

Chapitre 3

Probabilités

1. Expérience aléatoire

➤ 1. Expérience aléatoire et vocabulaire

Définitions

- Une expérience est dite aléatoire si on ne peut pas en prévoir le résultat à l'avance.
- Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé une issue.
- L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé l'univers de l'expérience. Il est généralement noté Ω (« oméga »). Ω
- On appelle évènement une partie de l'univers Ω ; c'est donc un ensemble d'issues.
- L'évènement contraire d'un évènement A , noté $\bar{A}$, est l'évènement formé par toutes les issues qui ne réalisent pas l'évènement A .

Définitions

- Une expérience est dite aléatoire si on ne peut pas en prévoir le résultat à l'avance.
- Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé une issue.
- L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé l'univers de l'expérience. Il est généralement noté Ω (« oméga »). Ω
- On appelle évènement une partie de l'univers Ω ; c'est donc un ensemble d'issues.
- L'évènement contraire d'un évènement A , noté $\bar{A}$, est l'évènement formé par toutes les issues qui ne réalisent pas l'évènement A .

Exemple



On considère un dé tétraédrique

- On jette le dé et on note le nombre de la pointe obtenu = **Expérience ALÉATOIRE**
- "3" est une issue. (il y a aussi "1", "2" et "4")

- On appelle évènement une partie de l'univers Ω ; c'est donc un ensemble d'issues.
- L'évènement contraire d'un évènement A , noté $\bar{A}$, est l'évènement formé par toutes les issues qui ne réalisent pas l'évènement A .

Exemple



On considère un dé tétraédrique.

- On jette le dé et on note le nombre de la pointe obtenu = **Expérience ALÉATOIRE**
- "3" est une issue. (il y a aussi "1", "2" et "4")
- $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$ est l'univers de l'expérience
- $A =$ "le résultat est pair" est un **évènement**
 $A = \{2; 4\}$ est une autre écriture

- On jette le dé et on note le nombre de la pointe obtenu = **Expérience ALÉATOIRE**
- "3" est une issue. (il y a aussi "1", "2" et "4")
- $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$ est l'univers de l'expérience
- $A =$ "le résultat est pair" est un **événement**
 $A = \{2; 4\}$ est une autre écriture

- On jette le dé et on note le nombre de la pointe obtenu = **Expérience ALÉATOIRE**
- "3" est une issue. (il y a aussi "1", "2" et "4")
- $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$ est l'univers de l'expérience
- $A =$ "le résultat est pair" est un **événement**
 $A = \{2; 4\}$ est une autre écriture
- $\bar{A} =$ "le résultat est impair" est l'événement **contraire** de A
 $\bar{A} = \{1; 3\}$ est une autre écriture

Exercice

On considère une urne dans laquelle on a placé 10 jetons numérotés de 1 à 10.

Compléter les phrases suivantes:

Expérience aléatoire : On tire un jeton au hasard et on note son numéro

1) $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ correspond à l'évènement " le numéro obtenu est impair "  

2) $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$  correspond à l'évènement 'le jeton porte un numéro inférieur ou égal à 7'

3) $C = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ correspond à l'évènement " le numéro obtenu est pair "  

4) $D = \{7; 8; 9; 10\}$ correspond à l'évènement " le numéro obtenu est supérieur ou égal à 7 "  

5) $E = \{5; 10\}$   correspond à l'évènement 'le jeton porte un numéro qui est un multiple de 5'

6) $F = \{8; 9; 10\}$ correspond à l'évènement *le numéro est strictement supérieur à 7*  

7) $G = \{1; 2; 4; 8\}$   correspond à l'évènement 'le jeton porte un numéro qui est un diviseur de 16'

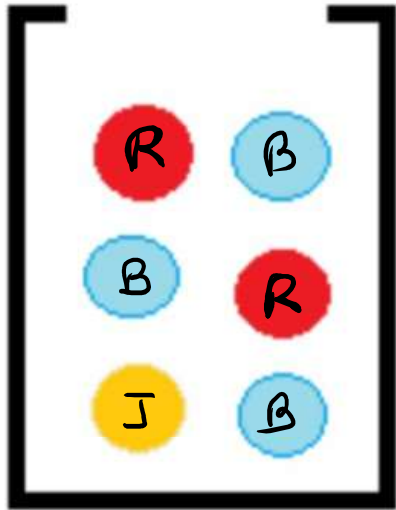
8) $H = \{1; \dots; 6\}$   correspond à l'évènement 'le jeton porte un numéro strictement inférieur à 7'

PROBA_VOCABULAIRE1
PROBA_VOCABULAIRE2

2. Modélisation d'une expérience aléatoire

Définition

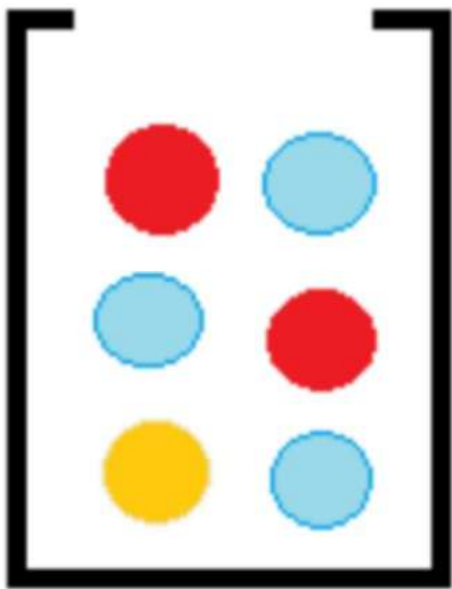
Choisir un modèle de probabilité pour une expérience aléatoire, c'est associer à chaque issue un nombre compris entre 0 et 1 appelé **probabilité de l'issue**, de sorte que la somme des probabilités de toutes les issues soit égale à 1. On définit ainsi une loi de probabilité.



Expérience aléatoire : On tire une boule et on note sa couleur.

Univers : $\Omega = \{\text{Bleu, Rouge, Jaune}\}$

Loi de probabilité : ³ ISSUES



Expérience aléatoire : On tire une boule et on note sa couleur.

Univers : $\Omega = \{\text{Bleu}, \text{Rouge}, \text{Jaune}\}$

3 ISSUES

Loi de probabilité :

Issues	Bleu	Rouge	Jaune
Probabilité	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

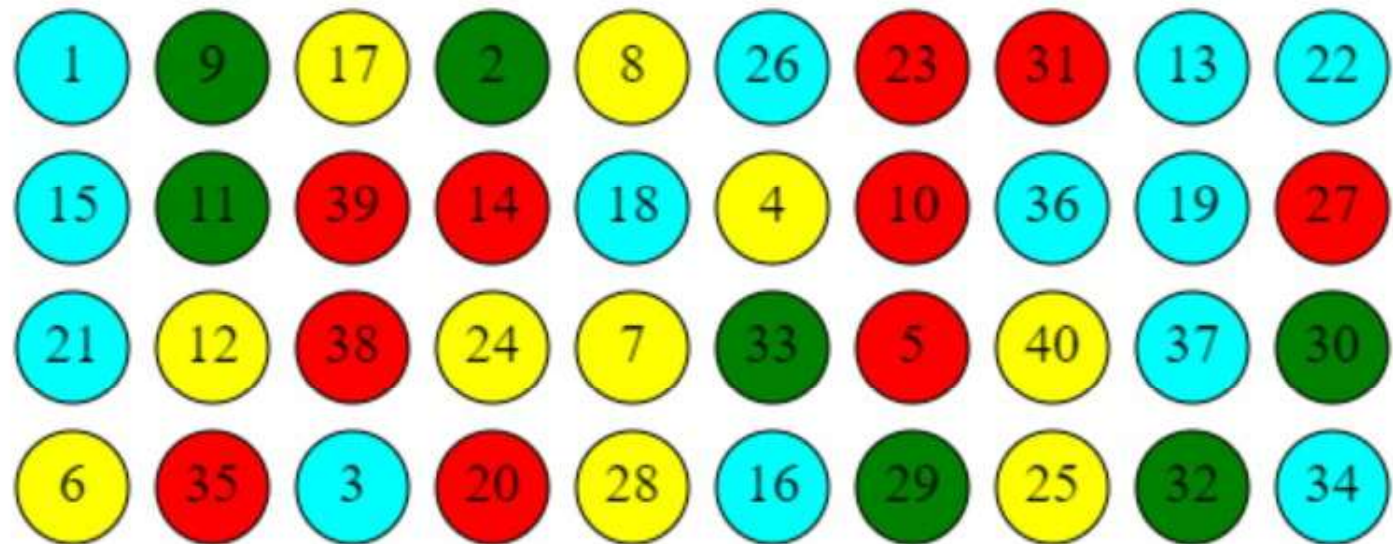
Somme : $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Loi de probabilité:

Issues	Bleu	Rouge	Jaune
Probabilité	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Somme: $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Exercice



Soy
6



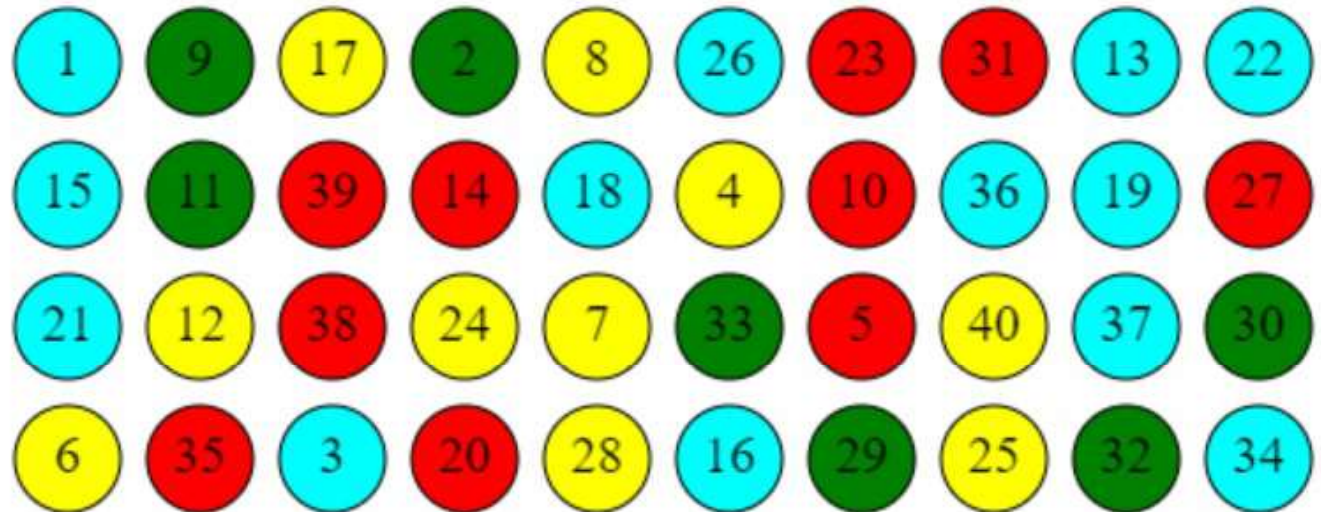
3 ISSUES
Loi de probabilité :

Issues	Bleu	Rouge	Jaune
Probabilité	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Somme : $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

CALCUL_PROBABILITES1

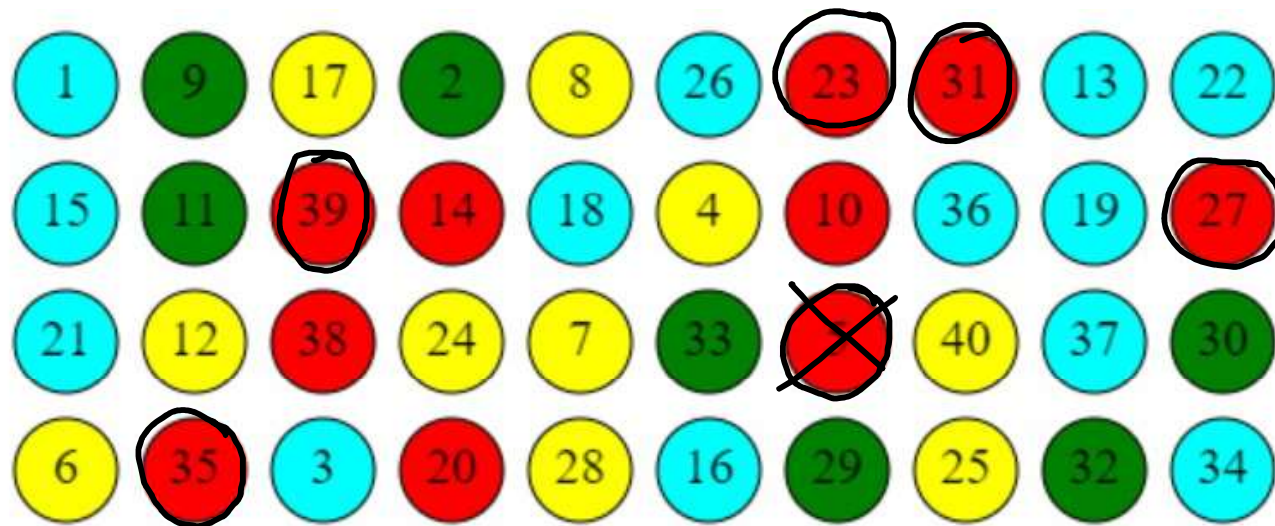
Exercice



Exercice

Voici une urne contenant un ensemble de boules colorées et numérotées.

On tire une boule au hasard et on note sa couleur et son numéro



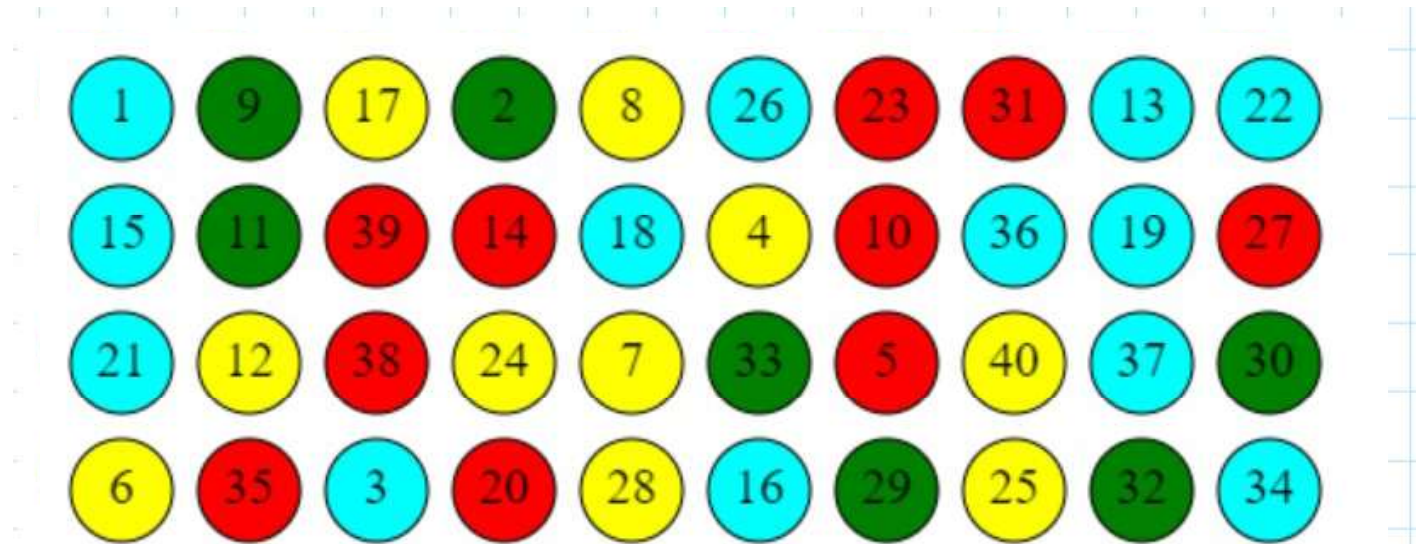
Evènements

"La boule tirée est rouge et porte un numéro impair supérieur ou égal à 7"

CALCUL_PROBABILITES1

Voici une Urne contenant un ensemble de boules colorées et numérotées.

On tire une boule au hasard et on note sa couleur et son numéro



Evènement

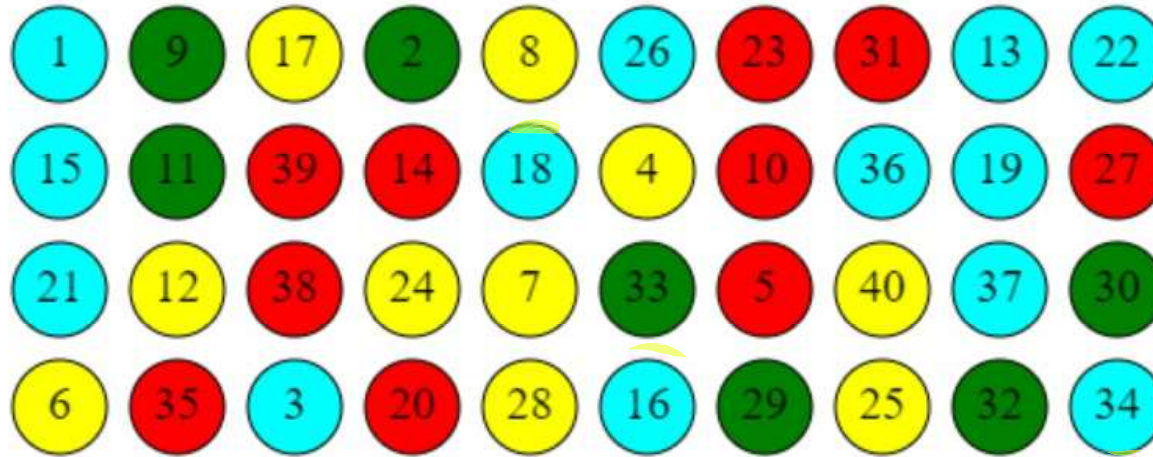
"La boule tirée est rouge et porte un numéro impair supérieur ou égal à 7"

$\{ 35, 27, 39, 31, 23 \}$

$$\text{probabilité: } \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

2) La probabilité de l'évènement "La boule tirée est bleue et porte un numéro pair" est égal à $\frac{6}{40}$?

3) La probabilité de l'évènement "La boule tirée est bleue ou verte et porte un numéro impair" est égal à ?



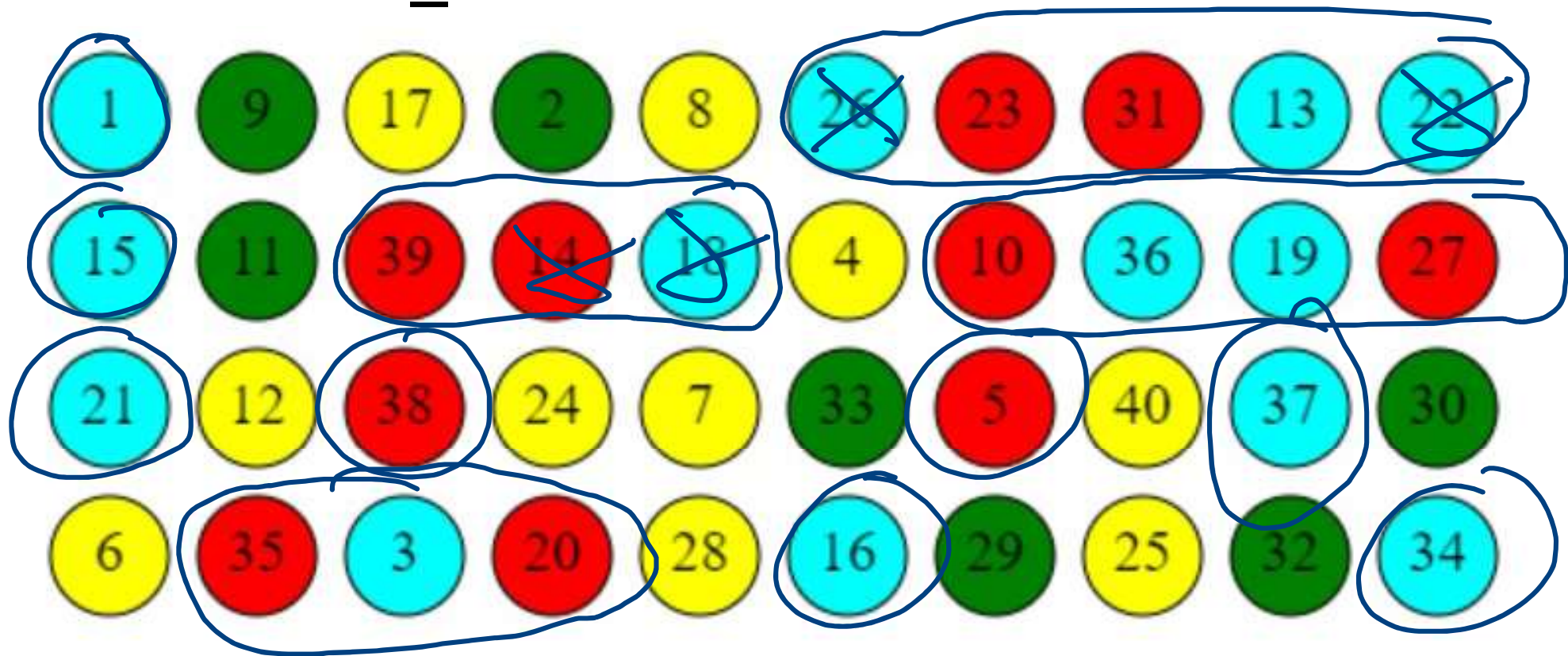
Evènement

"La boule tirée est rouge et porte un numéro impair supérieur ou égal à 7"

$\{ 35, 27, 39, 31, 23 \}$ probabilité: $\frac{5}{40} = \frac{1}{8}$

CALCUL_PROBABILITES1

CALCUL_PROBABILITES1a

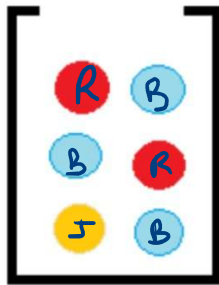


La boule tirée est bleue ou rouge et impair

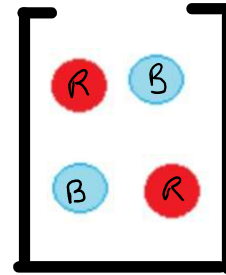
Définition et propriétés

- Quand chaque issue a autant de chances de se produire qu'une autre, on est en **situation d'équiprobabilité**. Si une expérience comporte n issues équiprobables, la probabilité de chacune d'elles est égale à $\frac{1}{n}$.
- Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition de chaque issue se stabilise autour d'une valeur. On prend alors cette valeur comme probabilité de l'issue.

Exemples

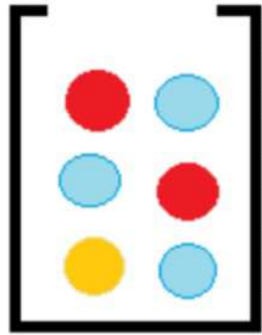


Situation
qui n'est
pas
équiprobable
 $P(B) \neq P(R) \neq P(J)$



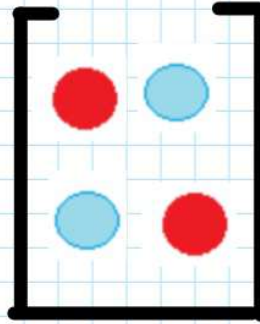
Situation
d'équiprobabilité
 $P(\text{Rouge}) = P(\text{bleu}) = \frac{1}{2}$
 $\frac{2}{4} = \frac{2}{4}$

Remarque



Situation
qui n'est
pas
équiprobable

$$P(B) \neq P(R) \neq P(J)$$



Situation
d'équiprobabilité
 $P(\text{Rouge}) = P(\text{bleu}) = \frac{1}{2}$
 $\frac{2}{4} = \frac{2}{4}$

2. Calculs de probabilités

➤ 1. Probabilité d'un événement

Définition

La **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des issues qui constituent cet événement.

2. Calculs de probabilités

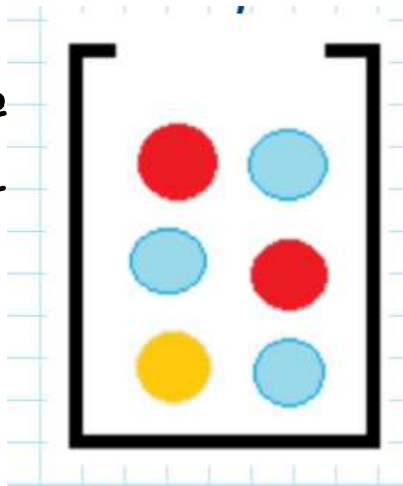
1. Probabilité d'un évènement

Définition

La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des issues qui constituent cet évènement.

Exemple

Urne
n° 1



$P(\text{"non Jaune"})$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$$

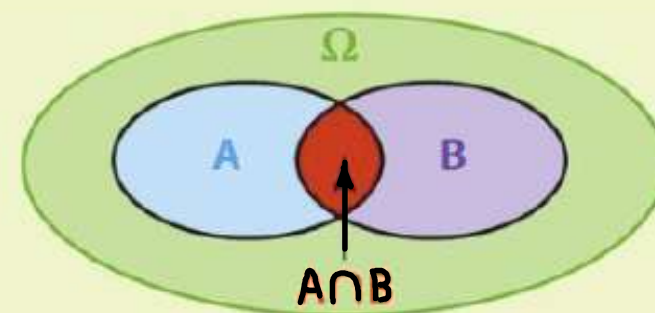
$$= \frac{5}{6}$$

$$= P(\text{"Bleu"}) + P(\text{"rouge"}) \\ \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right)$$

2. Réunion et intersection d'évènements

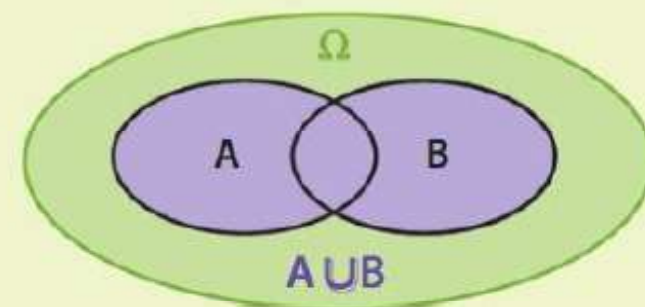
Définition "ET"

On appelle $A \cap B$ (on dit « A inter B ») l'évènement constitué des issues qui sont à la fois dans A et dans B.



Définition "OU"

On appelle $A \cup B$ (on dit « A union B ») l'évènement constitué des issues qui sont dans A ou dans B (c'est-à-dire dans A, dans B ou dans les deux).

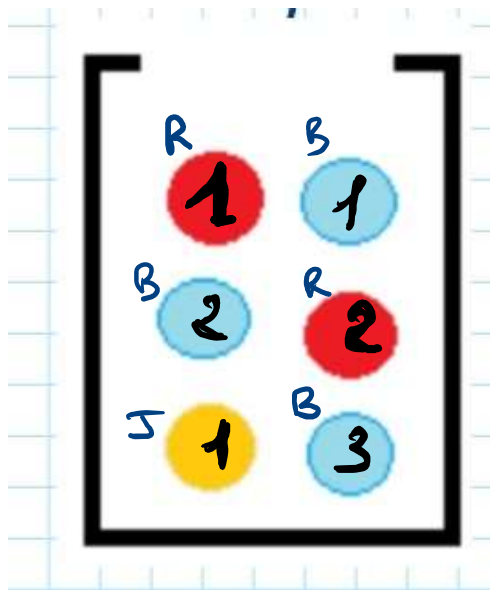


Propriété

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Exemple

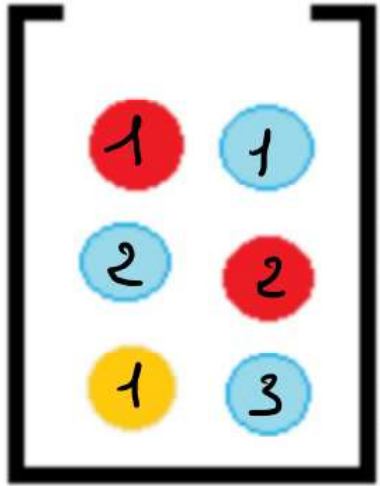


$$A = \text{"numéro pair"} = \{ \overset{B}{2}, \overset{R}{2} \}$$

$$B = \text{"Rouge"} = \{ \overset{R}{1}, \overset{R}{2} \}$$

$$\overset{\text{"et"}}{A \cap B} = \{ \overset{R}{2} \}$$

$$\overset{\text{"ou"}}{A \cup B} = \{ \overset{R}{1}, \overset{R}{2}, \overset{B}{2} \}$$



$$A = \text{"nombre pair"} = \{ \text{blue } 2; \text{red } 2 \}$$

$$B = \text{"Rouge"} = \{ \text{red } 1; \text{red } 2 \}$$

$$A \cap B = \{ \overset{R2}{\text{red } 2} \}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$A \cup B = \{ \overset{R1}{\text{red } 1}; \overset{R2}{\text{red } 2}; \text{blue } 2 \}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(\{ \overset{B2}{\text{blue } 2}; \overset{R2}{\text{red } 2} \}) + P(\{ \overset{R1}{\text{red } 1}; \overset{R2}{\text{red } 2} \}) - P(\{ \overset{R2}{\text{red } 2} \})$$

On ne doit pas compter le (2) deux fois

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(\{ \overset{B^2}{\underset{2}{\text{blue}}}; \overset{R_2}{\underset{2}{\text{red}}} \}) + P(\{ \overset{R_1}{\underset{1}{\text{red}}}; \overset{R_2}{\underset{2}{\text{red}}} \}) - P(\{ \overset{R_2}{\underset{2}{\text{red}}} \})$$

On ne doit pas compter le (2) deux fois

$$= \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

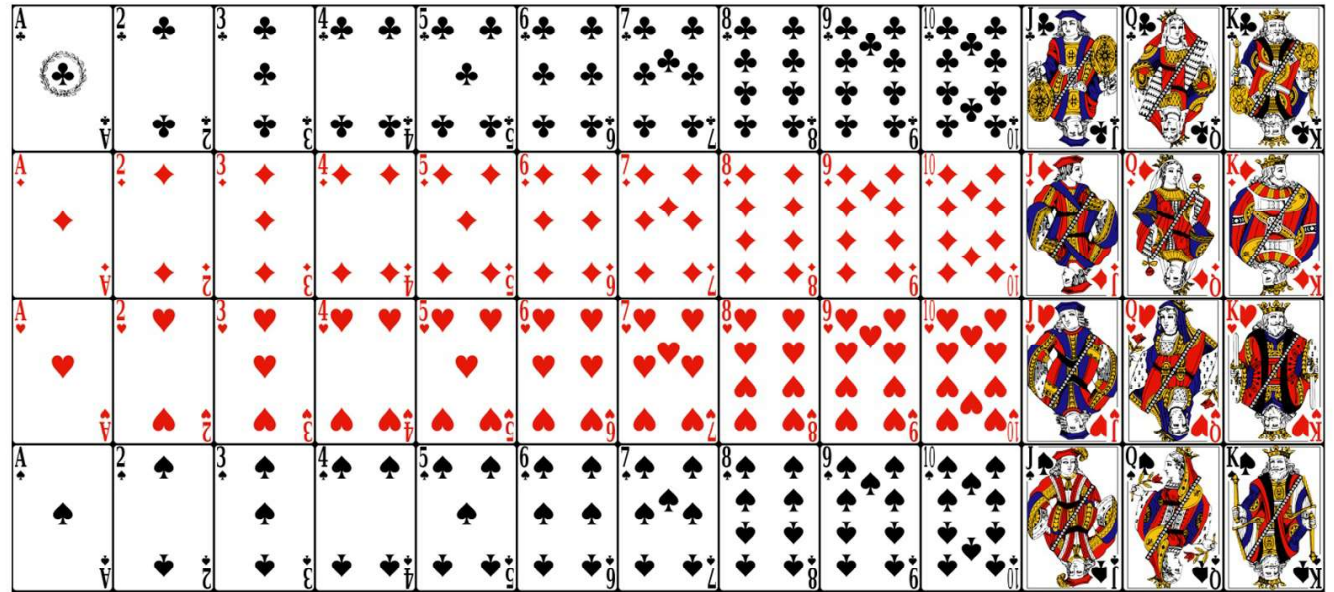
Exercice Jeu de 52 cartes (13 x 4)

As = 1

2 couleurs : Rouge
et noir

13 cartes par famille (4)
(cœur, pique, carreau, trèfle)

On tire une carte au hasard



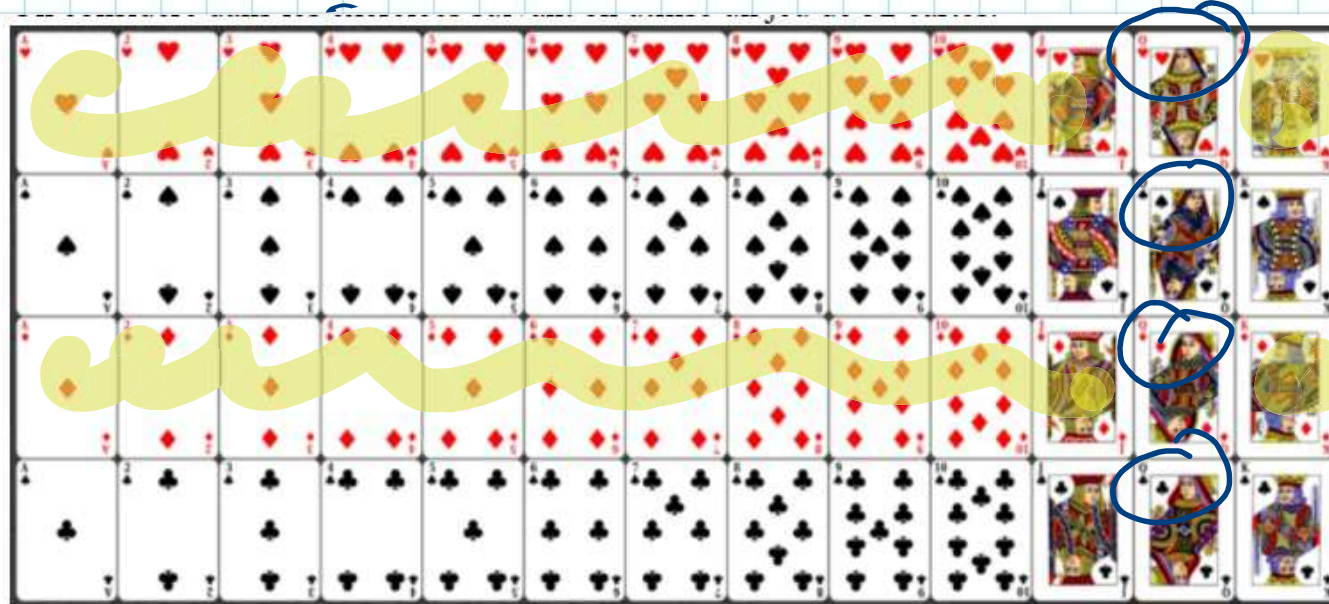
La probabilité d'avoir 1 carte de numéro PAIR et de couleur rouge est égal à $\frac{10}{52}$?

La probabilité d'avoir 1 DAME ou une carte de couleur ROUGE est égal à $\frac{28}{52}$?

La probabilité d'avoir 1 carte de numéro IMPAIR et de couleur noire est égal à $\frac{\quad}{52}$?

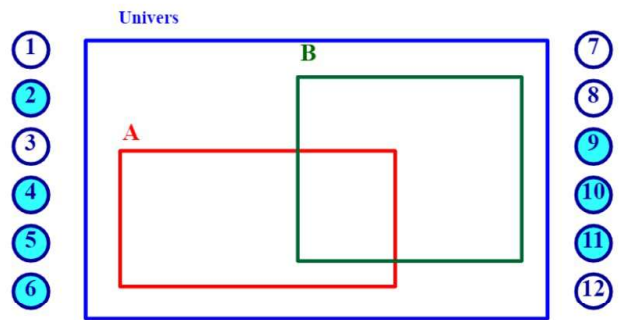
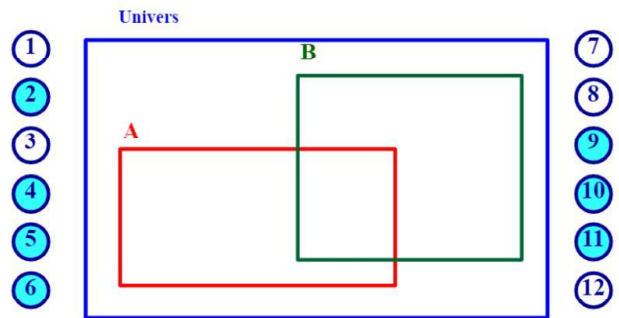
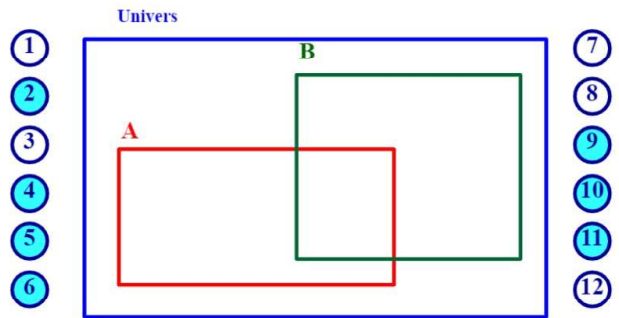
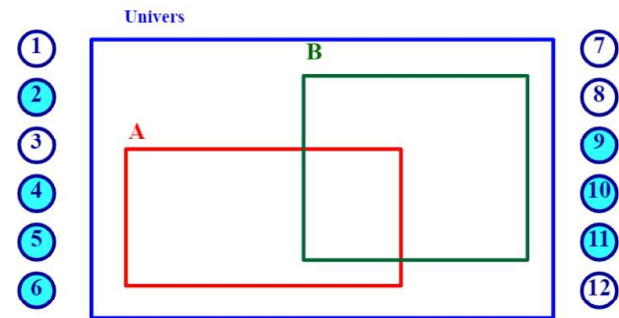
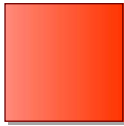
La probabilité d'avoir 1 VALET ou une carte de couleur NOIRE est égal à $\frac{\quad}{52}$?

La probabilité d'avoir 1 carte de numéro PAIR est égal à $\frac{\quad}{52}$?



$$4 + 12 + 12$$

CALCUL_PROBABILITES2
CALCUL_PROBABILITES2a
CALCUL_PROBABILITES3
CALCUL_PROBABILITES3a



Outils: diagramme de VENN

Exercice 1

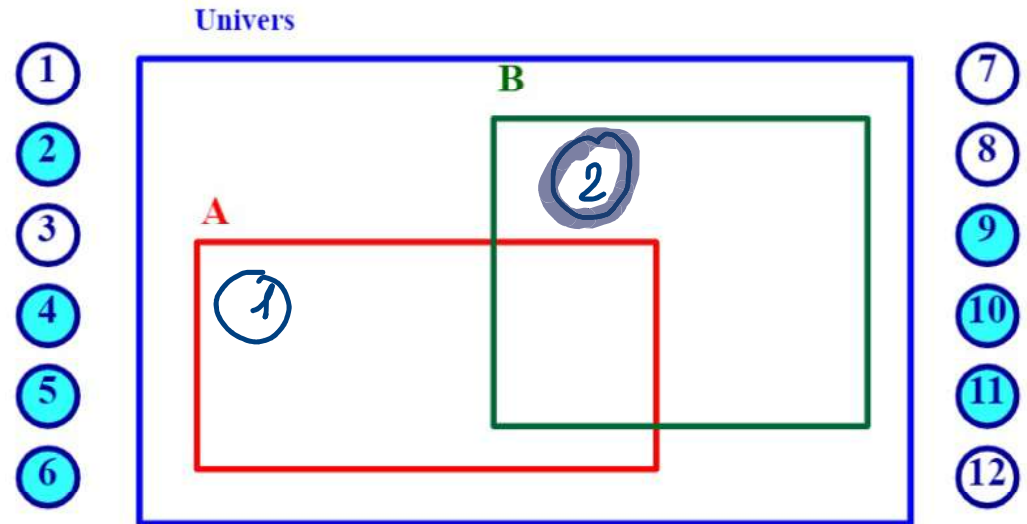
Dans une urne on a disposé 12 boules numérotées de 1 à 12 dont certaines sont blanches et les autres sont bleues. On tire une boule au hasard et on regarde son numéro et sa couleur.

On considère les événements suivants:

A: "Le numéro de la boule est un nombre impair"

B: "La boule est bleue"

Dans le diagramme de VENN ci-contre, placer les boules numérotées pour représenter cette situation.



La boule ① est dans A mais pas dans B :

et

$$A \cap \overline{B}$$

La boule ② est dans B mais pas dans A :

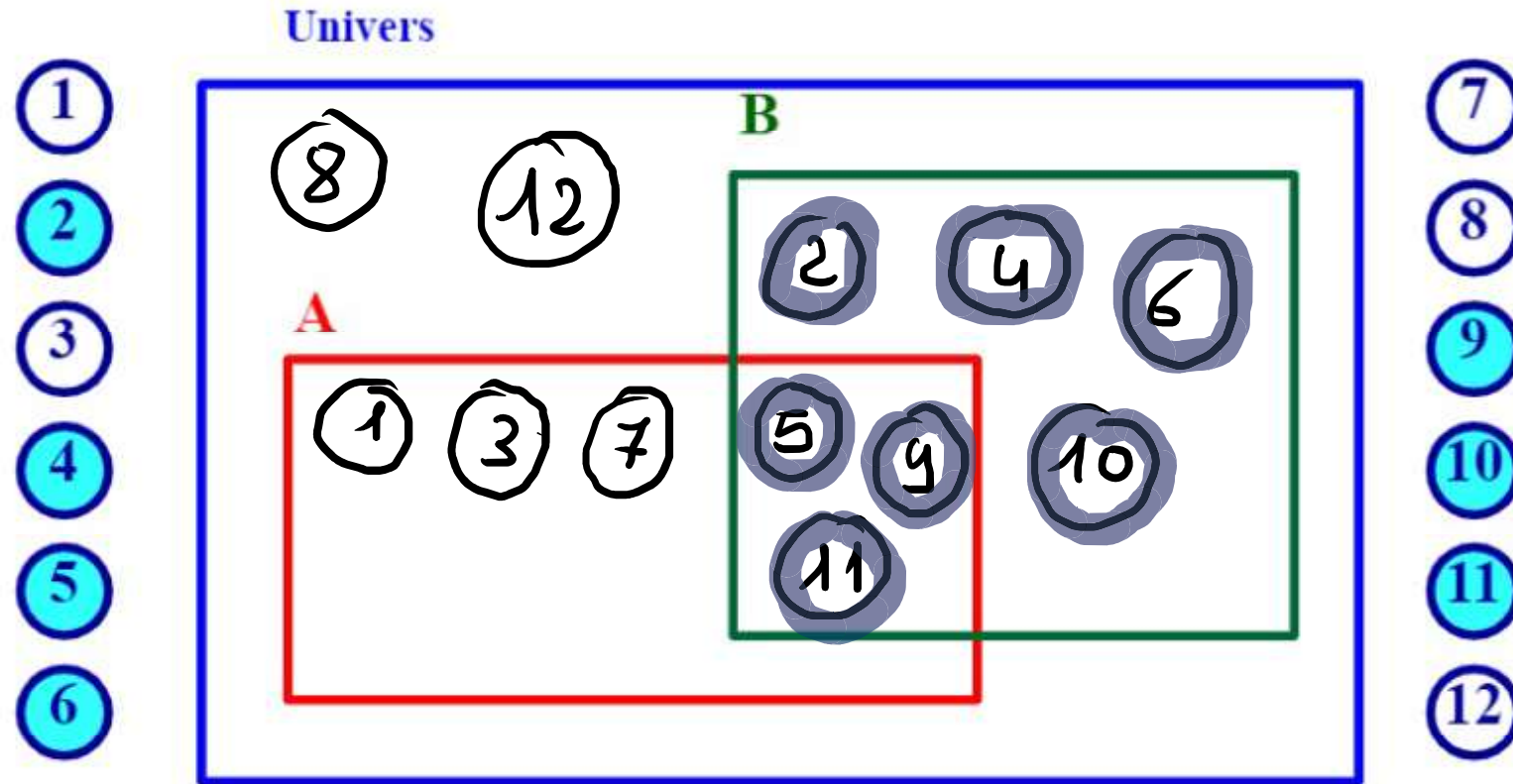
$$\overline{A} \cap B$$

La boule ① est dans A mais pas dans B :

$$A \cap \overline{B}$$

La boule ② est dans B mais pas dans A :

$$\overline{A} \cap B$$



Exercice 2

On considère les évènements suivants:

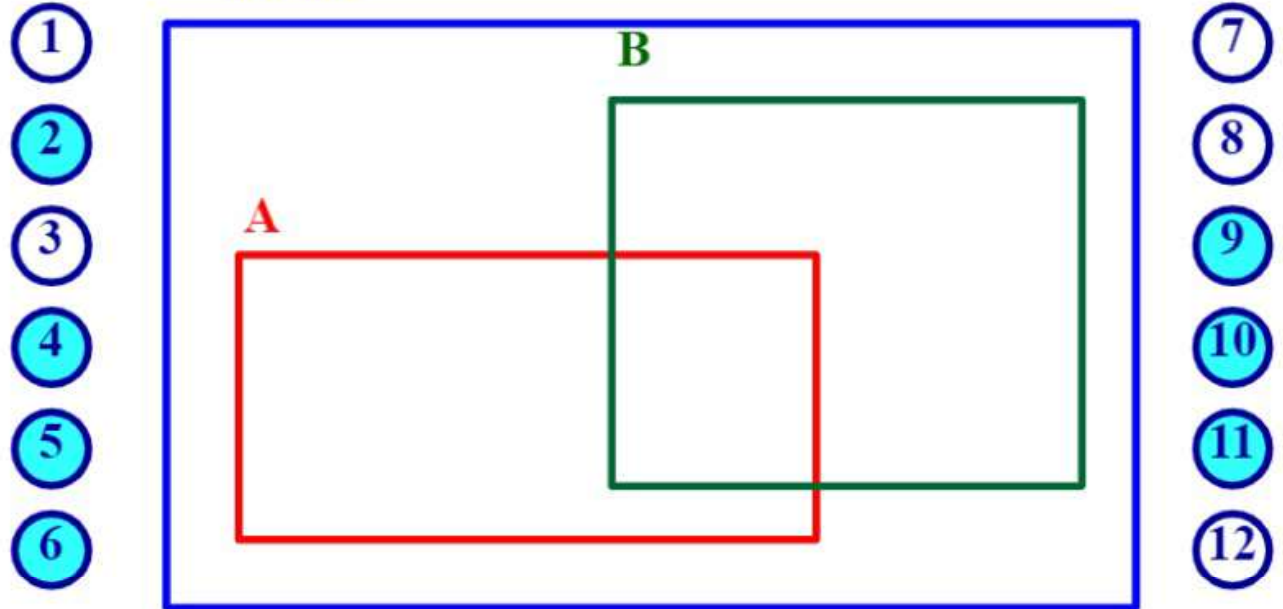
A: "Le numéro de la boule est un nombre impair"

B: "Le numéro du jeton est inférieur ou égal à 5"

Dans le diagramme de VENN ci-contre, placer les boules numérotées pour représenter cette situation.

Votre réponse est: ? (coche verte si la réponse est bonne, croix rouge dans le cas contraire)

Univers

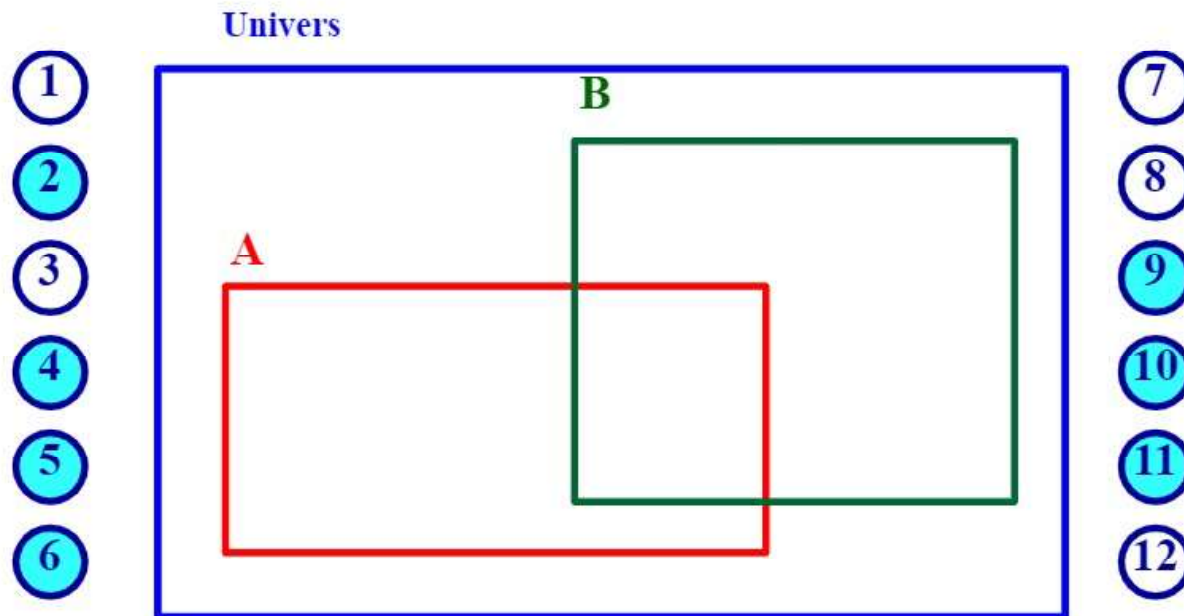


VENNa0

VENNa1

VENNa2

Utiliser un diagramme de VENN



Dans une urne on a disposé 12 boules numérotées de 1 à 12 dont certaines sont blanches et les autres sont bleues. On tire une boule au hasard et on regarde son numéro et sa couleur.

Exercice

On considère les évènements suivants:

A: "Le numéro de la boule est un nombre impair"

B: "La boule est bleue"

Dans le diagramme de VENN ci-contre, placer les boules numérotés pour représenter cette situation.

Votre réponse est:  (coche verte si la réponse est bonne, croix rouge dans le cas contraire)

Identification et correction

Login:

Mot de passe:

Classe:

Exercice 3:

On considère les événements suivants:

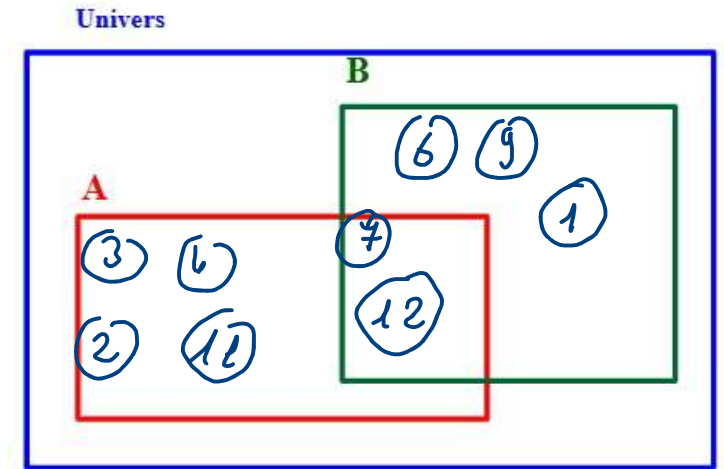
$\overline{A} \cap B = \{6; 9; 1\}$ $\longrightarrow$ Pas dans A et dans B

$A \cap \overline{B} = \{3; 4; 2; 11\}$ $\longrightarrow$ dans A et pas dans B

$A \cap B = \{7; 12\}$ $\longrightarrow$ dans A et dans B

"

Dans le diagramme de VENN ci-contre, placer les boules numérotées pour représenter cette situation.



Univers

B

A

5 8 10

6 9 1

3 4

2 11

7

12

VENN_AVANCE

VENN_AVANCEa

On considère les évènements suivants:

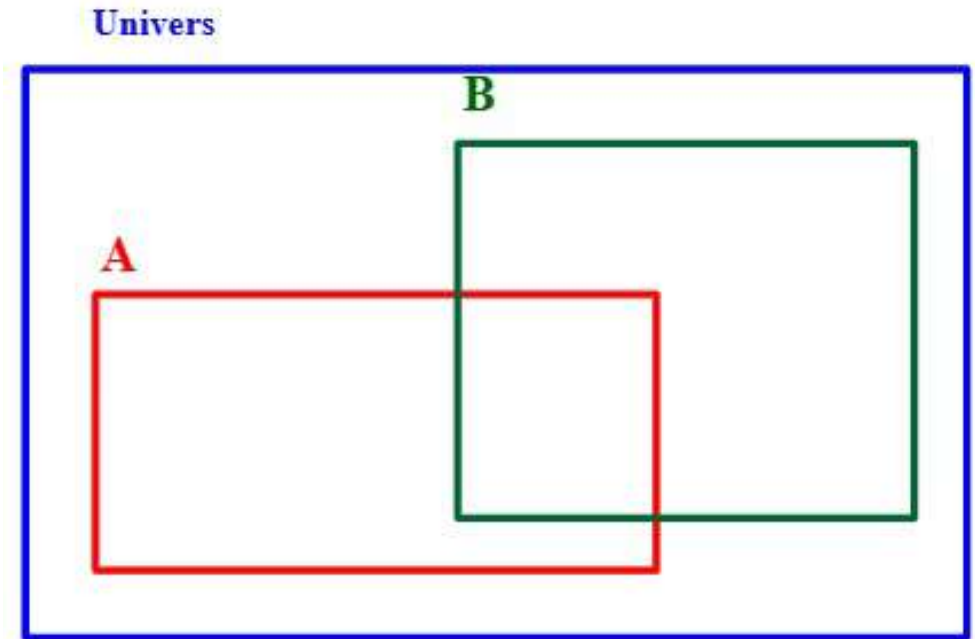
$$\overline{A} \cap B = \{5; 8; 7\}$$

$$A \cap \overline{B} = \{10; 11; 2\}$$

$$A \cap B = \{1; 12\}$$

"

Dans le diagramme de VENN ci-contre, placer les boules numérotées pour représenter cette situation.

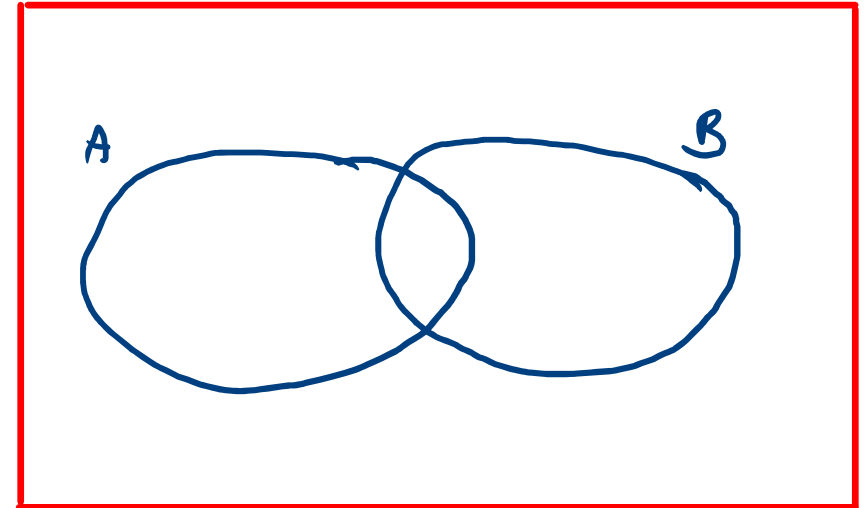


Exercice 4

$\Omega (\quad)$

Dans un lycée de 200 élèves, on propose deux options facultatives A et B.
On a 170 élèves qui ont choisi au moins une option: parmi ceux là, 30 ont choisi les deux options.
Le nombre total des élèves ayant choisi l'option A s'élève à 100.

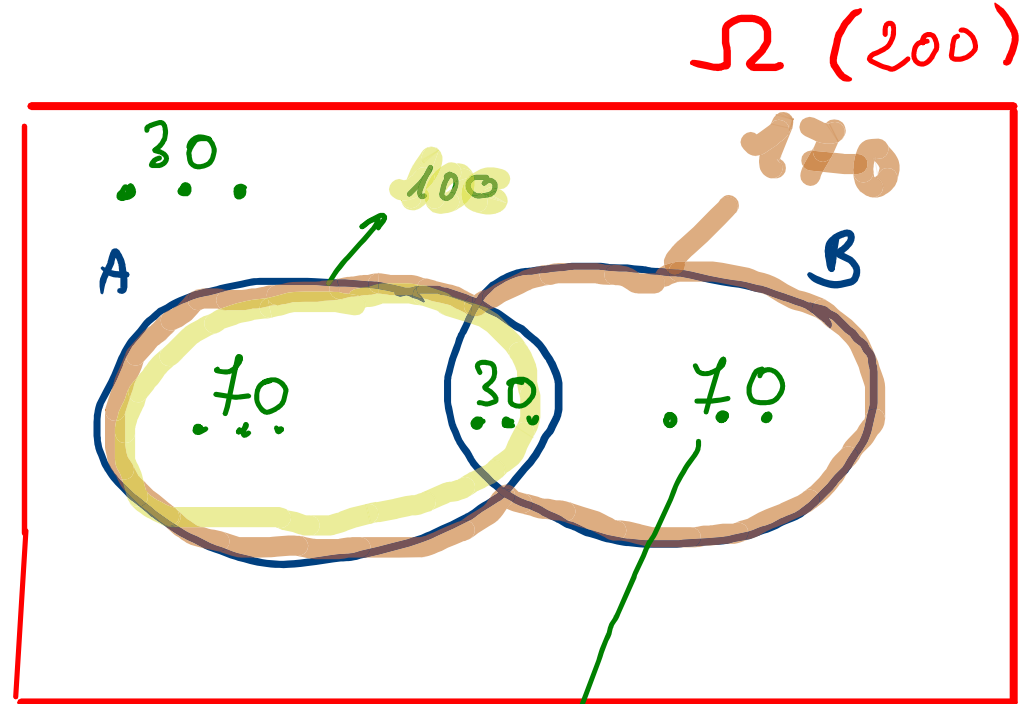
A partir des ces informations, compléter le diagramme de VENN ci-contre.



Exercice 4

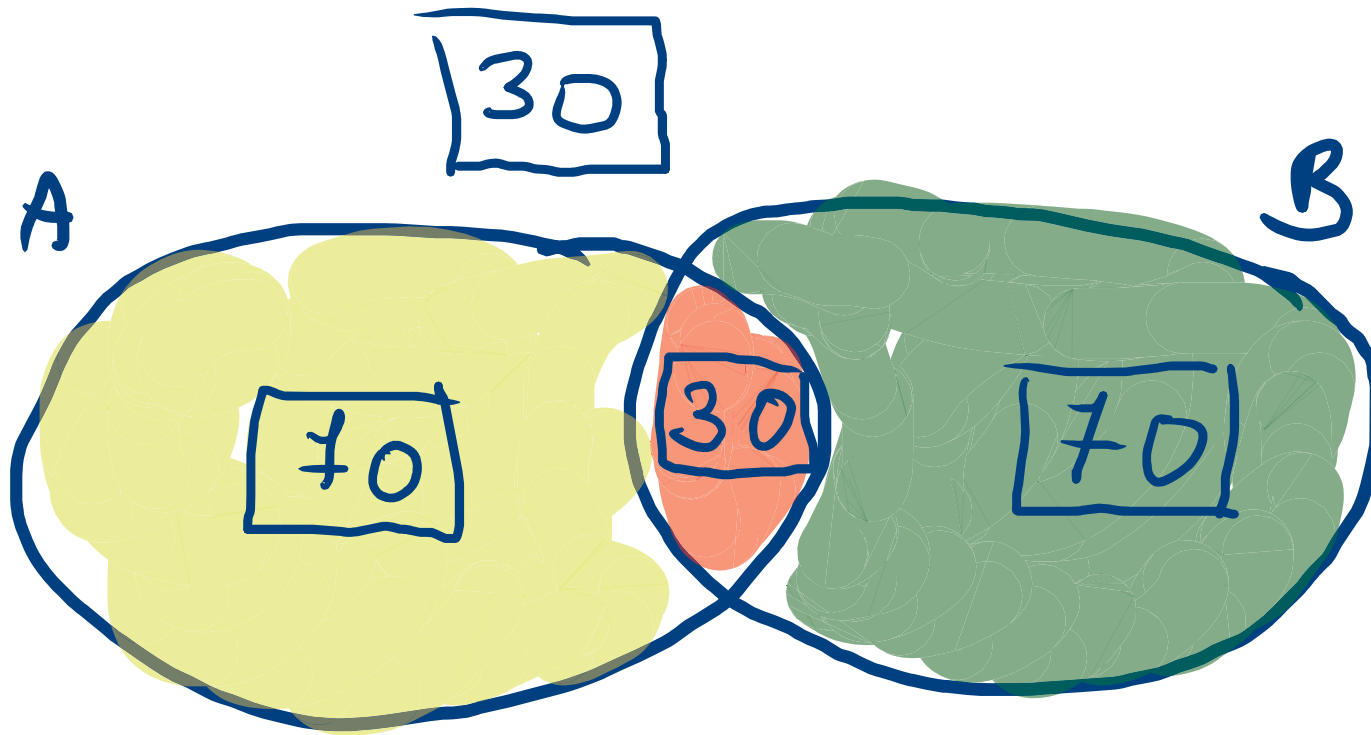
Dans un lycée de 200 élèves, on propose deux options facultatives A et B.
On a 170 élèves qui ont choisi au moins une option: parmi ceux là, 30 ont choisi les deux options.
Le nombre total des élèves ayant choisi l'option A s'élève à 100.

A partir de ces informations, compléter le diagramme de VENN ci-contre.

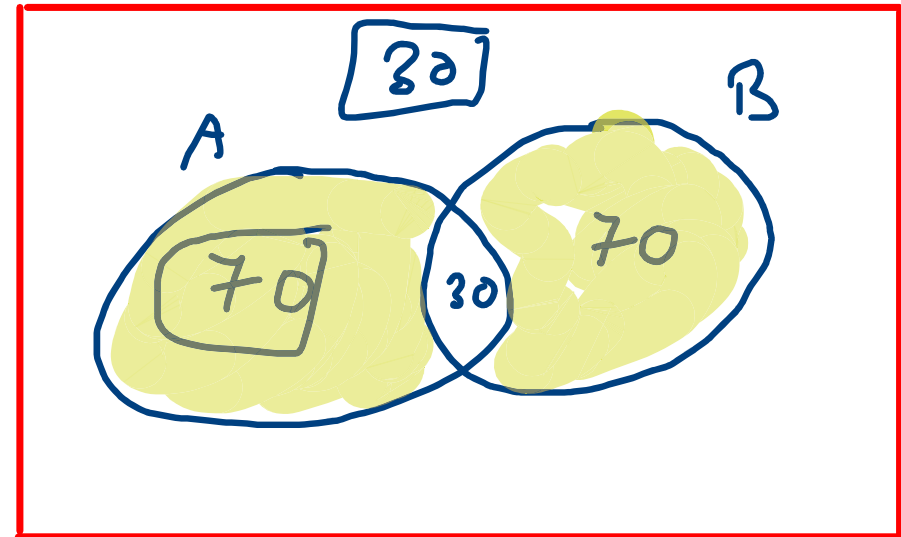


$$A = 70 + 30 = 100$$
$$170 - 100 = 70$$

$\Omega(200)$



$\Omega (200)$



Exercice 2 On tire un élève au hasard:

Quelle est la probabilité pour que cet élève ait choisi UNE SEULE DES DEUX OPTIONS:

$$P = \frac{70 + 70}{200} = \frac{140}{200}$$

VENN_PROBABILITE1
VENN_PROBABILITE1a