Fonctions, logarithme, limites, convexité et intégrales

Bloc 1 Limites avec logarithme

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

En particulier :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

On retient que, en $+\infty$, les puissances de x dominent le logarithme.
On a aussi :

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Plus généralement :

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \qquad \text{pour tout } \alpha > 0.$$

Bloc 2 Propriétés du logarithme

Pour tous réels strictement positifs a et b :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

En particulier, pour $x > 0$:

$$\ln(x^2) = 2 \ln x$$

et :

$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x.$$

Bloc 3 Dérivées utiles

Pour $x > 0$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Si u est une fonction dérivable et strictement positive :

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple :

$$\left(\ln(x^2 + 1)\right)' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Pour dériver un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Pour dériver un quotient :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec $v \neq 0$.

Bloc 4 Étudier les variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction f :

1. On calcule $f'(x)$.

2. On étudie le signe de $f'(x)$.

3. On conclut :

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ est croissante}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ est décroissante}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \text{point critique possible}$$

Lorsque la dérivée est un quotient :

$$f'(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

si $D(x) > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $N(x)$.

Bloc 5 Signe d'un trinôme du second degré

Soit :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

On calcule :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Le signe de $P(x)$ est :

- du signe de a à l'extérieur des racines;
- du signe opposé à a entre les racines.

Bloc 6 Théorème des valeurs intermédiaires et unicité

Si f est continue sur $[a\,;b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation :

$$f(x) = k$$

admet au moins une solution dans $[a\,;b]$.
Si, en plus, f est strictement monotone sur $[a\,;b]$, alors cette solution est unique.
Méthode pour montrer qu'une équation admet une unique solution :

1. montrer que f est continue;

2. montrer que f est strictement monotone;

3. encadrer la valeur cherchée avec deux images.

Bloc 7 Convexité et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable.

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ est convexe}$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ est concave}$$

Un point où f'' change de signe est un point d'inflexion.
Pour étudier la convexité :

1. calculer ou utiliser $f''(x)$;

2. étudier le signe de $f''(x)$;

3. conclure sur les intervalles de convexité et de concavité.

Bloc 8 Tangente et inégalités de convexité

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Si f est convexe, sa courbe est au-dessus de ses tangentes : $f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$.
Si f est concave, sa courbe est au-dessous de ses tangentes : $f(x) \leqslant f'(a)(x-a) + f(a)$.

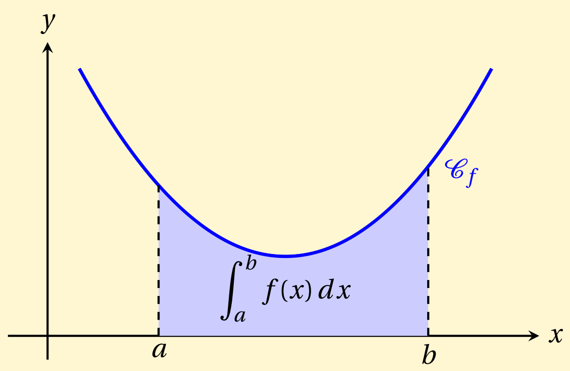
Bloc 9 Intégrale et aire

Si f est continue et positive sur $[a\,;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

représente l'aire située entre :

- la courbe de f ;
- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Bloc 10 Intégration par parties

Si u et v sont dérivables, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Cette formule est utile pour intégrer des produits contenant :

$$x, \quad \ln x, \quad (\ln x)^2.$$

Exemple de choix fréquent :

$$u(x) = (\ln x)^2 \qquad \text{et} \qquad v'(x) = x.$$

Alors :

$$u'(x) = \frac{2\ln x}{x} \qquad \text{et} \qquad v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Bloc 11 Limites utiles avec intégrales

On utilise souvent :

$$\lim_{a\to 0^+} a^2 \ln a = 0$$

et :

$$\lim_{a\to 0^+} a^2 (\ln a)^2 = 0.$$

Ces résultats permettent de simplifier les expressions obtenues après intégration par parties.

Exercice 1 — EX4 Amérique du nord 21 mai 2026

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x(\ln x)^2.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Pour tout réel x > 0, on pose $g(x) = x\ln x$.
   a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)^2$.
   b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   a. Démontrer que sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $\quad f'(x) = (\ln x)(2+\ln x)$.
   b. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.
4. On considère l'équation $f(x) = 2$.
   a. Justifier que, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, cette équation admet une unique solution.
   On note α cette solution.
   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.
5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1]$.

a. Donner une interprétation géométrique de $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x\ln x\,\mathrm{d}x.$$

c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$

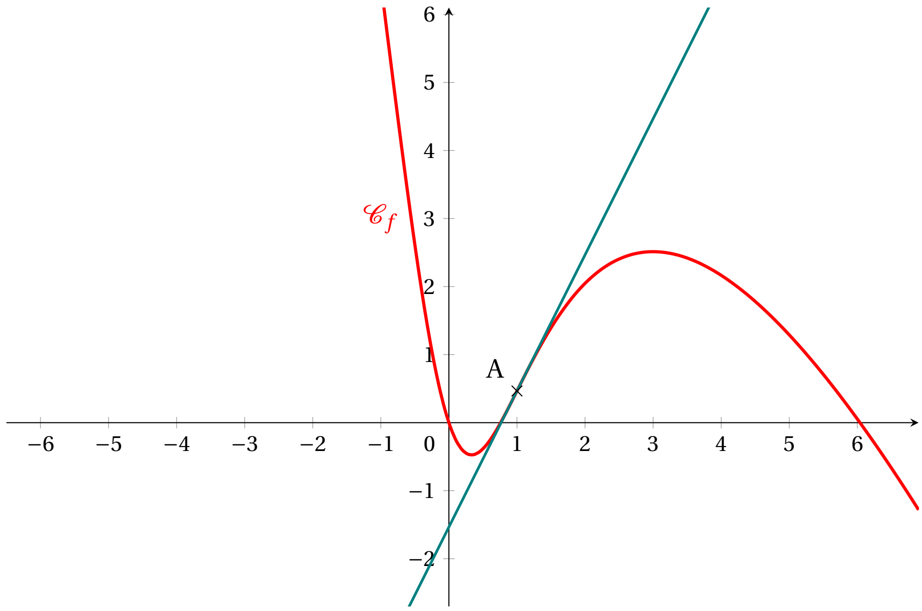
d. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ quand a tend vers 0.

EXERCICE 2 — EX4 Amérique du nord 20 mai 2026

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 5\ln\left(x^2+1\right) - 3x$$

et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f, les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. a. Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,

$$f(x) = x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.

4. a. Démontrer que pour tout x réel, $\quad f'(x) = \dfrac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}$.

b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{-10x^2+10}{\left(x^2+1\right)^2}$$

a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question **1**.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

c. En déduire que pour tout $x \geqslant 1$, $\quad \ln\left(x^2+1\right) \leqslant x + \ln(2) - 1$.