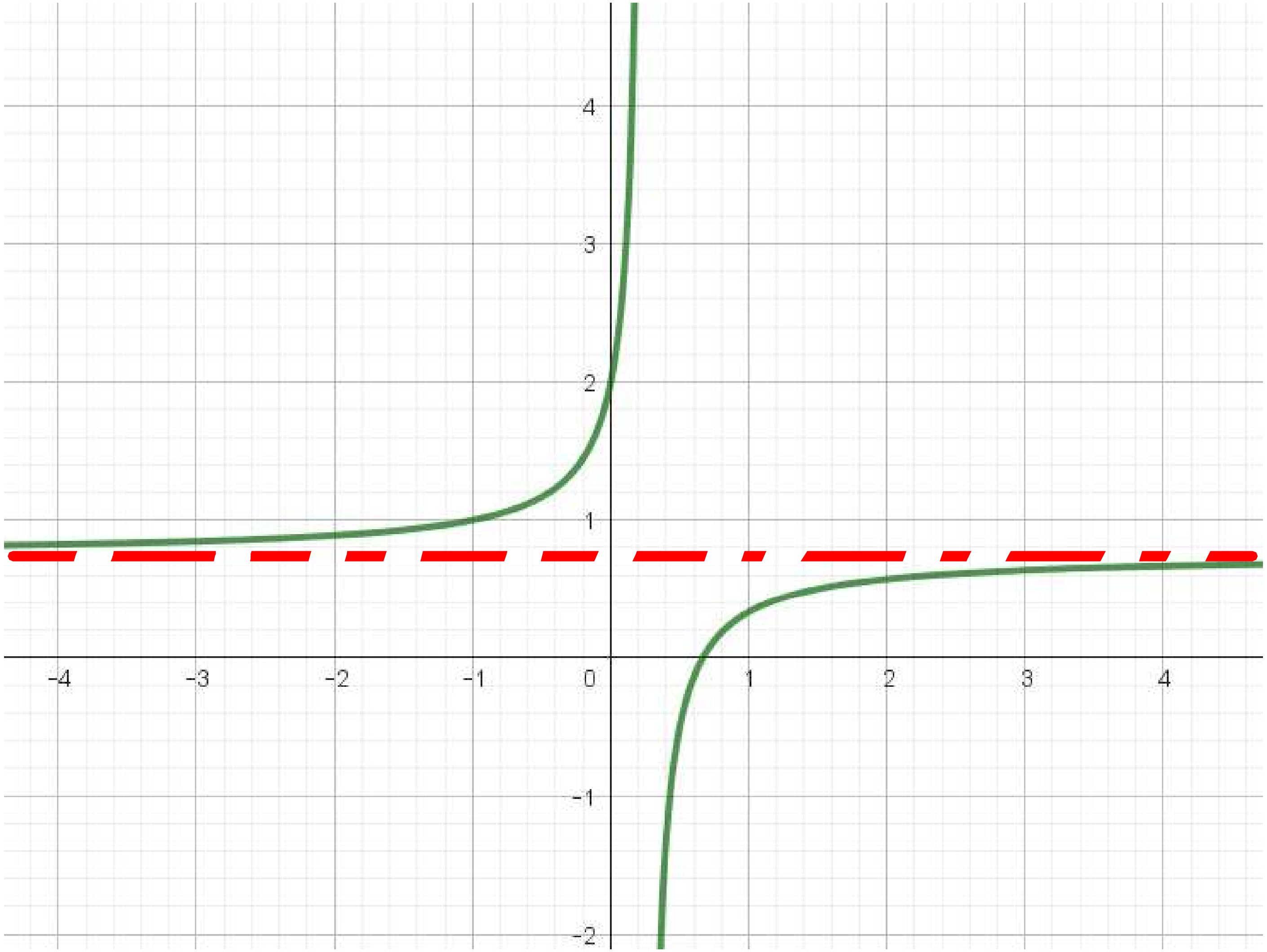
<u>Définition : Asymptote verticale</u>

Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a \\ \text{ou } x < a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a \\ \text{ou } x < a}} f(x) = -\infty$

Définition : Asymptote verticale

Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a \\ \text{ou } x < a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a \\ \text{ou } x < a}} f(x) = -\infty$

alors la droite d'équation $\boxed{x = a}$ est asymptote verticale.



Définition : Asymptote verticale

Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Exemple: $g : x \mapsto \dfrac{3x-2}{4x-1}$ → dessin sur calculatrice

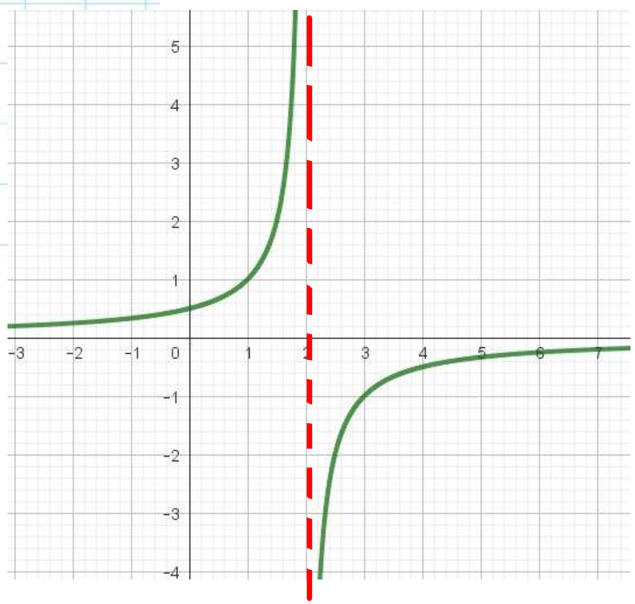
$ax + by + c = 0$

$y = a$

$x = b$

La droite d'équation $y = \frac{3}{4}$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_g$

$x = 2$



Définition : Asymptote verticale

Si $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$

la droite $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$

Exercice 1

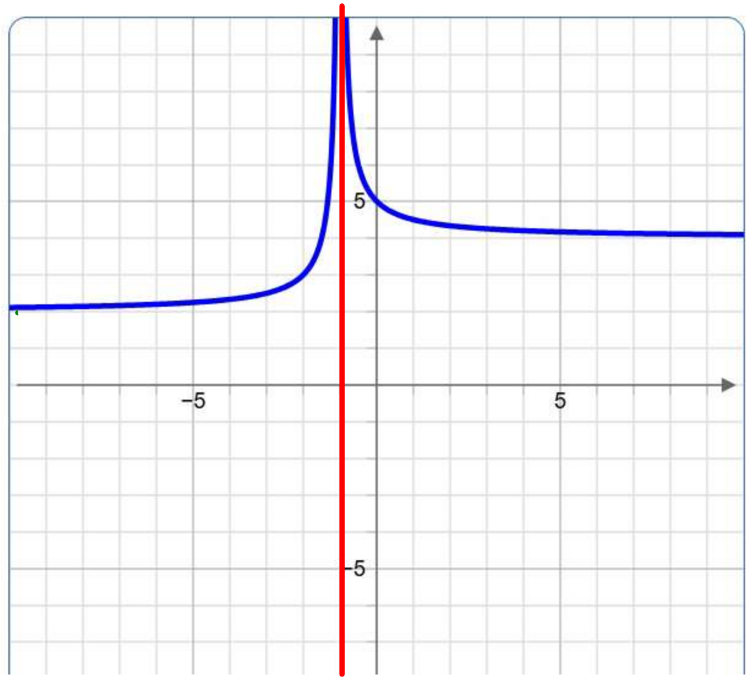
Compléter les phrases suivantes:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ 4 d'où l'asymptote $y = 4$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ 2 d'où l'asymptote $y = 2$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) =$ +inf d'où l'asymptote $x = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) =$ +inf d'où l'asymptote $x = -1$



LIMITES_ASYMPTOTES1
LIMITES_ASYMPTOTES2
LIMITES_ASYMPTOTES3
LIMITES_ASYMPTOTES4
LIMITES_ASYMPTOTES5
LIMITES_ASYMPTOTES_TABVAR1

Exercice 2

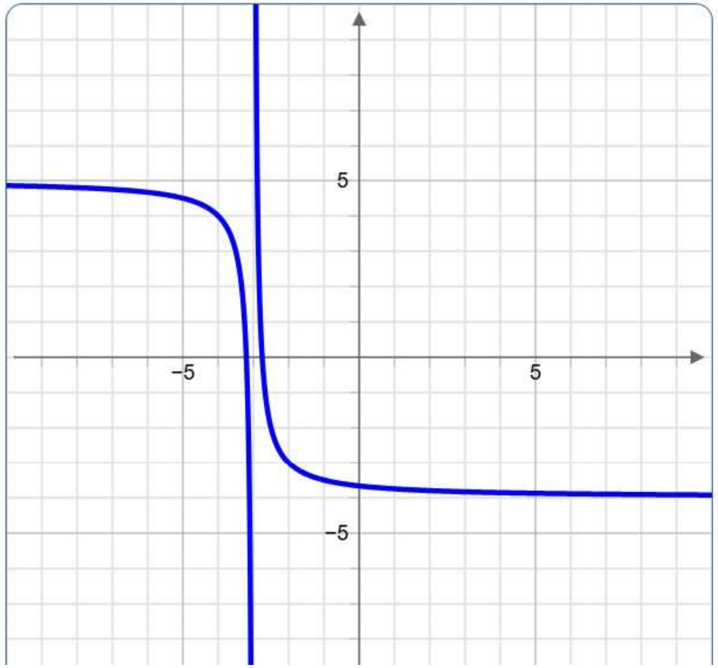
Compléter les phrases suivantes:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=$ ______ d'où l'asymptote ______

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=$ ______ d'où l'asymptote ______

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x)=$ ______ d'où l'asymptote ______

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x)=$ ______ d'où l'asymptote ______



LIMITES_ASYMPTOTES1
LIMITES_ASYMPTOTES2
LIMITES_ASYMPTOTES3
LIMITES_ASYMPTOTES4
LIMITES_ASYMPTOTES5
LIMITES_ASYMPTOTES_TABVAR1