Fonction exponentielle

Définition et notation

Bloc 1 Définition de la fonction exponentielle

Il existe une unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f' = f$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et se note :

$$\exp$$

Ainsi :

$$\exp(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \exp'(x) = \exp(x)$$

Bloc 2 Nouvelle notation

On pose :

$$e = \exp(1)$$

Pour tout réel x, on note :

$$\exp(x) = e^x$$

On a :

$$e^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad e^1 = e$$

On retient :

$$e \simeq 2{,}72$$

Propriétés algébriques

Bloc 3 Somme et produit

Pour tous réels a et b :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

C'est la propriété fondamentale de calcul avec les exponentielles.

Bloc 4 Opposé, quotient et puissance

Pour tout réel a :

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

Pour tous réels a et b :

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

Pour tout entier naturel n :

$$(e^a)^n = e^{na}$$

Bloc 5 Simplifier une expression exponentielle

On utilise les mêmes règles que pour les puissances :

$$e^3 \times e^4 = e^{3+4} = e^7$$

$$\frac{e^5}{e^2} = e^{5-2} = e^3$$

$$(e^{2x})^3 = e^{6x}$$

Propriétés analytiques

Bloc 6 Signe de l'exponentielle

Pour tout réel x :

$$\boxed{e^x > 0}$$

La fonction exponentielle ne s'annule jamais.

Bloc 7 Variations

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
En effet :

$$(e^x)' = e^x$$

et :

$$e^x > 0$$

donc :

$$(e^x)' > 0$$

Ainsi :

$$a < b \iff e^a < e^b$$

et :

$$e^a = e^b \iff a = b$$

Bloc 8 Dérivée d'une exponentielle affine

Si :

$$f(x) = e^{ax+b}$$

alors :

$$f'(x) = ae^{ax+b}$$

Exemples :

$$(e^{2x+1})' = 2e^{2x+1}$$

$$(e^{-8x+2})' = -8e^{-8x+2}$$

Équations et inéquations

Bloc 9 Équations avec exponentielle

Pour résoudre une équation avec exponentielle, on utilise :

$$e^a = e^b \iff a = b$$

Exemple :

$$e^{2x+1} = e^5$$

équivaut à :

$$2x + 1 = 5$$

donc :

$$x = 2$$

Bloc 10 Inéquations avec exponentielle

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante :

$$e^a < e^b \iff a < b$$

et :

$$e^a \leq e^b \iff a \leq b$$

Attention :

$$e^x > 0$$

donc une inéquation comme :

$$e^x < 0$$

n'a aucune solution.

Lien avec les suites géométriques

Bloc 11 Suite exponentielle

Soit $a \in \mathbb{R}$.
La suite définie par :

$$u(n) = e^{na}$$

est une suite géométrique de raison :

$$e^a$$

En effet :

$$u(n+1) = e^{(n+1)a} = e^{na+a} = e^{na}e^a = e^a u(n)$$

Bloc 12 Croissance exponentielle

Une suite géométrique de raison strictement positive peut s'écrire à l'aide de l'exponentielle.
Par exemple, si un capital augmente de 4% par an :

$$u(n) = 5000 \times 1{,}04^n$$

Comme :

$$1{,}04 \simeq e^{0{,}03922}$$

on peut écrire :

$$u(n) \simeq 5000e^{0{,}03922n}$$

Représentation graphique

Bloc 13 Courbe de la fonction exponentielle

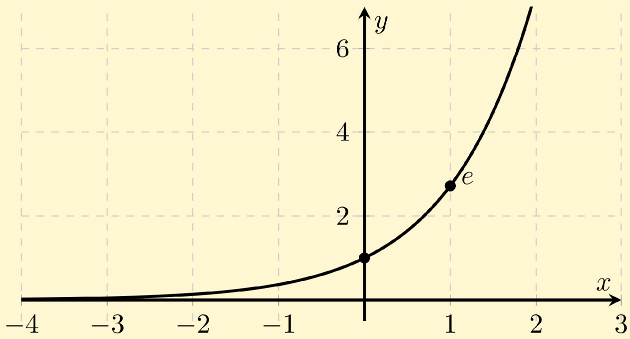
La courbe de $x \mapsto e^x$ vérifie :

— elle passe par le point $(0;1)$;

— elle est toujours au-dessus de l'axe des abscisses ;

— elle est strictement croissante ;

— elle devient très grande lorsque x devient grand.



Bloc 14 Fonction $x \mapsto e^{kx}$

Soit :

$$f(x) = e^{kx}$$

Alors :

$$f'(x) = ke^{kx}$$

Comme :

$$e^{kx} > 0$$

le signe de $f'(x)$ est celui de k.

— si $k > 0$, alors f est strictement croissante ;

— si $k < 0$, alors f est strictement décroissante.

À retenir

Synthèse

- La fonction exponentielle est définie par :
$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1$$
- On note :
$$\exp(x) = e^x$$
- Pour tous réels a et b :
$$e^{a+b} = e^a e^b$$
- Pour tout réel a :
$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$
- La fonction exponentielle est toujours positive :
$$e^x > 0$$
- Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- On a :
$$e^a = e^b \iff a = b$$
- Si :
$$f(x) = e^{ax+b}$$
alors :
$$f'(x) = ae^{ax+b}$$

Exemples et applications

Exemple 1 Simplifier un produit d'exponentielles

Simplifier :

$$A = e^3 \times e^{-4} \times e^2$$

On regroupe les exposants :

$$A = e^{3-4+2}$$

$$A = e^1$$

Donc :

$$\boxed{A = e}$$

Exemple 2 Simplifier un quotient

Simplifier :

$$B = \frac{e^{2x+3}}{e^{x-1}}$$

On utilise :

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

Donc :

$$B = e^{(2x+3)-(x-1)}$$

$$B = e^{2x+3-x+1}$$

$$B = e^{x+4}$$

Ainsi :

$$\boxed{B = e^{x+4}}$$

Exemple 3 Résoudre une équation

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$e^{3x-2} = e^7$$

Comme :

$$e^a = e^b \iff a = b$$

on obtient :

$$3x - 2 = 7$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

Donc :

$$\boxed{S = \{3\}}$$

Exemple 4 Résoudre une inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$e^{2x+1} < e^5$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante :

$$2x+1 < 5$$

$$2x < 4$$

$$x < 2$$

Donc :

$$\boxed{S =]-\infty; 2[}$$

Exemple 5 Étudier un signe

Étudier le signe de :

$$f(x) = e^{2x-5} - 1$$

On cherche d'abord quand :

$$e^{2x-5} - 1 = 0$$

$$e^{2x-5} = 1$$

Or :

$$1 = e^0$$

donc :

$$2x - 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Comme e^x est croissante :

$$e^{2x-5} - 1 < 0 \quad \text{si} \quad x < \frac{5}{2}$$

et :

$$e^{2x-5} - 1 > 0 \quad \text{si} \quad x > \frac{5}{2}$$

Donc :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$e^{2x-5} - 1$		$-$	0	$+$	

Exemple 6 Dériver une exponentielle affine

Soit :
$$f(x) = e^{-3x+4}$$
On reconnaît :
$$f(x) = e^{ax+b}$$
avec :
$$a = -3$$
Donc :
$$f'(x) = -3e^{-3x+4}$$
Ainsi :
$$\boxed{f'(x) = -3e^{-3x+4}}$$

Exemple 7 Étudier les variations d'une exponentielle affine

Soit :
$$f(x) = e^{-3x+4}$$
D'après l'exemple précédent :
$$f'(x) = -3e^{-3x+4}$$
Or :
$$e^{-3x+4} > 0$$
donc :
$$f'(x) < 0$$
Ainsi :
$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$$

Exemple 8 Étudier une fonction composée

Soit :

$$h(x) = e^{3x} - 3x$$

On dérive :

$$h'(x) = 3e^{3x} - 3$$

On étudie le signe :

$$h'(x) > 0 \iff 3e^{3x} - 3 > 0$$

$$\iff e^{3x} > 1$$

$$\iff e^{3x} > e^0$$

$$\iff 3x > 0$$

$$\iff x > 0$$

De même :

$$h'(x) = 0 \iff x = 0$$

Donc h est décroissante sur $]-\infty; 0]$ puis croissante sur $[0; +\infty[$.
On calcule :

$$h(0) = e^0 - 3 \times 0 = 1$$

Ainsi :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$