

Variable aléatoire discrète et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Rappel de cours

1. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X) = \mu$ et de variance $V(X) = V$.

Pour tout réel strictement positif a ,

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{V}{a^2}.$$

Autrement dit :

$$P(X \notin]\mu - a; \mu + a]) \leq \frac{V}{a^2}.$$

2. Inégalité de concentration

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un échantillon de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même espérance μ et la même variance V .

On note :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

la moyenne de l'échantillon.

Alors, pour tout réel strictement positif a ,

$$P(|M_n - \mu| \geq a) \leq \frac{V}{na^2}.$$

3. Loi (faible) des grands nombres

Pour tout réel strictement positif a ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq a) = 0.$$

Cela signifie que lorsque le nombre d'observations devient très grand, la moyenne observée M_n se rapproche de l'espérance μ .

Exemple de méthode

On suppose qu'une variable aléatoire X possède :

$$E(X) = 1,20 \quad \text{et} \quad V(X) = 0,80.$$

On réalise un échantillon de taille :

$$n = 50$$

et on note :

$$M = \frac{X_1 + \dots + X_{50}}{50}.$$

On cherche à majorer :

$$P(|M - 1,20| \geq 0,50).$$

Étape 1 : appliquer l'inégalité de concentration

$$P(|M - \mu| \geq a) \leq \frac{V}{na^2}.$$

Ici :

$$\mu = 1,20, \quad V = 0,80, \quad n = 50, \quad a = 0,50.$$

Donc :

$$P(|M - 1,20| \geq 0,50) \leq \frac{0,80}{50 \times 0,50^2}.$$

Étape 2 : effectuer les calculs

$$0,50^2 = 0,25$$

et

$$50 \times 0,25 = 12,5.$$

Ainsi :

$$\frac{0,80}{12,5} = 0,064.$$

Conclusion :

$$P(|M - 1,20| \geq 0,50) \leq 0,064.$$

La probabilité que la moyenne observée s'écarte d'au moins 0,50 de l'espérance est donc inférieure ou égale à 0,064.