

# Chapitre 2: VECTEURS, DROITES ET PLAN DE L'ESPACE

$$ax + by + c = 0$$

équation cartésienne

$$y = mx + p$$

équation réduite

# Revoir: systèmes d'équations

Exercice 1 (Combinaison linéaire)

$$\begin{cases} 5x - 4y = -19 \\ 2x - 2y = -8 \end{cases} \text{ admet pour solutions } x = \boxed{\phantom{000}} \text{ et } y = \boxed{\phantom{000}}.$$

(Système de deux équations à deux inconnues)

**Rappel: ce sont des équations cartésiennes de droites du PLAN**

[SYSTEME\\_EQUATIONS\\_GRAPHE\\_COURS.html](SYSTEME_EQUATIONS_GRAPHE_COURS.html)

# Revoir: systèmes d'équations

## Exercice 1 (combinaison linéaire)

$$\begin{cases} 5x - 4y = -19 \\ 2x - 2y = -8 \end{cases} \text{ admet pour solutions } x = \boxed{\phantom{000}} \text{ et } y = \boxed{\phantom{000}}.$$

$$\begin{cases} (5x - 4y = -19) \times 2 \\ (2x - 2y = -8) \times (-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 8y = -38 & (E_1) \\ -10x + 10y = 40 & (E_2) \end{cases}$$

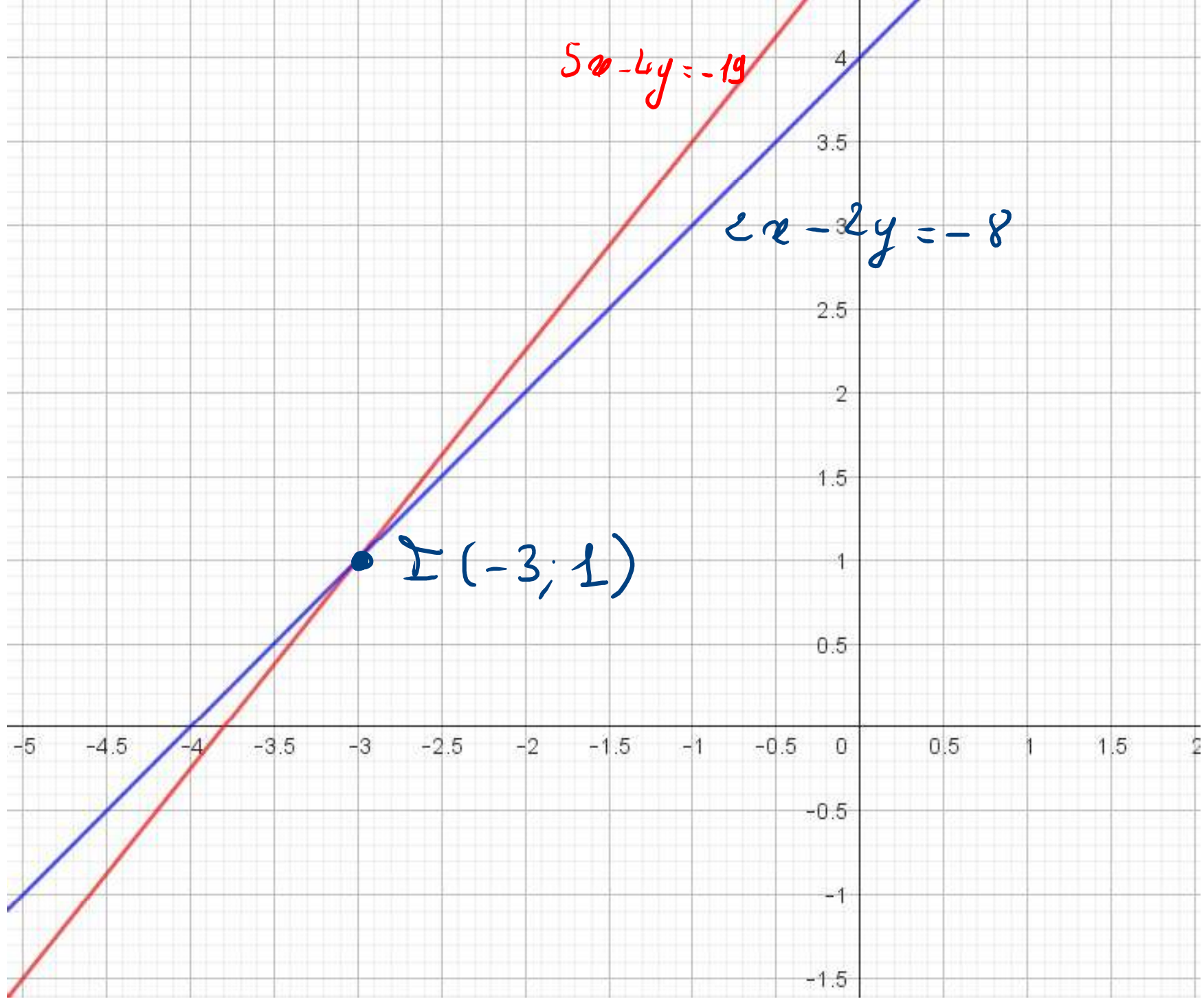
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 8y = -38 & (E_1) \\ 2y = 2 & (E_1 + E_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 8y = -38 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 8 \times 1 = -38 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = -30 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}}$$

$$5x - 4y = -19$$

$$2x - 2y = -8$$

I (-3; 1)



## Exercice 2

$$\begin{cases} 2x - 3y = 18 \\ -2x - 4y = 10 \end{cases} \text{ admet pour solutions } x = \boxed{3} \text{ et } y = \boxed{-4}.$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 18 \quad (E_1) \\ -2x - 4y = 10 \quad (E_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 18 \quad (E_1) \\ -7y = 28 \quad (E_1 + E_2) \end{cases}$$

Pas besoin  
de (x a)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 18 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \times (-4) = 18 \\ y = -4 \end{cases}$$

$+ 12$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

**SYSTEME\_EQUATIONS1**  
**SYSTEME\_EQUATIONS2**

# 1 Les vecteurs de l'espace

## Définition Vecteurs

Soient A et B deux points de l'espace, la transformation qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que ABM'M soit un parallélogramme s'appelle la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

Comme, dans le plan, les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{MM'}$  sont égaux et on dit également qu'ils sont deux représentants d'un vecteur unique noté  $\vec{u}$ .

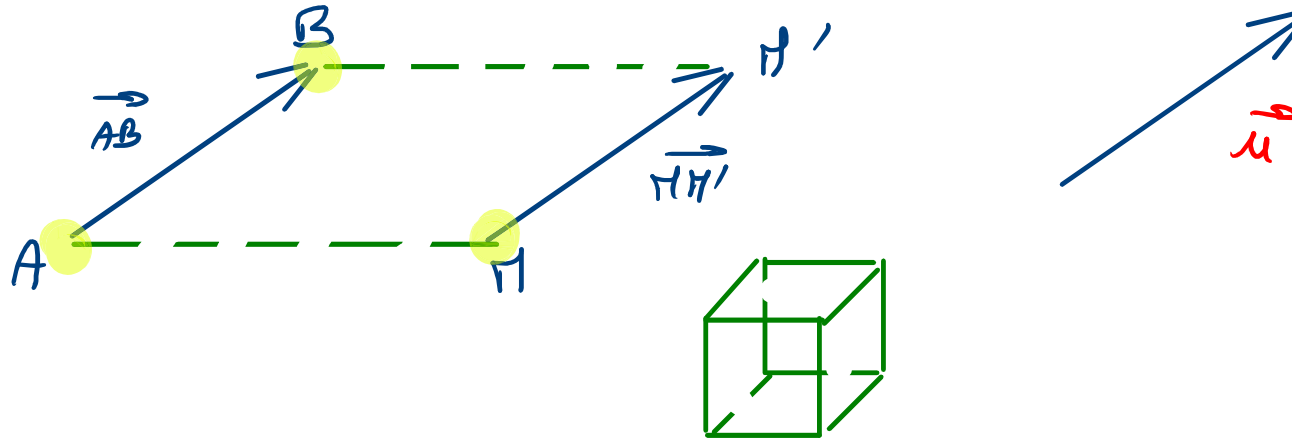
**GEOGEBRA 3D: VECTEURS\_ESPACE1**

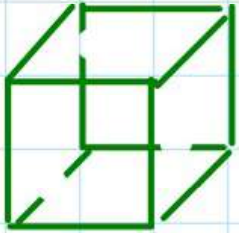
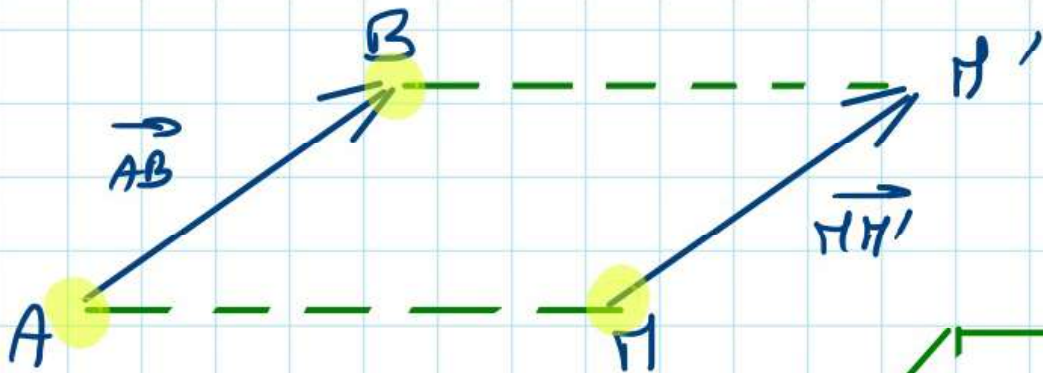
# 1 Les vecteurs de l'espace

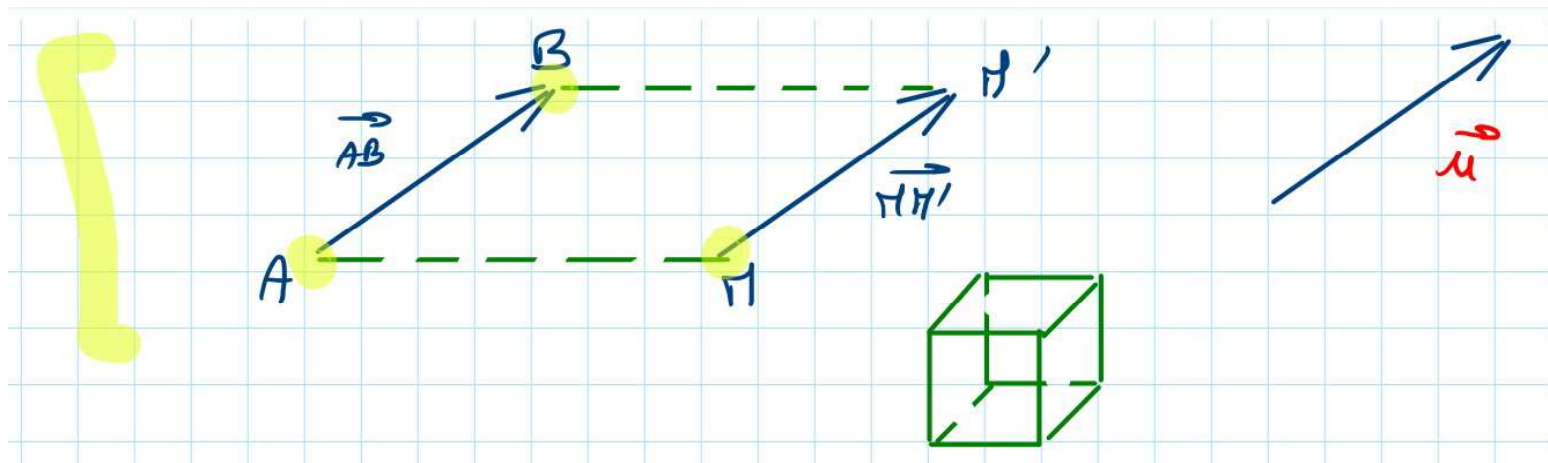
## Définition Vecteurs

Soient A et B deux points de l'espace, la transformation qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que ABM'M soit un parallélogramme s'appelle la translation de vecteur  $\overline{AB}$ .

Comme, dans le plan, les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{MM'}$  sont égaux et on dit également qu'ils sont deux représentants d'un vecteur unique noté  $\vec{u}$ .







Propriété

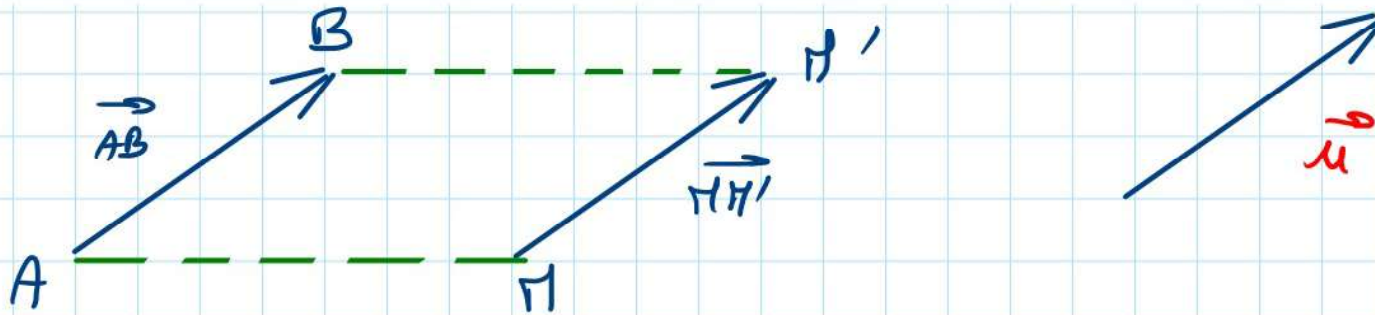
Combinaison linéaire

Étant donné trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace non colinéaires. (non parallèles)  
On dit que  $\vec{w}$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  s'il existe des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ .

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

Soient A et B deux points de l'espace, la transformation qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que ABM'M soit un parallélogramme s'appelle la **translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$** .

Comme, dans le plan, les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{MM'}$  sont égaux et on dit également qu'ils sont deux représentants d'un vecteur unique noté  $\vec{u}$ .



### Propriété

### Combinaison linéaire

Étant donné trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace non colinéaires. (non parallèles)  
On dit que  $\vec{w}$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  s'il existe des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ .

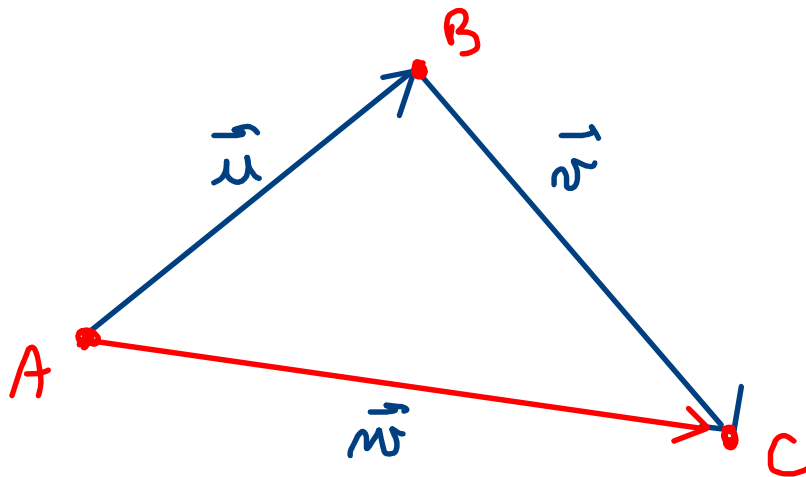
$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

## Propriété

## Combinaison linéaire

Étant donné trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace non colinéaires. (non parallèles)  
On dit que  $\vec{w}$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  s'il existe des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ .  $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

## Application de CHASLES

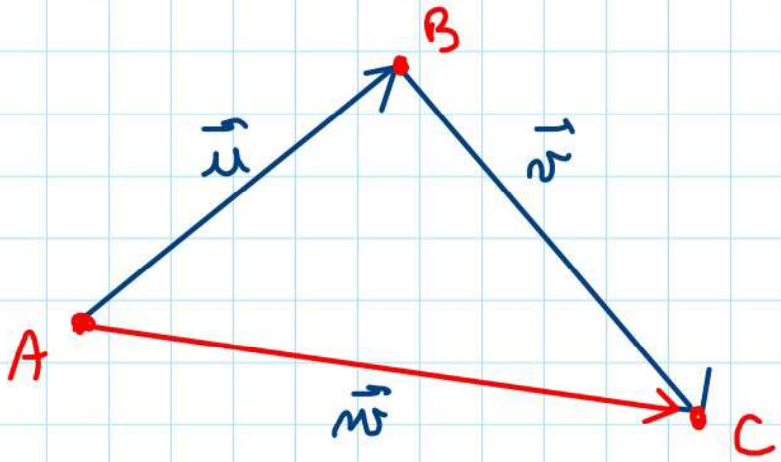


$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DC}$$

# Application de CHASLES



$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DC}$$

Exercice Trois points alignés I, O et U

$$\vec{IO} = -3 \vec{IU}$$

① Exprimer  $\vec{IU}$  en fonction de  $\vec{UO}$

$$\vec{IU} = -3 \vec{UO}$$

# Exercice 1 Trois points alignés $I, O, U$

$$\vec{IO} = -3 \vec{IU}$$

① Exprimer  $\vec{IU}$  en fonction de  $\vec{UO}$

$$\vec{IU} = \alpha \vec{UO}$$

$$\vec{OU} = -\vec{UO}$$

$$\vec{IO} = -3 \vec{IU}$$

$$\vec{IU} + \vec{UO} = -3 \vec{IU} + \vec{OU}$$

$$\vec{IU} = -3 \vec{IU} + \vec{OU}$$

$$+ 3 \vec{IU} \quad + 3 \vec{IU}$$

$$4 \vec{IU} = \vec{OU}$$

$$\vec{IU} = -\frac{1}{4} \vec{UO}$$

② Exprimer  $\overrightarrow{OU}$  en fonction de  $\overrightarrow{OI}$

$$\overrightarrow{IO} = -3 \overrightarrow{IU}$$

$$-\overrightarrow{OI} = -3 (\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OU})$$

$$-\overrightarrow{OI} = -3 \overrightarrow{IO} - 3 \overrightarrow{OU}$$

$$+3 \overrightarrow{OU}$$

$$+ \overrightarrow{OI}$$

$$+ \overrightarrow{OI}$$

$$+3 \overrightarrow{OU}$$

$$3 \overrightarrow{OU} = -3 \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{IO}$$

$$3 \overrightarrow{OU} = -4 \overrightarrow{IO}$$

$$3 \overrightarrow{OU} = 4 \overrightarrow{OI}$$

$$\overrightarrow{OU} = \frac{4}{3} \overrightarrow{OI}$$

$$\overrightarrow{OU} = \alpha \overrightarrow{OI}$$

## Appliquer la relation de CHASLES (a)

Rappel: une droite est générée par un vecteur appelé vecteur directeur.

**CHRONOMETRE**

### Exercice

On considère trois points I, O et U tels que:  $\overrightarrow{IO} = -3\overrightarrow{IU}$ .

Compléter les égalités suivantes par des fractions ou des entiers:

1)  $\overrightarrow{IU} = \boxed{-1/4}$  Sol  $\overrightarrow{UO}$

2)  $\overrightarrow{OU} = \boxed{4/3}$  Sol  $\overrightarrow{OI}$

# Appliquer la relation de CHASLES (a)

Rappel: une droite est générée par un vecteur appelé vecteur directeur.

**CHRONOMETRE**

## Exercice

On considère trois points I, O et U tels que:  $\vec{IO} = -3\vec{IU}$ .

Compléter les égalités suivantes par des fractions ou des entiers:

1)  $\vec{IU} = \boxed{-1/4}$  Sol  $\vec{UO}$

2)  $\vec{OU} = \boxed{4/3}$  Sol  $\vec{OI}$

## Exercice 1: LA RELATION DE CHASLES

On considère trois points D, S et K tels que:  $\overrightarrow{DS} = 7\overrightarrow{DK}$ .

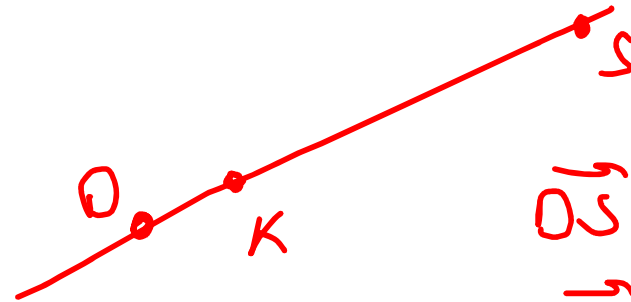
~~Soit D un point quelconque du plan distincts des points D, S et K tels que:~~

Compléter les égalités suivantes par des fractions ou des entiers:

①  $\overrightarrow{DS} = ? \overrightarrow{SK}$

②  $\overrightarrow{DK} = ? \overrightarrow{KS}$

③  $\overrightarrow{SK} = ? \overrightarrow{SD}$



$$\overrightarrow{DS} = 7\overrightarrow{DK}$$

$$\overrightarrow{DS} = ? \overrightarrow{SK}$$

( N.B. : les points D, S et K sont donc alignés  
( colinéarité )

$$\vec{DS} = 7\vec{DK}$$

$$\vec{DS} = ? \vec{SK}$$

$$\textcircled{1} \quad \vec{DS} = 7(\vec{DS} + \vec{SK})$$

$$\vec{DS} = 7\vec{DS} + 7\vec{SK}$$

$$\vec{DS} - 7\vec{DS} = 7\vec{SK}$$

$$-6\vec{DS} = 7\vec{SK}$$

$$\vec{DS} = -\frac{7}{6}\vec{SK}$$

$$a - 7a = -6a$$

$$-\frac{6a}{-6} = \frac{7}{-6}$$

on part de la relation  
donnée

$$\vec{DK} = \vec{DS} + \vec{SK}$$

Relation de CHASLES

$$\textcircled{1} \quad \vec{D_S} = 7 (\vec{D_S} + \vec{S_K})$$

$$\vec{D_S} = 7 \vec{D_S} + 7 \vec{S_K}$$

$$\vec{D_S} - 7 \vec{D_S} = 7 \vec{S_K}$$

$$-6 \vec{D_S} = 7 \vec{S_K}$$

$$\vec{D_S} = -\frac{7}{6} \vec{S_K}$$

$$m - 7m = -6m$$

$$-\frac{6m}{-6} = \frac{7}{-6}$$

on part de la relation  
donnée

$$\vec{D_K} = \vec{D_S} + \vec{S_K}$$

Relation de CHASLES

$$\textcircled{2} \quad \vec{D_K} = ? \quad \vec{K_S}$$

$$\vec{D_S} = 7 \vec{D_K}$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{DK} = ? \quad \vec{KS}$$

$$\vec{DS} = 7 \vec{DK}$$

$$\begin{aligned} \vec{DK} + \vec{KS} &= 7 \vec{DK} \\ \vec{DK} + \vec{KS} - 7 \vec{DK} &= \vec{0} \\ \vec{DK} - 7 \vec{DK} &= -\vec{KS} \\ -6 \vec{DK} &= -1 \vec{KS} \end{aligned}$$

$$\left( \times \frac{1}{-6} \right)$$
$$\vec{DK} = \frac{1}{6} \vec{KS}$$

$$\frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$$

$$\textcircled{2} \overrightarrow{DS} = 7\overrightarrow{DK}$$

$$\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KS} = 7\overrightarrow{DK}$$

$$\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KS} - 7\overrightarrow{DK} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{DK} - 7\overrightarrow{DK} = -\overrightarrow{KS}$$

$$-6\overrightarrow{DK} = -1\overrightarrow{KS}$$

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{6} \overrightarrow{KS}$$

$$\overrightarrow{DK} = ? \overrightarrow{KS}$$

$$\overrightarrow{SK} = ? \overrightarrow{SD}$$

$$\textcircled{3} \overrightarrow{DS} = 7\overrightarrow{DK}$$

$$\overrightarrow{SK} = ? \overrightarrow{SD}$$

$$\overrightarrow{DS} = 7(\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KS})$$

$$\overrightarrow{DS} = 7\overrightarrow{DK} + 7\overrightarrow{KS}$$

$$-6\overrightarrow{DK} = 7\overrightarrow{KS}$$

$$\overrightarrow{KS} = -\frac{6}{7}\overrightarrow{DK}$$

$$\overrightarrow{SK} = \frac{6}{7}\overrightarrow{SD}$$

$$-\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{SD}$$

On considère trois points D , S et K tels que:  $\overrightarrow{DS} = 7\overrightarrow{DK}$ .

Soit D un point quelconque du plan distincts des points D , S et K tels que: .

Compléter les égalités suivantes par des fractions ou des entiers:

1)  $\overrightarrow{DS} =$    $\overrightarrow{SK}$

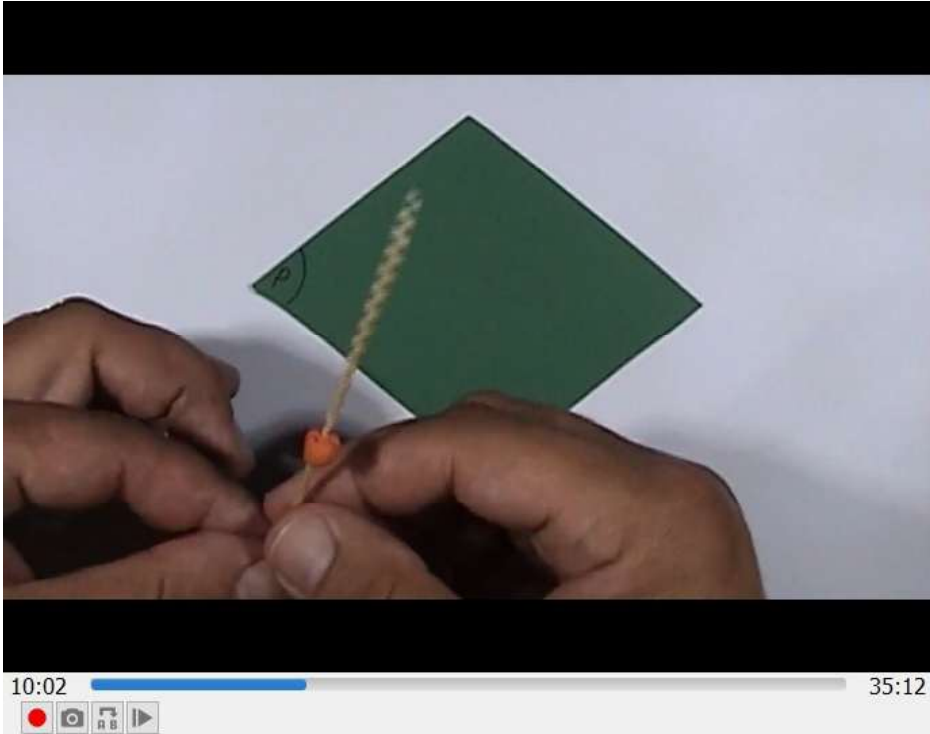
2)  $\overrightarrow{DK} =$    $\overrightarrow{KS}$

3)  $\overrightarrow{SK} =$    $\overrightarrow{SD}$

**CHASLES\_BASES\_DROITE1**

**CHASLES\_BASES\_DROITE2**

## 2 Positions relatives de droites et de plans dans l'espace



Voilà vidéo

Reprendre à 7mn

<https://www.youtube.com/watch?v=dW4Tt4ZiTb0&t>  
(10 à 22 mn)

<https://www.youtube.com/watch?v=dW4Tt4ZiTb0&t=600s>

### 3 Décomposition de vecteurs dans l'espace

#### Définition Base

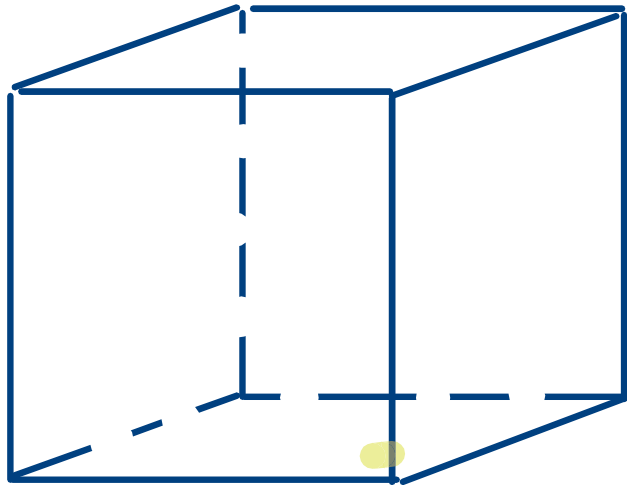
Trois vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  constituent une base de l'espace si et seulement si chacun de ces trois vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des deux autres.

→ On ne peut pas avoir

$$\vec{i} = \alpha \vec{j} + \beta \vec{k}$$

$$\vec{j} = \alpha' \vec{i} + \beta' \vec{k}$$

$$\vec{k} = \alpha'' \vec{i} + \beta'' \vec{j}$$

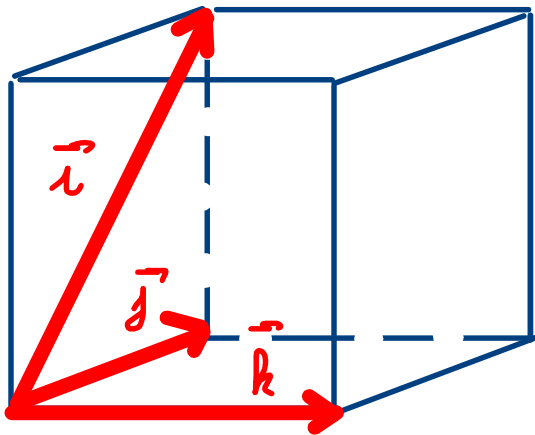


## Définition Base

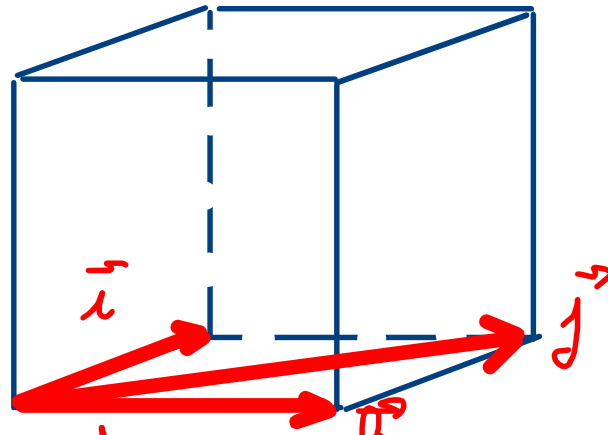
Trois vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  constituent une base de l'espace si et seulement si chacun de ces trois vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des deux autres.

→ On ne peut pas avoir  
Autrement dit les vecteurs  
 $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont non coplanaires

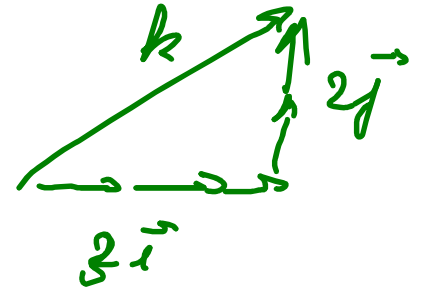
$$\begin{aligned}\vec{i} &= \alpha \vec{j} + \beta \vec{k} \\ \vec{j} &= \alpha' \vec{i} + \beta' \vec{k} \\ \vec{k} &= \alpha'' \vec{i} + \beta'' \vec{j}\end{aligned}$$



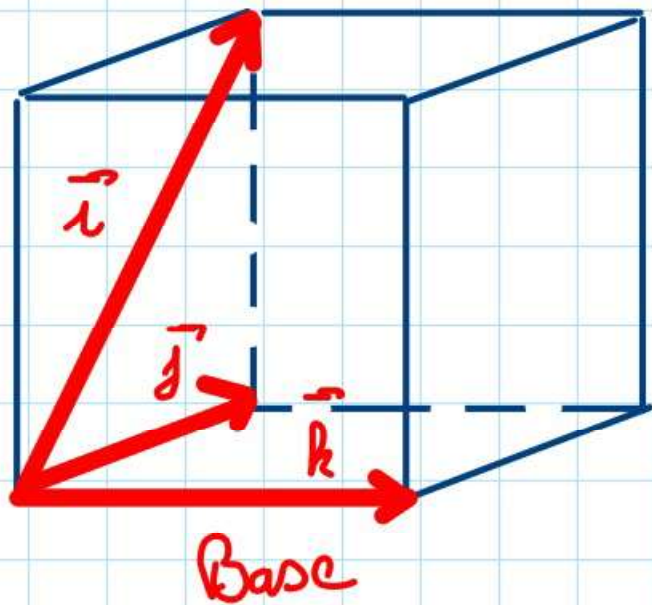
Base



Ce n'est pas une base car coplanaires.

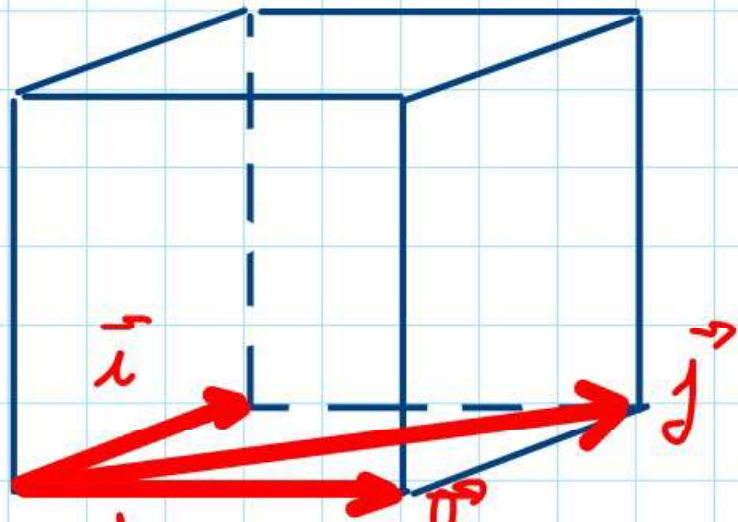


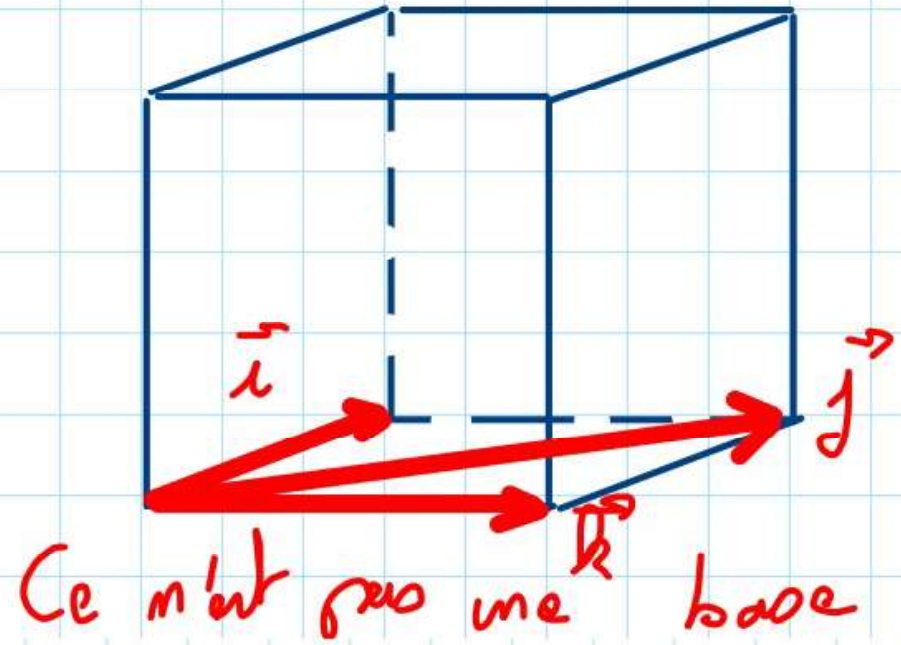
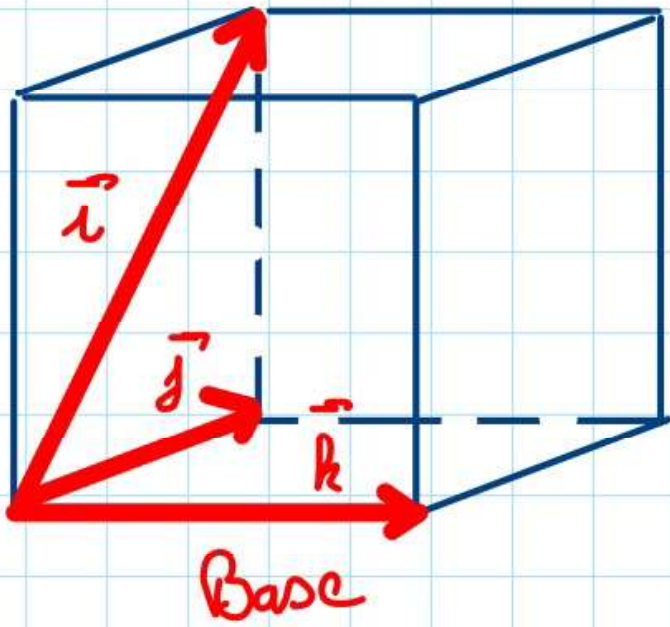
On ne peut pas avoir  
Autrement dit les vecteurs  
 $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont non coplanaires



$$\begin{aligned}\vec{i} &= \alpha \vec{j} + \beta \vec{k} \\ \vec{j} &= \alpha' \vec{i} + \beta' \vec{k} \\ \vec{k} &= \alpha'' \vec{i} + \beta'' \vec{j}\end{aligned}$$

Ce n'est pas une base



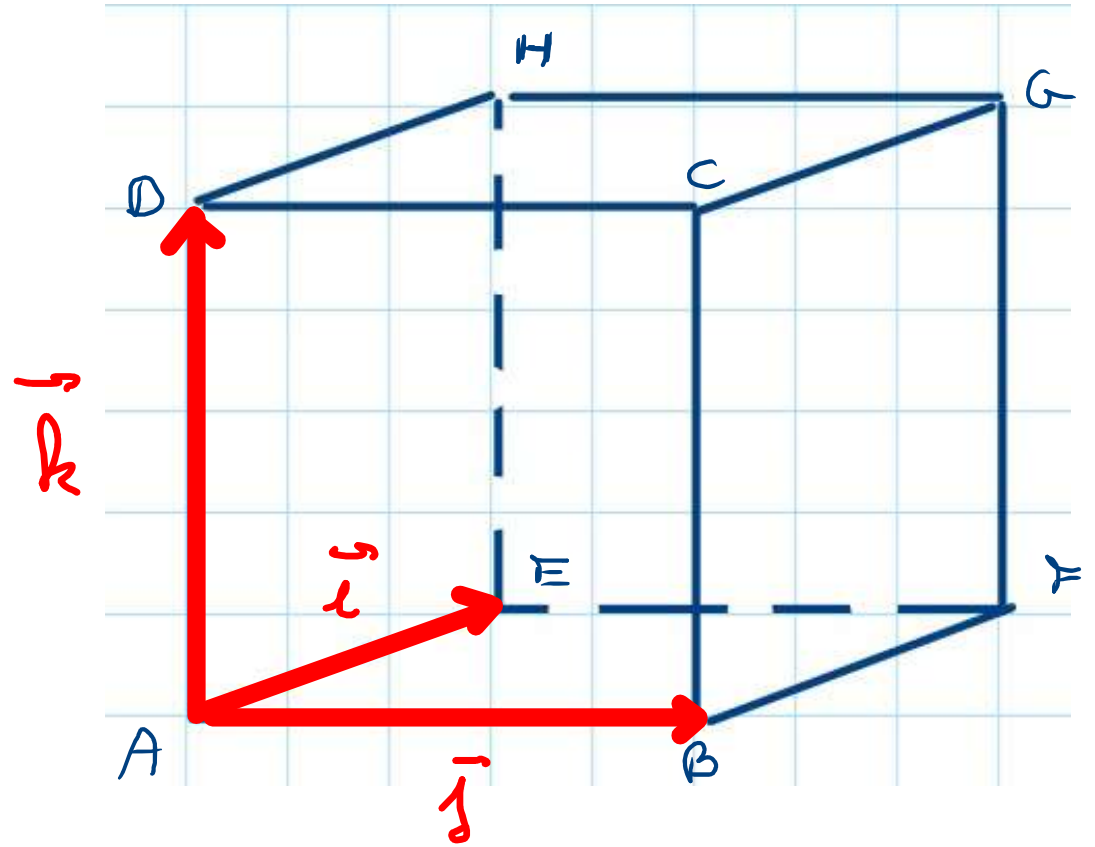


# Exercice

$$\vec{l} = \vec{AE}$$

$$\vec{j} = \vec{AB}$$

$$\vec{k} = \vec{AD}$$



# Exercice

$$\vec{i} = \vec{AE}$$

$$\vec{j} = \vec{AB}$$

$$\vec{k} = \vec{AD}$$

$$\vec{u} = \vec{CG} = \vec{AE}$$

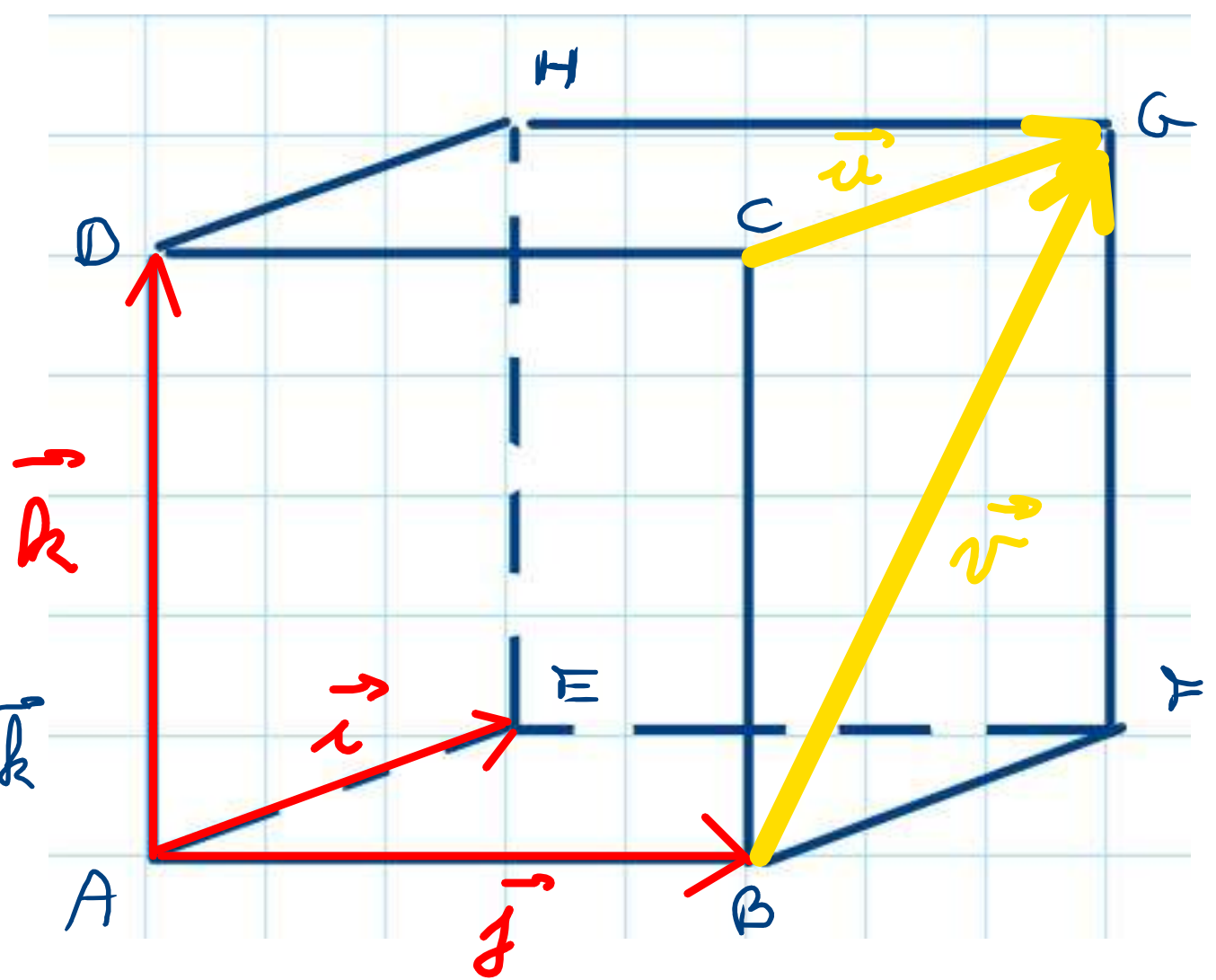
$$= \vec{i}$$

$$= 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{BF} + \vec{FG}$$

$$= \vec{i} + \vec{k}$$

$$= 1\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$$



## Définition Droite de l'espace

Une droite de l'espace est définie :

- soit par la donnée de deux points distincts,
- soit par la donnée d'un point et d'un vecteur non nul.

## Propriété Caractérisation d'une droite de l'espace

$(A; \vec{u})$

La droite passant par le point A et de vecteur directeur  $\vec{u}$  est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  soient colinéaires.

(DROITE\_VECTORIELLE2020.ggb)

## Définition Plan de l'espace

$(A; \vec{u}, \vec{v})$

Un plan de l'espace est défini :

- soit par trois points non alignés (ABC),
- soit par un point et deux vecteurs non colinéaires  $(A; \vec{u}, \vec{v})$ .

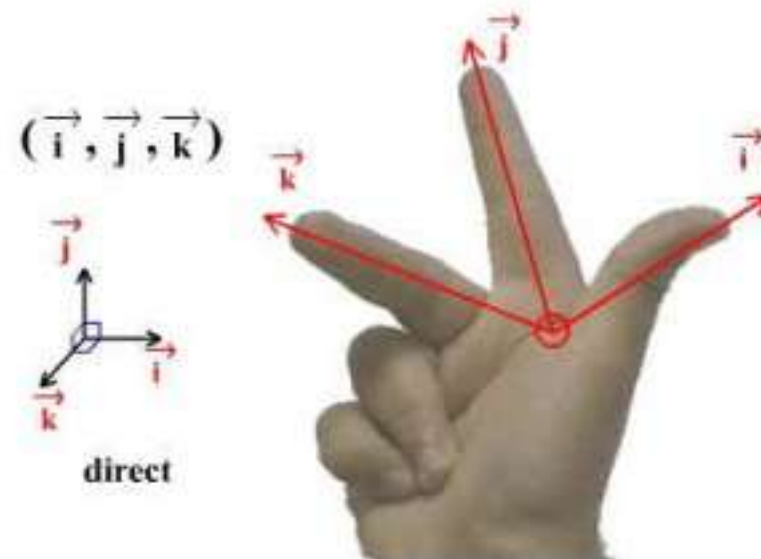
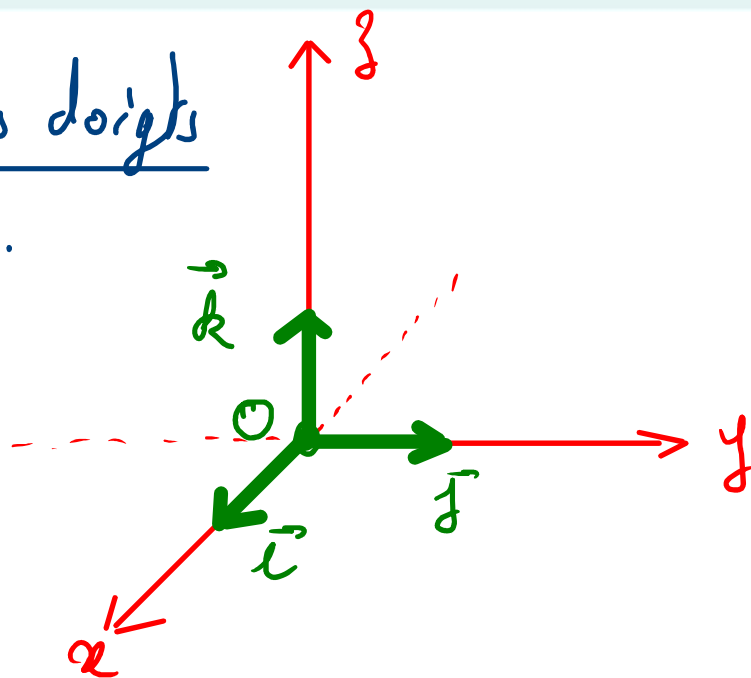
(PLAN\_VECTORIEL2020.ggb)

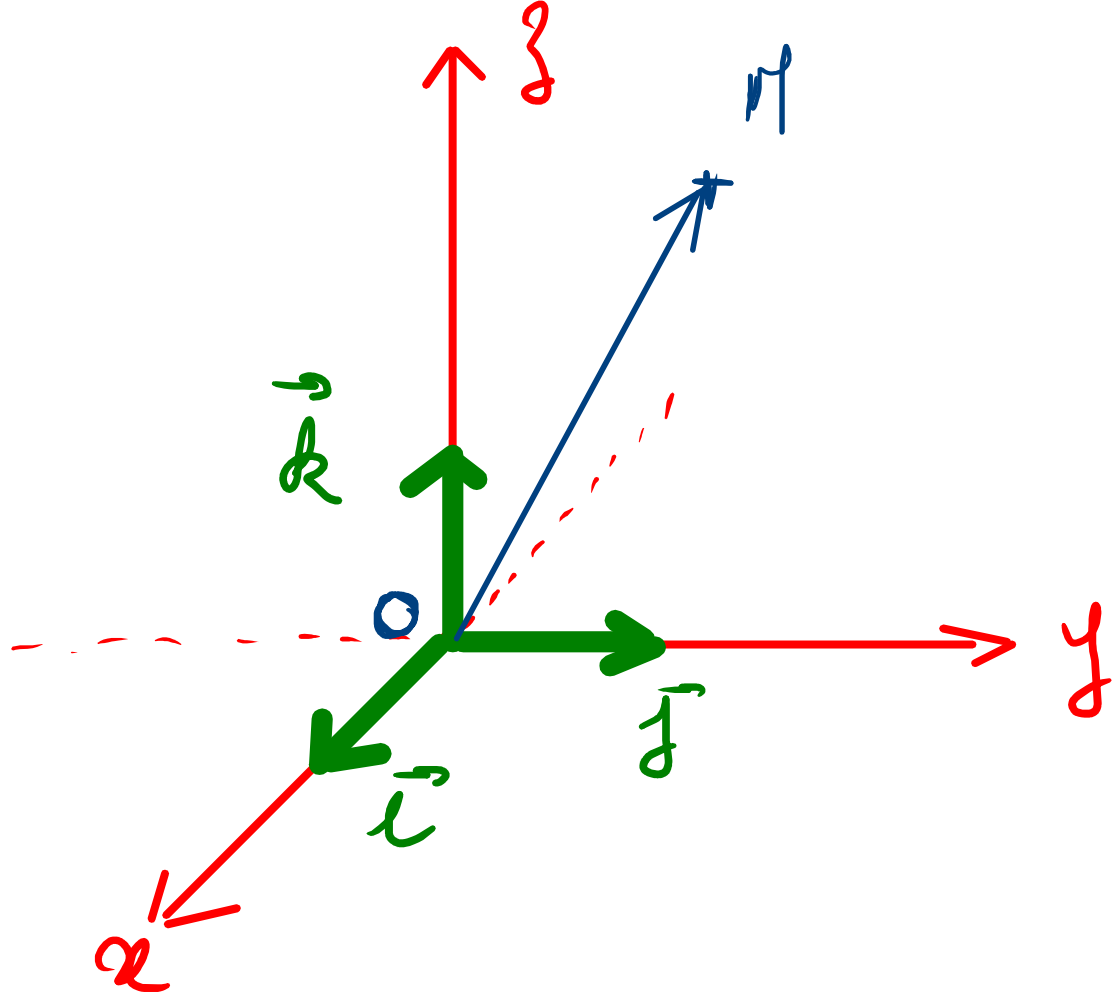
# 4 Répérage dans l'espace

## Propriété Repère

On appelle repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace le quadruplet où  $O$  est un point de l'espace appelé **origine** et où le triplet  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une **base** de l'espace.

Règle des trois doigts  
↳ direct.



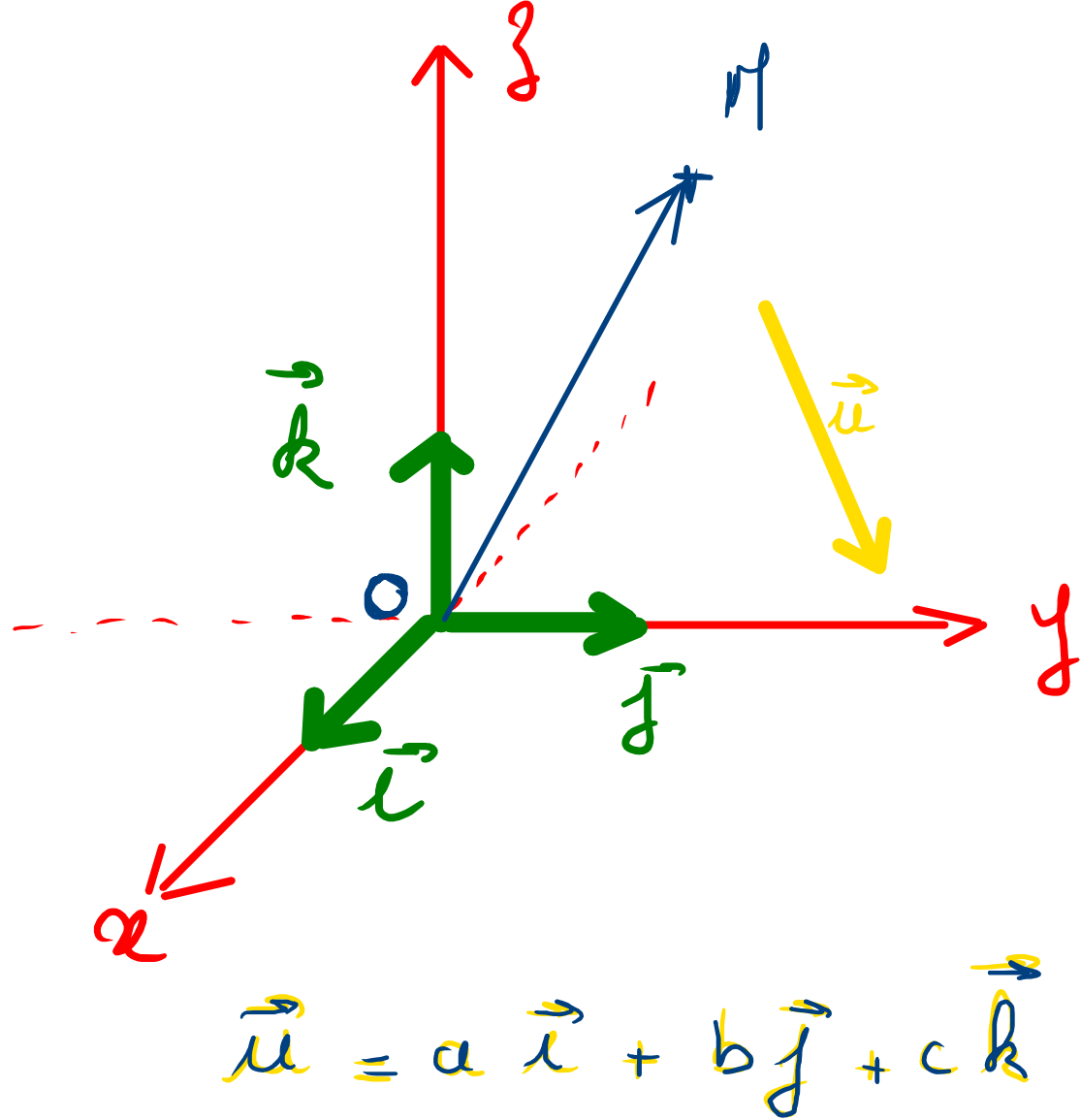


$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ : BASE

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ : REPERE  
Coordonnées de  $M$ :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Coordonnées  
de  $M$  ( $x; y; z$ )

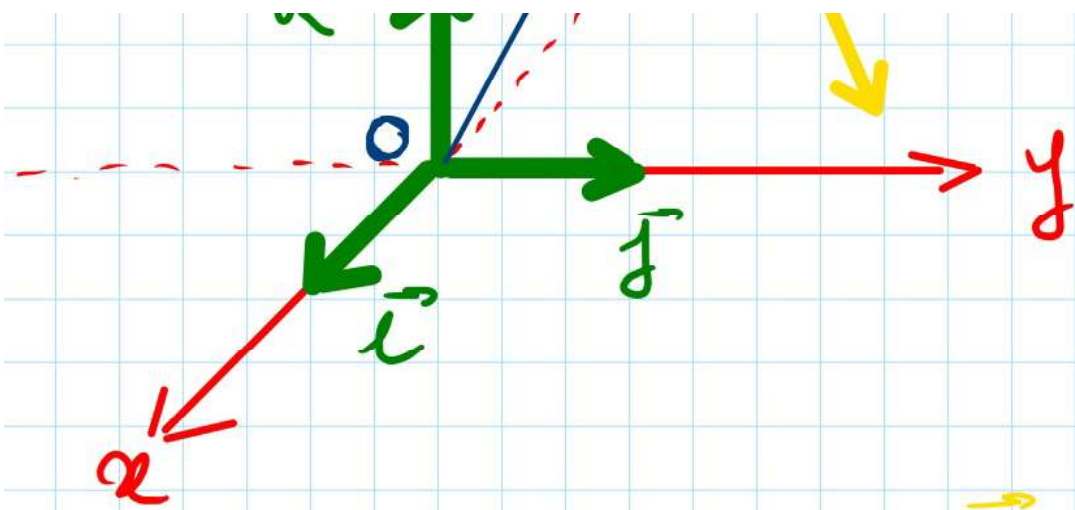


$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ : BASE

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ : REPERE

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Coordonnées  
de  $M$  ( $x; y; z$ )



$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

Coordonnées de

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Coordonnées

de  $M$  ( $x; y; z$ )

### Exercice 3: LA RELATION DE CHASLES

On considère un triangle QLH de l'espace.

Soit I le point défini par  $\overrightarrow{LI} = \frac{1}{8} \overrightarrow{LH}$

Compléter par des entiers relatifs ou des fractions les égalités suivantes:

1) Le vecteur  $\overrightarrow{QI}$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $\overrightarrow{QL}$  et  $\overrightarrow{QH}$  car :

$$\overrightarrow{QI} = \boxed{\phantom{000}} \overrightarrow{QL} + \boxed{\phantom{000}} \overrightarrow{QH}$$

2) Le vecteur  $\overrightarrow{QI}$  est aussi une combinaison linéaire des vecteurs  $\overrightarrow{HQ}$  et  $\overrightarrow{LH}$  car :

$$\overrightarrow{QI} = \boxed{\phantom{000}} \overrightarrow{HQ} + \boxed{\phantom{000}} \overrightarrow{LH}$$

### Exercice 3: LA RELATION DE CHASLES

On considère un triangle QLH de l'espace.

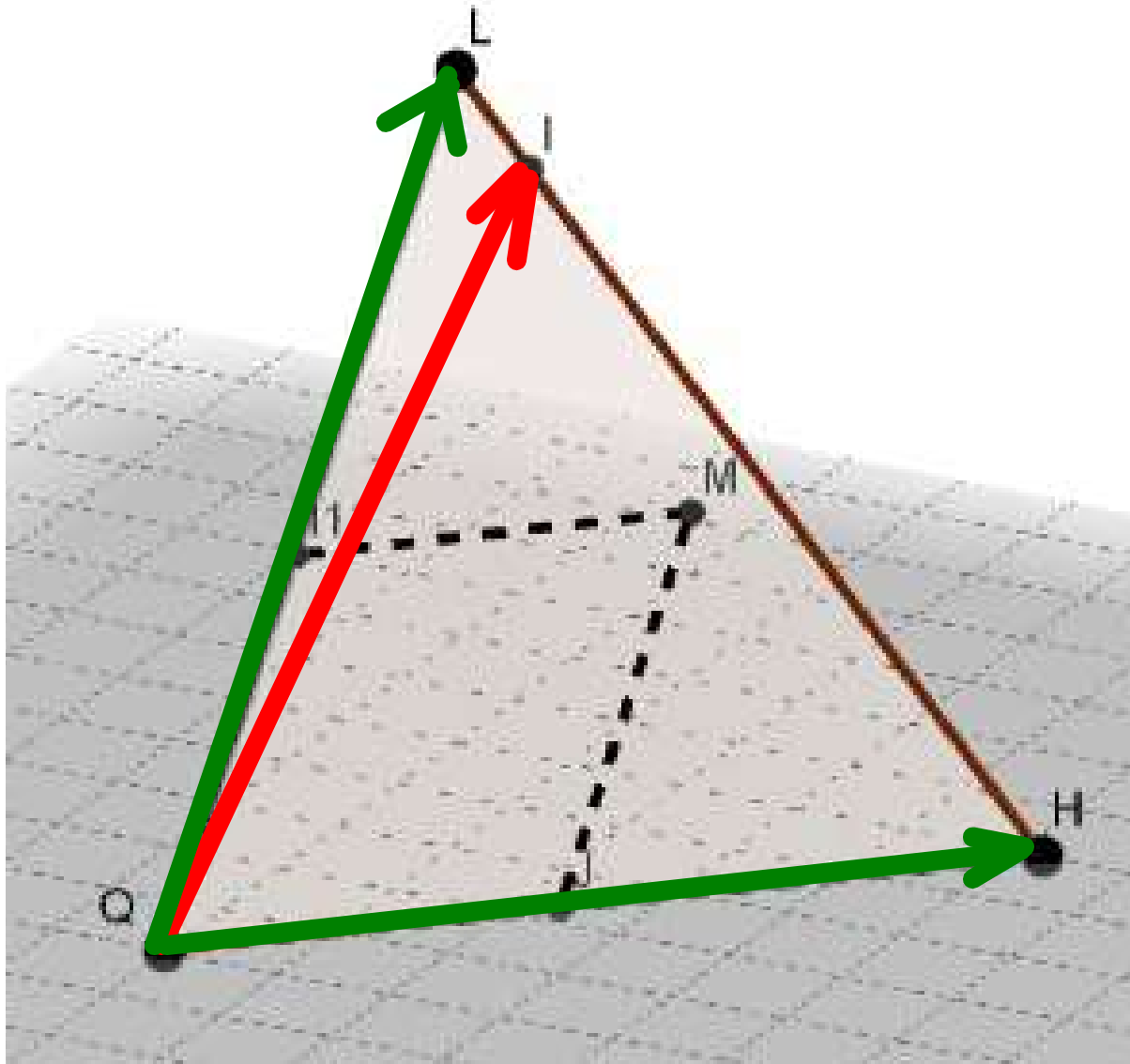
Soit I le point défini par  $\overrightarrow{LI} = \frac{1}{8}\overrightarrow{LH}$

Compléter par des entiers relatifs ou des fractions les égalités suivantes:

Le vecteur  $\overrightarrow{QI}$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $\overrightarrow{QL}$  et  $\overrightarrow{QH}$  car :

$$\overrightarrow{QI} = \boxed{\phantom{0}} \overrightarrow{QL} + \boxed{\phantom{0}} \overrightarrow{QH}$$

# COMBINAISON\_LINEAIRE\_EX1.ggb



$$\vec{LI} = \frac{1}{8} \vec{LH}$$

$$\vec{QI} = \boxed{\phantom{000}} \vec{QL} + \boxed{\phantom{000}} \vec{QH}$$

$$\vec{LQ} + \vec{QI} = \frac{1}{8} (\vec{LQ} + \vec{QH})$$

$$\vec{QI} = \frac{1}{8} \vec{LQ} + \frac{1}{8} \vec{QH} - \vec{LQ}$$

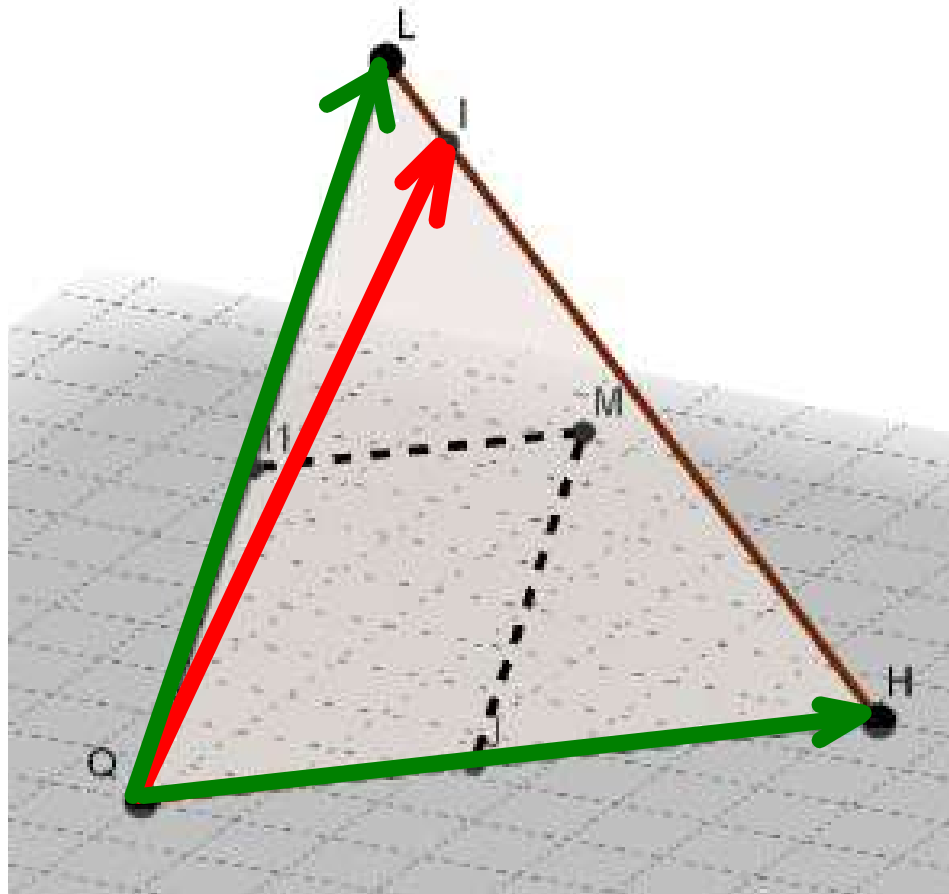
$$\vec{QI} = -\frac{1}{8} \vec{QL} + \frac{1}{8} \vec{QH} + \vec{QL}$$

$$\vec{QI} = \frac{7}{8} \vec{QL} + \frac{1}{8} \vec{QH}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{8} + 1 \\ & = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$\vec{QI} = \boxed{7/8} \vec{QL} + \boxed{1/8} \vec{QH}$$

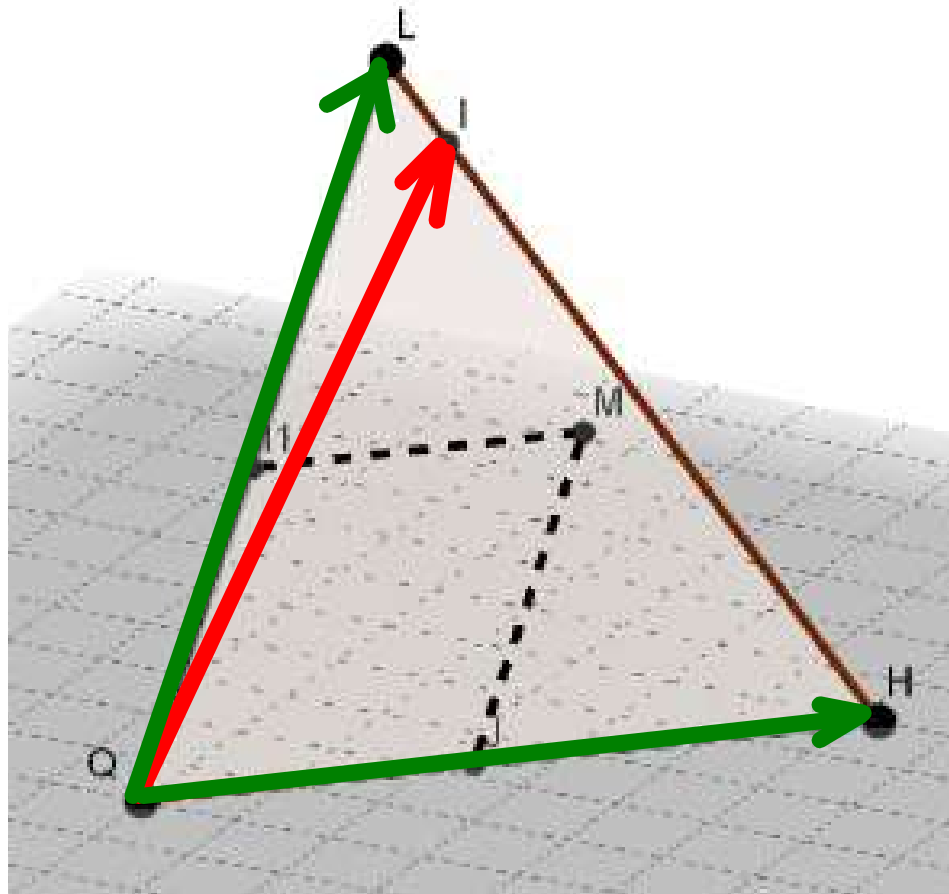
# COMBINAISON\_LINEAIRE\_EX1.ggb



**DECOMPOSITION\_VECTEUR0.html**  
**DECOMPOSITION\_VECTEUR0a.html**

**DECOMPOSITION\_VECTEUR1.html**  
**DECOMPOSITION\_VECTEUR1a.html**

# COMBINAISON\_LINEAIRE\_EX1.ggb



**DECOMPOSITION\_VECTEUR0.html**  
**DECOMPOSITION\_VECTEUR0a.html**

**DECOMPOSITION\_VECTEUR1.html**  
**DECOMPOSITION\_VECTEUR1a.html**

# Propriété

# Représentation paramétrique d'une droite

droite

$$A(2; 4; 4)$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Droite par A et dirigée par  $\vec{u}$ , (d)

$$\forall (x; y; z) \in (d) \Leftrightarrow \vec{AP} = t \vec{u}$$

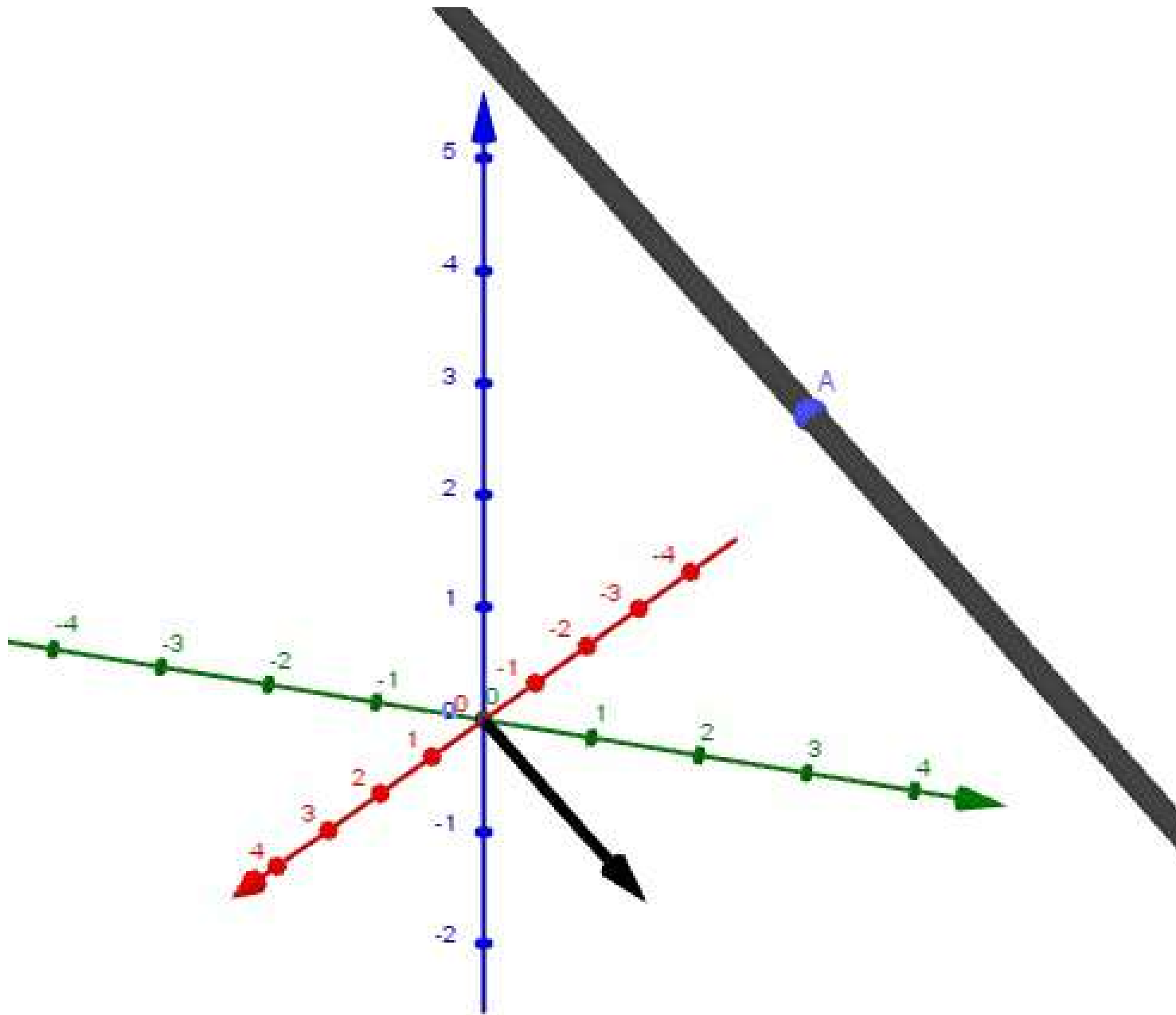
( $\vec{AP}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires)

$$\vec{AP} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z-4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = t \times 1 \\ y-4 = t \times 2 \\ z-4 = t \times (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

$\forall (2+t; 4+2t; 4-t)$   
 représentation paramétrique (1 paramètre qui est t)



droite

$$A(2; 4; 4)$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Droite par A et dirigée par  $\vec{u}$ , (d)

$$\forall (x; y; z) \in (d) \Leftrightarrow A\vec{M} = t \vec{u}$$

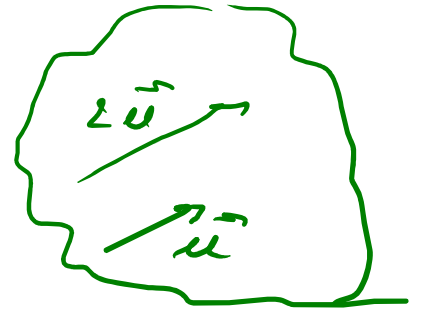
( $A\vec{M}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = t \times 1 \\ y - 4 = t \times 2 \\ z - 4 = t \times (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

$$\forall (2+t; 4+2t; 4-t)$$

Représentation paramétriques (1 paramètre qui est t)



## Propriété Représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , la droite passant par le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  admet comme représentation paramétrique le système  $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$  où  $k$  est un réel.

$k$  est appelé paramètre de la représentation

Applications Dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère deux droites

$(d_1)$  passant par  $A(3; -1; 0)$  et  
de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Applications Dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}; \vec{k})$

On considère deux droites

$(d_1)$  passant par  $A(9; -1; 0)$  et  
de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$(d_2)$  passant par  $B(0; 2; -1)$   
de vecteur directeur  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Représentations paramétriques

$(d_2)$  passant par  $B(0; 2; -1)$

de vecteur directeur  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

⑩ Représentation paramétrique

$$(d_1) : \begin{cases} x = 9 + t, \\ y = -1 + 2t \\ z = -3t \end{cases}$$

$$(d_2) : \begin{cases} x = r \\ y = 2 - r \\ z = -1 + r \end{cases}$$



② Appartenance à l'une des deux droites?

a)  $P(6, -7, 9)$  appartient-il à  $(d_1)$ ?

$$P \in (d_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 9 + t_0 \\ y_P = -1 + 2t_0 \\ z_P = -3t_0 \end{cases} \quad \text{avec } t_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 9 + t_0 \\ -7 = -1 + 2t_0 \\ 9 = -3t_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = -3 \\ t_0 = -3 \\ t_0 = -3 \end{cases}$$

...  
système compatible

Donc pour  $t_0 = -3$ , on atteint le point  $P$ .

Donc  $P \in (d_1)$

Donc pour  $t_0 = -3$ , on  
atteint le point P.

Donc  $P \in (d_1)$

$$(d_1): \begin{cases} x = 9 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3t \end{cases}$$

$$(d_2): \begin{cases} x = r \\ y = 2 - r \\ z = -1 + r \end{cases}$$

b)  $P(6; -7; 9)$  appartient-il à  $(d_2)$  ?

$$P \in (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = r_0 \\ y_P = 2 - r_0 \\ z_P = -1 + r_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = r_0 \\ -7 = 2 - r_0 \\ 9 = -1 + r_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_0 = 6 \\ r_0 = 9 \\ r_0 = 10 \end{cases}$$

Le système est INCOMPATIBLE  
donc  $P \notin (d_2)$

# Application du cours

## REPRESENTATION\_PARAMETRIQUE1 REPRESENTATION\_PARAMETRIQUE2a REPRESENTATION\_PARAMETRIQUE2b

Soit (d) la droite passant par le point A de coordonnées A(1 ; -2 ; 2) et de vecteur directeur :  $\vec{u}$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La droite (d) admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x_P = 1 + 3t = 1 - 3 \times 3 = -8 \\ y_P = -2 + (-2)t = -2 - 2 \times 3 = -4 \\ z_P = 2 + 3t \end{cases}$$

Le point P de coordonnées P(-8 ; -4 ; 11) appartient à la droite (d).  
paramètre t = 3

$$11 = 2 + 3t$$

$$\begin{cases} 9 = 3t \\ t = 3 \end{cases}$$

$$A(x_A; y_A; z_A)$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_A + t u_x \\ y = y_A + t u_y \\ z = z_A + t u_z \end{cases}$$

P ∈ (d)

$$(d_1): \begin{cases} x = 9 + t = x_c \\ y = -1 + 2t = y_c \\ z = -3t = z_c \end{cases}$$

$$(d_2): \begin{cases} x = r = x_c \\ y = 2 - r = y_c \\ z = -1 + r = z_c \end{cases}$$

② Intersection ?

Existe-t-il un point d'intersection ?  
de  $(d_1)$  et  $(d_2)$  ?

$(x_c, y_c, z_c)$  existe  $\Leftrightarrow$

$x_c, y_c, z_c$  satisfient les  
deux systèmes

$$\begin{cases} 9 + t = r \\ -1 + 2t = 2 - r \\ -3t = -1 + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -r + t = -9 \\ r + 2t = 3 \\ -r - 3t = -1 \end{cases}$$

Trois équations  
à deux inconnues

$$\begin{cases} 9 + t = r \\ -1 + 2t = 2 - r \\ -3t = -1 + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -r + t = -9 \\ r + 2t = 3 \\ -r - 3t = -1 \end{cases}$$

Trois équations  
à deux inconnues

Méthode On va extraire deux équations pour obtenir un système de 2 équations à 2 inconnues et si solutions ( $r$  et  $t$ ) on utilise la dernière équation pour **VALIDER**  $r$  et  $t$  (compatibilité)

$$(S) \begin{cases} -r + t = -9 \\ r + 2t = 3 \end{cases}$$

Méthode On va extraire deux équations pour obtenir un système de 2 équations à 2 inconnues et si solutions ( $r$  et  $t$ ) on utilise la dernière équation pour  $\checkmark$  VALIDER  $r$  et  $t$  (compatibilité)

$$(S) \begin{cases} -r + t = -9 & (E_1) \\ r + 2t = 3 & (E_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -r + t = -9 & (E_1) \\ 3t = -6 & (E_1) + (E_2) \end{cases}$$

$$(-r - 3t = -1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -r + t = -9 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -r + (-2) = -9 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 7 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$-r - 3t = -1 \Rightarrow -7 - 3 \times (-2) = -1 \Rightarrow -1 = -1$$

$$(S) \begin{cases} -x + t = -9 & (E_1) \\ x + 2t = 3 & (E_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + t = -9 & (E_1) \\ 3t = -6 & (E_1) + (E_2) \end{cases}$$

$$(-x - 3t = -1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + t = -9 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + (-2) = -9 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$-x - 3t = -1 \Rightarrow -7 - 3 \times (-2) = -1 \Rightarrow -1 = -1$$

Système COMPATIBLE

On donc bien une intersection

$$(d_1): \begin{cases} x = 9 + t = 7 \\ y = -1 + 2t = -5 \\ z = -3t = 6 \end{cases}$$

$$(d_2): \begin{cases} x = x = 7 \\ y = 2 - x = -5 \\ z = -1 + x = 6 \end{cases}$$

qui est  $\subset (7; -5; 6)$