Fonctions trigonométriques

Propriétés

Bloc 1 Dérivées usuelles

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

Bloc 2 Dérivées de fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Alors :

$$(\sin(u(x)))' = u'(x)\cos(u(x))$$

$$(\cos(u(x)))' = -u'(x)\sin(u(x))$$

Bloc 3 Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

Bloc 4 Parité

Pour tout réel x :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

La fonction cosinus est donc **paire**.

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

La fonction sinus est donc **impaire**.

Valeurs remarquables

Bloc 5 Tableau des valeurs usuelles

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Équations trigonométriques

Bloc 6 Équation avec cosinus

Pour tout réel a :

$$\cos(x) = \cos(a)$$

équivaut à :

$$x = a + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad x = -a + 2k\pi$$

avec :

$$k \in \mathbb{Z}$$

Bloc 7 Équation avec sinus

Pour tout réel a :

$$\sin(x) = \sin(a)$$

équivaut à :

$$x = a + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad x = \pi - a + 2k\pi$$

avec :

$$k \in \mathbb{Z}$$

Inéquations trigonométriques

Bloc 8 Inéquation avec cosinus

Soit $a \in [0; \pi]$.

Les solutions de :

$$\cos(x) \leq \cos(a)$$

sont :

$$a + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - a + 2k\pi$$

avec :

$$k \in \mathbb{Z}$$

Bloc 9 Inéquation avec sinus

Soit $a \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Les solutions de :

$$\sin(x) \leq \sin(a)$$

sont :

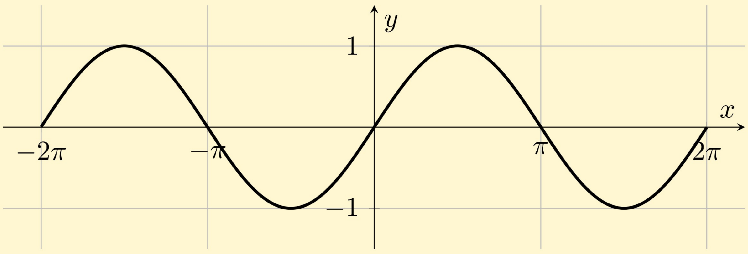
$$-\pi - a + 2k\pi \leq x \leq a + 2k\pi$$

avec :

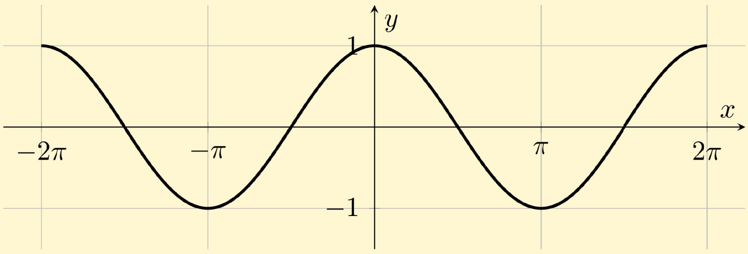
$$k \in \mathbb{Z}$$

Représentations graphiques

Bloc 10 Courbe du sinus



Bloc 11 Courbe du cosinus



À retenir

Synthèse

—
$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

—
$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

—
$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

—
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

—
$$\cos(-x) = \cos(x)$$

—
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

—
$$\cos(x) = \cos(a)$$

équivaut à :

$$x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -a + 2k\pi$$

—
$$\sin(x) = \sin(a)$$

équivaut à :

$$x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - a + 2k\pi$$

Exemples et applications

Exemple 1 Calcul d'une dérivée

Soit :

$$f(x) = \sin(3x+1)$$

On pose :

$$u(x) = 3x+1$$

Alors :

$$u'(x) = 3$$

Or :

$$(\sin(u(x)))' = u'(x)\cos(u(x))$$

Donc :

$$f'(x) = 3\cos(3x+1)$$

Ainsi :

$$\boxed{f'(x) = 3\cos(3x+1)}$$

Exemple 2 Calcul d'une dérivée avec cosinus

Soit :

$$g(x) = \cos(5x-2)$$

On pose :

$$u(x) = 5x-2$$

Alors :

$$u'(x) = 5$$

Or :

$$(\cos(u(x)))' = -u'(x)\sin(u(x))$$

Donc :

$$g'(x) = -5\sin(5x-2)$$

Ainsi :

$$\boxed{g'(x) = -5\sin(5x-2)}$$

Exemple 3 Résoudre une équation avec cosinus

Résoudre :

$$\cos(x) = \frac{1}{2}$$

Or :

$$\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou :

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

avec :

$$k \in \mathbb{Z}$$

Exemple 4 Résoudre une équation avec sinus

Résoudre :

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou :

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

avec :

$$k \in \mathbb{Z}$$

Exemple 5 Résoudre une inéquation avec cosinus

Résoudre :

$$\cos(x) \leq \frac{1}{2}$$

Or :

$$\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Les solutions sont donc :

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

avec :

$$k \in \mathbb{Z}$$

Exemple 6 Résoudre une inéquation avec sinus

Résoudre :

$$\sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Les solutions sont :

$$-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

avec :

$$k \in \mathbb{Z}$$

Exemple 7 Utiliser la périodicité

Calculer :

$$\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right)$$

Or :

$$\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

Comme le sinus est périodique :

$$\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Donc :

$$\boxed{\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}}$$

Exemple 8 Étude de variations

Soit :

$$f(x) = 2\sin(x) - x$$

On dérive :

$$f'(x) = 2\cos(x) - 1$$

On cherche :

$$f'(x) = 0$$

$$2\cos(x) - 1 = 0$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Sur l'intervalle $[0; \pi]$:

$$x = \frac{\pi}{3}$$

On peut alors étudier les variations de f sur cet intervalle.